13. Shashkova, Ye. V. & Dyachenko, N. M. (2006). The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 25-33.
14. Pauk, V. & Zastrau, B. W. (2004). Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space. J. Theor. Appl. Mech, Vol. 42, No. 1, pp. 107-124.
15. Dyachenko, N. N., Sinchenko, E. S. & Kachan, A. I. (2016). Analytical and approximately analytical solution of the plane contact problem taking into account the friction and the roughness. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 79-91.
16. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1984). Functional Analysis. Moskow: Nauka.
17. Dyachenko, N. N., Rezvina, D. G. & Smolyankova, T. N. (2014). Exponential-power the law of deformation of the roughness in the flat problem about indentation of a punch. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 42-55.

УДК 519.85 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-05

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ІМОВІРНІСНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

[1]Ємець О. О., [2]Барболіна Т. М.

[1]*Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, м. Полтава, Україна*

[2]*Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, вул. Остроградського, 2, м. Полтава, Україна*

yemetsli@ukr.net, tm–b@ukr.net

Актуальним напрямом сучасної теорії оптимізації є дослідження задач комбінаторної природи за різних видів невизначеності. Один із підходів до формулювання оптимізаційних задач з імовірнісною невизначеністю ґрунтується на введенні відношення порядку на фактор–множині, що утворюється при розбитті заданої множини незалежних випадкових величин на основі порівняння їх числових характеристик. Ця стаття присвячена обґрунтуванню методу гілок і меж для розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, постановка яких здійснена на основі такого підходу.

Зокрема, обґрунтовано алгоритм методу гілок і меж для розв'язування задач оптимізації на розміщеннях з лінійною цільовою функцією, у якій коефіцієнти є детермінованими величинами, тоді як елементи мультимножини є класами еквівалентності за згаданою еквівалентністю (*H*–задач). Пропонується проводити галуження загальної множини розміщень, надаючи певні можливі значення частині змінних. Коли отримується одноелементна множина, здійснюється перевірка, чи належить одержане розміщення множині, що визначена додатковими (некомбінаторними) обмеженнями. Запропоновано й обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин, у якому використовуються властивості екстремалі в лінійній безумовній задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, сформульовано алгоритм методу гілок і меж. Роботу алгоритму проілюстровано прикладом.

Для лінійної безумовної задачі оптимізації на розміщеннях, у якій коефіцієнти цільової функції є класами еквівалентності, а елементи мультимножини – детермінованими величинами (H_d–задач), встановлено зв'язок із *H*–задачами. Спираючись на цей взаємозв'язок та властивості розв'язку *H*–задачі, встановлено властивості мінімалі у розв'язку H_d–задачі. Розглянуто особливості застосування методу гілок і меж для розв'язування H_d–задач: як і для *H*–задачі пропонується використовувати галуження «вглиб», також обґрунтовано спосіб оцінювання підмножин.

Ключові слова: евклідова задача комбінаторної оптимізації, задача оптимізації на розміщеннях, стохастична комбінаторна оптимізація, метод гілок і меж.

BRANCH AND BOUND METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF LINEAR OBJECTIVE FUNCTION ON ARRANGEMENTS UNDER PROBABILISTIC UNCERTAINTY

[1]Iemets O. O, [2]Barbolina T. M.

[1]*Poltava university of economics and trade,*
Koval str., 3, Poltava, Ukraine

[2]*Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University,*
Ostrogradsky str.,2, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, tm–b@ukr.net

Actual trend of the modern theory of optimization is to study the problems of combinatorial nature under different types of uncertainty. One approach for stochastic optimization problems formalization is based on the introduction of the order relation on the quotient set, which is generated by partition a given set of independent random variables based on the comparison of their numerical characteristics. This paper is devoted to the substantiation of branch and bound method for solving of optimization problems on arrangements, whose statement is made according to such approach.

Let us consider optimization problem on arrangements with linear objective function whose coefficients are determinate values whereas elements of multiset are equivalence classes by the mentioned equivalence (*H*–problems). The algorithm of branch and bound method for solving such problems is substantiated. We propose to branch the common set of arrangements assigning certain possible values for some of the variables. When a singleton is obtained it is checked whether the resulting arrangement belong to the set defined by additional (non–combinatorial) constraints. The way of bound computing is proposed and substantiated. This way uses properties of extremal of linear unconstrained problem of stochastic combinatorial optimization on arrangements. Algorithm of branch and bound method is formulated. Algorithm is illustrated by an example.

We also consider linear unconstrained problems on arrangements when coefficients of objective function are equivalence classes and elements of multiset are determinate values (H_d–problems). The interrelation of H_d–problems and *H*–problems is shown. Based on this interrelation and properties of solution of *H*–problem properties of minimal in a solution of H_d–problem is obtained. Specific of application of branch and bound method for solving H_d–problems is considered. As for *H*–problems we propose depth–first branch. The way of evaluation of subsets is also substantiated.

Key words: Euclidean combinatorial optimization problem, optimization problem on arrangements, stochastic combinatorial optimization, branch and bound method.

ВСТУП

Серед актуальних напрямів сучасної теорії оптимізації можна зазначити дослідження задач комбінаторної природи за різних видів невизначеності: досліджуються загальні питання формалізації оптимізаційних задач з різними видами невизначеності [1, 2], задачі оптимізації на графах з інтервальними параметрами [3], інтервальні моделі задач геометричного проектування, їх відображень в евклідові простори ([4-5] та ін.), евклідові задачі комбінаторної оптимізації на нечітких множинах [6], багатокритеріальні задачі на нечітко заданій комбінаторній множині альтернатив [7].

Один із підходів до формулювання оптимізаційних задач з різними видами невизначеності ґрунтується на введенні відношення порядку на множині відповідних величин: для задач з інтервальною невизначеністю такий підхід розглянуто в [8], для нечітких задач – у [6], для стохастичних задач – у [9].

Для задач з імовірнісною невизначеністю запропоновано два способи упорядкування випадкових величин: перший ґрунтується на порівнянні математичних сподівань, дисперсій та можливих значень і відповідних імовірностей дискретних випадкових величин, другий передбачає порівняння певних числових характеристик випадкових величин. У роботах [9-13] та ін. досліджено властивості зазначених відношень порядку, представлено постановки відповідних оптимізаційних задач, у тому числі з обмеженнями комбінаторного характеру, обґрунтовано властивості і методи розв’язування деяких класів оптимізаційних задач. Зокрема, для розв’язування задач стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, де порядок встановлюється за першим із зазначених вище підходів, обґрунтовано метод гілок і меж [12]. Ця стаття присвячена обґрунтуванню методу гілок і меж для розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, постановка яких здійснюється з використанням порядку на основі порівняння числових характеристик випадкових величин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначатимемо дискретні випадкові величини великими латинськими літерами ($A, B, \ldots$). Нехай Ω – деяка скінченна множина незалежних випадкових величин.

Визначимо для випадкової величини A характеристичний вектор як вектор $H(A) = (h_1(A), h_2(A), \ldots, h_s(A))$, де $h_i(A)$, $i \in J_s$ (тут і далі J_n позначає множину n перших натуральних чисел) – деякі числові характеристики випадкової величини A. Вважатимемо, що характеристичний вектор задовольняє умову

$$h_i(\alpha A + \beta B) = \alpha^{\lambda_i} h_i(A) + \beta^{\lambda_i} h_i(B) \quad \forall i \in J_s, \tag{1}$$

де A, B – незалежні випадкові величин, $\alpha, \beta \in R^1$ – дійсні числа, $\lambda_i \in Z$ – цілі додатні константи.

Зокрема, числовими характеристиками в умові (1) можуть бути математичне сподівання або дисперсія.

Означення 1 [10]. Будемо називати дві випадкові величини $X, Y \in \Omega$ H-еквівалентними тоді і лише тоді, коли $H(X) = H(Y)$.

Відношення, введене означенням 1, є відношенням еквівалентності, клас еквівалентності з представником X називатимемо H-класом і позначатимемо $[X]_H$. Позначатимемо також $H([X]_H)$ характеристичний вектор деякої випадкової величини $X \in [X]_k$ (згідно з означенням 1 ці вектори рівні для всіх представників класу $[X]_H$). Нехай також $<_l$ позначає лексикографічне упорядкування в s-вимірному евклідовому просторі, тобто для будь-яких $u, u' \in R^s$ за означенням вважається $u <_l u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u - u'$ від'ємна. Записуватимемо $u \le_l u'$, якщо $u <_l u'$ або $u = u'$.

Означення 2 [10]. Називатимемо класи $[X]_H, [Y]_H$ упорядкованими за зростанням (позначати $[X]_H \prec [Y]_H$), якщо $H([X]_H) <_l H([Y]_H)$.

Якщо $H([X]_H) \le_l H([Y]_H)$, то класи $[X]_H, [Y]_H$ називатимемо упорядкованими за неспаданням і позначатимемо цей факт $[X]_k \preceq [Y]_k$.

З властивостей відношення лексикографічного порядку випливає, що відношення $\prec$ є відношенням строгого порядку, а відношення $\preceq$ – лінійного порядку.

Використовуючи введений лінійний порядок, упорядкуємо елементи ω фактор-множини за H-еквівалентністю: $[X_1]_H \preceq [X_2]_H \preceq \ldots \preceq [X_m]_H$. Максимумом є клас $[X_m]_H$, а мінімумом – клас $[X_1]_H$. Означення мінімуму й максимуму дає можливість ставити задачі оптимізації для знаходження екстремальних елементів за заданих умов. Називатимемо такі задачі H-задачами стохастичної оптимізації.

Нехай $[X]_H = ([X_1]_H, [X_2]_H, \ldots, [X_k]_H)$. Розглянемо лінійну функцію $\Phi([X]_H) = \sum_{j=1}^{k} c_j [X_j]_H$, де $c_j \in R^1$, $[X_j]_H \in \omega$ $\forall j \in J_k$, операції додавання класів та множення класу на число визначені в [9]. Лінійна H -задача стохастичної оптимізації у деякій області $\Xi \subset \omega^k$ полягає у знаходженні екстремуму й екстремалі функції $\Phi\left(\left[X\right]_H\right)$ за умови $\left[X\right]_H \in \Xi$.

Зокрема, область Ξ може бути евклідовою комбінаторною множиною, наприклад загальною множиною розміщень, в означенні якої слідуємо [14]. Під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G=\left\{g_1,g_2,...,g_\eta\right\}$ можна задати основою $S\left(G\right)$, тобто кортежем усіх її різних елементів і кратністю – числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Кратність елемента $g \in S\left(G\right)$ позначають $k_G\left(g\right)$. Мультимножина B з основою $S\left(B\right)$ називається підмультимножиною мультимножини A з основою $S\left(A\right)$ (позначається $B \subset A$), якщо $S\left(B\right) \subset S\left(A\right)$ і для кожного елемента $a \in S\left(B\right)$ виконується нерівність $k_B\left(a\right) \le k_A\left(a\right)$. Якщо $B \subset A$, то різниця $A-B$ мультимножин A і B містить елементи мультимножини A, причому $\forall a \in S\left(A\right)$ $k_{A-B}\left(a\right)=k_A\left(a\right)-k_B\left(a\right)$ ($k_{A-B}\left(a\right) \ge 0$).

Загальною множиною розміщень $E_\eta^k\left(G\right)$ називають множину всіх упорядкованих k–вибірок з мультимножини $G=\left\{g_1,g_2,...,g_\eta\right\}$ вигляду $\left(g_{i_1},...,g_{i_k}\right)$, де $g_{i_j} \in G$, $i_j \ne i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall j,t \in J_k$. Якщо $k=\eta$, то множина $E_\eta^k\left(G\right)$ є загальною множиною перестановок $E_k\left(G\right)$.

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ H -ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Нехай мультимножина $\Gamma=\left\{\left[G_1\right]_H,\left[G_2\right]_H,...,\left[G_\eta\right]_H\right\}$, де $G_1,G_2,...,G_\eta$ – незалежні випадкові величини, причому $h_1\left(G_i\right) \ge 0$ $\forall i \in J_\eta$; коефіцієнти лінійної функції $\Phi\left(\left[X\right]_H\right)=\sum_{j=1}^{k} c_j\left[X_j\right]_H$ є додатними дійсними числами: $c_j \in R^1$, $c_j>0$ $\forall j \in J_k$.

Розглянемо особливості застосування методу гілок і меж (МГМ) для розв’язування такої H -задачі стохастичної оптимізації на розміщеннях: знайти пару $\left\langle \Phi\left(\left[X^*\right]_H\right),\left[X^*\right]_H \right\rangle$ таку, що

$$\Phi\left(\left[X^*\right]_H\right)=\min_{\left[X\right]_H \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j\left[X_j\right]_H, \quad \left[X^*\right]_H=\arg\min_{\left[X\right]_H \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j\left[X_j\right]_H, \tag{2}$$

за умови

$$\left[X\right]_H=(\left[X_1\right]_H,\left[X_2\right]_H,...,\left[X_k\right]_H) \in \Xi, \tag{3}$$

де $E_\eta^k\left(\Gamma\right)$ – загальна множина розміщень з елементів мультимножини $\Gamma=\left\{\left[G_1\right]_H,\left[G_2\right]_H,...,\left[G_\eta\right]_H\right\}$, Ξ – деяка підмножина множини ω^k. Унаслідок скінченності мультимножини Γ множина значень функції $\Phi\left(\left[X\right]_H\right)$ також є скінченною і на ній може бути визначений мінімум у розглянутому вище розумінні. Оскільки далі мова йтиме лише про H -класи, а не окремі випадкові величини, то позначення класу еквівалентності опускатимемо.

Будемо проводити галуження не допустимої множини $\Xi \cap E_\eta^k\left(\Gamma\right)$, а загальної множини розміщень $E_\eta^k\left(\Gamma\right)$ з наступною перевіркою, чи належить знайдене розміщення множині Ξ. Галуження проводитимемо покомпонентно (тобто «вглиб»), надаючи певне можливе значення змінним X_j. Це означає, що множина $\Theta' \subset E_\eta^k(\Gamma)$, що одержується на деякому рівні галуження в МГМ, визначається такими умовами:

$$X_j = G_{r_j},\ j \in I, \tag{4}$$

де I – деяка множина індексів $I \subset J_k$, $|I| = t$. Говоритимемо при цьому, що у множині Θ' зафіксовані значення змінних X_j, $j \in I$. Змінні, що залишилися невизначеними, позначимо $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_\tau$ ($\tau = k - t$). Позначимо також $\varsigma_B = \left\{c_j \,\middle|\, j \in I\right\}$ – мультимножину коефіцієнтів цільової функції, значення змінних у цільовій функції при яких зафіксовані, $\tilde{\varsigma} = \left\{c_j \,\middle|\, j \notin I\right\}$ – мультимножину коефіцієнтів, значення змінних при яких ще не визначені. Нумерацію змінних $\tilde{X}_i$ ($i \in J_\tau$) зробимо у такий спосіб, щоб елементи мультимножини $\tilde{\zeta} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_\tau\}$ були упорядковані за незростанням: $\tilde{c}_1 \ge \tilde{c}_2 \ge ... \ge \tilde{c}_\tau$. Нехай також $\Gamma_B = \left\{G_{r_j} \,\middle|\, j \in I\right\}$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_B$. Елементи мультимножини $\tilde{\Gamma}$ позначатимемо $\tilde{G}_i$ ($i \in J_p$, $p = |\tilde{\Gamma}| = \eta - t$) і вважатимемо впорядкованими у неспадному порядку: $\tilde{G}_1 \preceq \tilde{G}_2 \preceq ... \preceq \tilde{G}_p$. Розглянемо величину

$$\xi(\Theta') = \sum_{j \in I} c_j G_{r_j} + \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i. \tag{5}$$

Теорема 1. Оцінкою функції $\Phi(X)$ на множині $\Theta' \subset E_\eta^k(\Gamma)$, визначеній згідно з (4), у методі гілок і меж може бути $\xi(\Theta')$ згідно з (5).

Доведення. Як відомо [15], оцінка $\xi(\Theta')$ в методі гілок і меж повинна задовольняти таким умовам:

1) $\xi(\Theta') \preceq \Phi(X)$ для всіх $X \in \Theta'$;

2) $\xi(\Theta') = \Phi(X)$, якщо $\Theta' = \{X\}$;

3) $\xi(\Theta') = \infty$, якщо $\Theta' = \varnothing$.

Для способу упорядкування, що розглядається у цій статті, під записом $\xi(\Theta') = \infty$ розуміємо, що для будь-якого H-класу $A \in \omega$ умова $A \prec \xi(\Theta')$ є істинною.

Оскільки із способу галуження випливає, що одноелементна множина утворюється, коли значення всіх змінних зафіксоване, тобто $I = J_k$, то величина (5) набуває вигляду $\xi(\Theta') = \sum_{j=1}^{k} c_j G_{r_j} = \Phi(X)$. Отже, умова 2) виконується.

Перевіримо виконання умови 1). Очевидно, що для будь-якого $X \in \Theta'$ значення змінних $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_\tau$ утворюють τ-вибірку з мультимножини $\tilde{\Gamma}$, тобто $\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_\tau\right) \in E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$.

Нехай $\tilde{\Phi}(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i$. Оскільки елементи мультимножини $\tilde{\Gamma}$ упорядковані у неспадаючому порядку, то $H(\tilde{G}_1) \le_l H(\tilde{G}_2) \le_l ... \le_l H(\tilde{G}_p)$. Враховуючи також упорядкування в незростаючому порядку коефіцієнтів цільової функції, згідно з теоремою 4 [11] маємо, що розміщення $\tilde{X}^*$, яке задовольняє співвідношенню $\tilde{X}_i^* = \tilde{G}_i \quad \forall i \in J_\tau$, є мінімаллю функції $\tilde{\Phi}(\tilde{X})$ на множині $E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$. Отже, $\tilde{\Phi}(\tilde{X}^*) \preceq \tilde{\Phi}(\tilde{X}) \quad \forall \tilde{X} \in E_p^\tau(\tilde{\Gamma})$.

Оскільки характеристичний вектор задовольняє умову (1), то для будь-якого $X \in \Theta'$ виконуються співвідношення

$$H(\Phi(X)) = H\left(\sum_{j\in I} c_j X_j + \sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i\right) = H\left(\sum_{j\in I} c_j X_j\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{X}_i\right) = H\left(\sum_{j\in I} c_j G_{r_j}\right) +$$
$$+ H\left(\tilde{\Phi}(\tilde{X})\right) \geq_l H\left(\sum_{j\in I} c_j G_{r_j}\right) + H\left(\tilde{\Phi}(\tilde{X}^*)\right) = H\left(\sum_{j\in I} c_j G_{r_j}\right) + H\left(\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i\right) = \xi(Q').$$

Отже, $\xi(\Theta') \preceq \Phi(X)$ для всіх $X \in \Theta'$. Теорему доведено.

Використовуючи теорему 1, сформулюємо алгоритм методу гілок і меж для розв’язування задачі (2)-(3). Як і в багатьох алгоритмах методу гілок і меж, при виборі множини для галуження слідуватимемо правилу найменшої оцінки, хоча такий вибір не гарантує скорочення перебору. Позначатимемо $\Theta_{r_1 r_2 \ldots r_t}$ множину, у якій зафіксовані значення t змінних $X_1, X_2, \ldots, X_t$, причому $r_1, r_2, \ldots, r_t$ – індекси відповідних елементів з мультимножини Γ.

1. Покладаємо $h = 0$, $\Phi^0 = \infty$, $t = 1$.
2. Розбиваємо множину $E_\eta^k(\Gamma)$ на підмножини Θ_{r_t}, що визначені умовою (4), де $I = \{1\}$, G_{r_t} – різні елементи мультимножини Γ. Для кожної із множин Θ_{r_t} знаходимо оцінку (5).
3. Для подальшого галуження обираємо негалужену множину, для якої оцінка передує всім іншим у порядку $\preceq$ (нехай це множина $\Theta_{s_1 \ldots s_t}$).
4. Розгалужуємо $\Theta_{s_1 \ldots s_t}$ на підмножини $\Theta_{s_1 \ldots s_t r_{t+1}}$ ($G_{r_{t+1}}$ – різні елементи мультимножини $\Gamma - \{G_{s_1}, G_{s_2}, \ldots, G_{s_t}\}$), для кожної з яких знаходимо оцінку згідно з (5).
5. Збільшуємо значення t на одиницю. Якщо $t = k$ (у множині $\Theta_{s_1 \ldots s_{k-1} r_k}$ зафіксовано значення всіх змінних, тобто множина є одноелементною), то переходимо до кроку 6, інакше (при $t < k$) – до кроку 8.
6. Для всіх r_k порівнюємо оцінку множини $\Theta_{s_1 \ldots s_{k-1} r_k}$ з Φ^h: якщо $\xi\left(\Theta_{s_1 \ldots s_{k-1} r_k}\right) \prec \Phi^h$ і при цьому $\left(G_{s_1}, G_{s_2}, \ldots, G_{s_{k-1}}, G_{r_k}\right) \in \Xi$, то збільшивши значення h на одиницю, покладаємо $\Phi^h = \xi\left(\Theta_{s_1 \ldots s_{k-1} r_k}\right)$, $X^h = \left(G_{s_1}, G_{s_2}, \ldots, G_{s_{k-1}}, G_{r_k}\right)$.
7. Зменшуємо значення t на одиницю.
8. Якщо залишилися негалужені множини $\Theta_{s_1 \ldots s_{t-1} r_t}$ такі, що $\xi\left(\Theta_{s_1 \ldots s_{t-1} r_t}\right) \prec \Phi^h$, то повертаємося до кроку 3, інакше переходимо до кроку 9.
9. Якщо $t > 1$, то переходимо до кроку 8, інакше розв’язування задачі завершене: якщо $\Phi^h = \infty$, то задача розв’язку не має, інакше $\left\langle \Phi^h, X^h \right\rangle$ – розв’язок.

ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Нехай елементи мультимножини $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ є H-класами незалежних дискретних випадкових величин зі скінченним числом значень. Нехай також характеристичний вектор $H(A) = (h_1(A); h_2(A); h_3(A))$, де $h_1(A)$ – математичне сподівання, $h_2(A)$ – дисперсія випадкової величини A, $h_3(A)$ – її найменше можливе значення. З властивостей математичного сподівання і дисперсії [16] випливає, що $h_1(\alpha A + \beta B) = \alpha h_1(A) + \beta h_1(B)$, $h_2(\alpha A + \beta B) = \alpha^2 h_2(A) + \beta^2 h_2(B)$. Також неважко переконатися, що $h_3(A)$ задовольняє умову (1), де $\lambda_3 = 1$.

Розглянемо розв'язування за допомогою методу гілок і меж задачі (2), де $\Phi(X) = X_1 + 3X_2 + 2X_3$, характеристичні вектори елементів мультимножини мають вигляд $H(G_1) = (6;5;2)$, $H(G_2) = H(G_3) = (7;5;1)$, $H(G_4) = (8;2;3)$, область Ξ визначається умовою $-2X_1 + X_2 + 4X_3 \preceq B$, $H(B) = (24;102;8)$.

Покладаємо $h = 0$, $\Phi^0 = \infty$, $t = 1$, $I = \{1\}$. Розгалужуємо множину $E_4^3(\Gamma)$ згідно з умовою (4): $\Theta_1 = \{X_1 = G_1\}$, $\Theta_2 = \{X_1 = G_2\}$, $\Theta_4 = \{X_1 = G_4\}$ (оскільки $G_2 = G_3$, то множину $\Theta_3 = \{X_1 = G_3\}$ не розглядаємо). Також $\zeta_B = \{1\}$, $\tilde{\zeta} = \{3, 2\}$.

Для $\Theta_1 = \{X_1 = G_1\}$ маємо: $\Gamma_B = \{G_1\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_2, G_3, G_4\}$. У величині (5): перший доданок $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = c_1 G_1 = G_1$, другий – $\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 3G_2 + 2G_3$, тобто $\xi_1 = \xi(\Theta_1) = G_1 + 3G_2 + 2G_3$; $h_1(\xi_1) = h_1(G_1) + 3h_1(G_2) + 2h_1(G_3) = 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 41$, $h_2(\xi_1) = h_2(G_1) + 9h_2(G_2) + 4h_2(G_3) = = 70$, $h_3(\xi_1) = h_3(G_1) + 3h_3(G_2) + 2h_3(G_3) = 7$, тобто $H(\xi_1) = (41;70;7)$. Для $\Theta_2 = \{X_1 = G_2\}$ маємо, що $\Gamma_B = \{G_2\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_1, G_3, G_4\}$, доданки у величині (5): $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = G_2$, $\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 3G_1 + 2G_3$. Тоді $\xi(\Theta_2) = G_2 + 3G_1 + 2G_3$. $H(\xi(\Theta_2)) = (39;70;9)$. Нарешті $\xi(\Theta_4) = G_4 + 3G_1 + 2G_2$, $H(\xi(\Theta_4)) = (40;67;11)$. Оскільки $H(\xi(\Theta_2)) <_l H(\xi(\Theta_4)) <_l$ $<_l H(\xi(\Theta_1))$, тобто $\xi(\Theta_2) \prec \xi(\Theta_4) \prec \xi(\Theta_1)$, то обираємо для галуження підмножину Θ_2.

Розгалужуючи Θ_2, отримаємо підмножини $\Theta_{21} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1\}$, $\Theta_{23} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3\}$, $\Theta_{24} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4\}$. Знаходимо оцінки. Для Θ_{21} маємо $I = \{1,2\}$, $\varsigma_B = \{1,3\}$, $\tilde{\zeta} = \{2\}$, $\Gamma_B = \{G_1, G_2\}$, $\tilde{\Gamma} = \{G_3, G_4\}$, доданки у величині (5): $\sum_{j \in I} c_j G_{r_j} = G_2 + 3G_1$, $\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{c}_i \tilde{G}_i = 2G_3$. Отже, $\xi(\Theta_{21}) = G_2 + 3G_1 + 2G_3$, $H(\xi(\Theta_{21})) = (39;70;9)$. Аналогічно $\xi(\Theta_{23}) = (G_2 + 3G_3) + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{23})) = (40;70;8)$, $\xi(\Theta_{24}) = (G_2 + 3G_4) + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{24})) = = (43;43;14)$.

Покладаємо $t = 2$ і враховуючи, що $t < k$, то переходимо до кроку 8. Унаслідок $\Phi^h = \infty$ переходимо до вибору підмножини для галуження (крок 3). Оскільки $\xi(\Theta_{21}) \prec \xi(\Theta_{23}) \prec \xi(\Theta_{24})$, то виберемо для галуження підмножину $\Theta_{21} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1\}$. Отримаємо множини:

- $\Theta_{213} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_1, X_3 = G_3\}$, $\xi(\Theta_{213}) = G_2 + 3G_1 + 2G_3 = \xi_1$,
- $\Theta_{214} = \{X_1 = G_2, X_1 = G_2, X_3 = G_4\}$, $\xi(\Theta_{214}) = G_2 + 3G_1 + 2G_4$, $H(\xi(\Theta_{214})) = (41;58;13)$.

Оскільки t набуває значення 3 ($t = k$), то переходимо до кроку 6 алгоритму. Оцінка множини Θ_{213} задовольняє співвідношення $\xi(\Theta_{213}) \prec \Phi^0 = \infty$, але $(G_2, G_1, G_3) \notin \Xi$, оскільки $H(-2G_2 + G_1 + 4G_3) = (20;105;4)$, $H(B) <_l (20;105;4)$. Так само для множини Θ_{214} маємо $\xi(\Theta_{214}) \prec \Phi^0 = \infty$, $(G_2, G_1, G_4) \notin \Xi$ ($H(B) <_l H(-2G_2 + G_1 + 4G_3) = (24;57;12)$).

Зменшуємо значення t на одиницю ($t = 2$). Для негалужених множин Θ_{23} і Θ_{24} маємо $\xi(\Theta_{23}) \prec \Phi^h$, $\xi(\Theta_{24}) \prec \Phi^h$, тому переходимо до кроку 3. Для галуження обираємо множину Θ_{23} ($\xi(\Theta_{23}) \prec \xi(\Theta_{24})$). Одержимо:

- $\Theta_{231} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3, X_3 = G_1\}$, $\xi(\Theta_{231}) = G_2 + 3G_3 + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{231})) = (40;70;8)$,
- $\Theta_{234} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_3, X_3 = G_4\}$, $\xi(\Theta_{234}) = G_2 + 3G_3 + 2G_4$, $H(\xi(\Theta_{234})) = (44;58;10)$.

Значення всіх змінних зафіксовані, тому переходимо до кроку 6: оскільки $H(B) <_l H(-2G_2 + G_3 + 4G_1) = (17;105;7)$ і $H(B) <_l H(-2G_2 + G_3 + 4G_4) = (5;57;11)$, то елементи множин Θ_{231} і Θ_{234} не є допустимими розв'язками задачі.

Розгалуження підмножини $\Theta_{24} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4\}$ дає такі результати:

- $\Theta_{241} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4, X_3 = G_1\}$, тоді $H(\xi(\Theta_{241})) = (43;43;14)$,
- $\Theta_{243} = \{X_1 = G_2, X_2 = G_4, X_3 = G_3\}$, тоді $H(\xi(\Theta_{243})) = (45;43;12)$.

При цьому $(G_2, G_4, G_1) \notin \Xi$, а для множини Θ_{243} маємо: $\xi(\Theta_{243}) \prec \Phi^0$, $H(-2G_2 + G_4 + 4G_3) <_l H(B)$. Отже, $h = 1$, $\Phi^1 = \xi(\Theta_{243})$, $X^1 = (G_2, G_4, G_3)$.

При $t = 2$ всі множини розгалужені, тому покладаємо $t = 1$. При $t = 1$ негалуженими є множини Θ_1 і Θ_4, при цьому $\xi(\Theta_4) \prec \xi(\Theta_1) \prec \Phi^1$. Тому розгалужуємо множину Θ_4. Отримаємо:

- $\Theta_{41} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_1\}$, $\xi(\Theta_{41}) = G_4 + 3G_1 + 2G_2$, $H(\xi(\Theta_{41})) = (40;67;11)$,
- $\Theta_{42} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_2\}$, $\xi(\Theta_{42}) = G_4 + 3G_2 + 2G_1$, $H(\xi(\Theta_{42})) = (41;67;10)$.

Оскільки $t = 2 < k$ і $\xi(\Theta_{41}) \prec \xi(\Theta_{42}) \prec \Phi^1$, то знову обираємо множину для галуження. Для множини Θ_{41} отримаємо множину $\Theta_{412} = \{X_1 = G_4, X_2 = G_1, X_3 = G_2\}$, у якій значення всіх змінних зафіксовані. Оскільки $H(\xi(\Theta_{412})) = (40;67;11) <_l H(\Phi^1)$ і при цьому $H(-2G_4 + G_1 + 4G_2) = (18;93;0) <_l H(B)$, то покладаємо $h = 2$, $\Phi^2 = \xi(\Theta_{412})$, $X^2 = (G_4, G_1, G_2)$. Оскільки $\Phi^2 \prec \xi(\Theta_{43})$, то при $t = 2$ не залишилося підмножин множини Θ_4, які потребують галуження. При $t = 1$ для єдиної негалуженої підмножини Θ_1 виконується співвідношення $\Phi^2 \prec \xi(\Theta_1)$, тому розв'язування задачі завершене: розв'язком є пара $\langle \Phi^2, X^2 \rangle$.

ВЛАСТИВОСТІ Й РОЗВ'ЯЗУВАННЯ H_d-ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Разом із задачею (2) розглянемо задачу пошуку пари $\left\langle \Phi_1\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ такої, що

$$\Phi_1\left(x^*\right)=\min_{x\in E_\eta^k(G)}\sum_{j=1}^{k}C_j x_j\ ,\quad x^*=\arg\min_{x\in E_\eta^k(G)}\sum_{j=1}^{k}C_j x_j\ , \tag{6}$$

де, на відміну від задачі (2), коефіцієнти C_j $\forall j\in J_k$ цільової функції $\Phi_1\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k}C_j x_j$ є H–класами. Тут $x=\left(x_1,x_2,...,x_k\right)\in R^k$, а елементи мультимножини $\Gamma=\left\{g_1,g_2,...,g_\eta\right\}$ – детерміновані. Задачі такого вигляду називатимемо H_d–задачами стохастичної комбінаторної оптимізації.

Покажемо, що коли $h_1\left(C_j\right)>0$ $\forall j\in J_k$, а елементи мультимножини Γ є додатними числами, розв'язування задачі (6) можна звести до розв'язування H-задачі вигляду (2) з детермінованими коефіцієнтами цільової функції й елементами мультимножини, що є H–класами. Вважатимемо, що елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням:

$$0<g_1\le g_2\le\ldots\le g_\eta\,. \tag{7}$$

Розглянемо детерміновану задачу пошуку пари $\left\langle \bar\Phi_1\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ такої, що

$$\bar\Phi_1\left(x^*\right)=\min_{x\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}\bar c_j x_j\ ,\quad x^*=\arg\min_{x\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}\bar c_j x_j\ , \tag{8}$$

де $\bar\Phi_1\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k}\bar c_j x_j$, $\bar c_j=h_1\left(C_j\right)$ $\forall j\in J_k$.

Як випливає з леми 1 [17], мініималь функції $\bar\Phi_1\left(x\right)$ на множині $E_\eta^k\left(\Gamma\right)$ є перестановкою елементів мультимножини $\Gamma'=\left\{g_1,g_2,\ldots,g_k\right\}$. Це означає, що для будь-якої точки x, яка не є елементом загальної множини перестановок $E_k\left(\Gamma'\right)$, виконується нерівність $\bar\Phi_1\left(x^*\right)<\bar\Phi_1\left(x\right)$. Оскільки

$$\bar\Phi_1\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k}\bar c_j x_j=\sum_{j=1}^{k}h_1\left(C_j\right)x_j=h_1\left(\sum_{j=1}^{k}C_j x_j\right)=h_1\left(\Phi_1\left(x\right)\right),$$

то з означення 1 отримуємо, що також $\Phi_1\left(x^*\right)\prec\Phi_1\left(x\right)$ $\forall x\notin E_k\left(\Gamma'\right)$.

Отже, мінімаль у розв'язку задачі (6) також є перестановкою елементів мультимножини Γ', тобто мінімум цільової функції $\Phi_1^*=\sum_{j=1}^{k}C_j g_{i_j}$, де $g_{i_j}\in\Gamma'$, $i_j\ne i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_k$, $\forall j,t\in J_k$. Тоді задачу (6) можна розглядати як задачу пошуку пари $\left\langle\varphi\left(Y^*\right),Y^*\right\rangle$ такої, що

$$\varphi\left(Y^*\right)=\min_{Y\in E_k(\Psi)}\sum_{j=1}^{k}g_j Y_j\ ,\ Y^*=\arg\min_{Y\in E_k(\Psi)}\sum_{j=1}^{k}g_j Y_j\ , \tag{9}$$

де $\varphi(Y)=\sum_{j=1}^{k} g_j Y_j$, мультимножина $\Psi=\{C_1,C_2,...,C_k\}$. Вважатимемо, що елементи мультимножини Ψ пронумеровані так, що задовольняють умову

$$H(C_1)\geq_l H(C_2)\geq_l ...\geq_l H(C_k). \tag{10}$$

Упорядкування елементів множин Γ' і Ψ можна записати у вигляді $g_{p_1}\geq g_{p_2}\geq\ldots\geq g_{p_k}$ і $H(C_{p_1})\leq_l H(C_{p_2})\leq_l ...\leq_l H(C_{p_k})$, де $p_j=k-j+1$ $\forall j\in J_k$. Тоді згідно з теоремою 4 [13] розміщення, яке задовольняє умови $Y^*_{p_j}=C_{p_j}$ $\forall j\in J_k$ (або, що те саме, $Y^*_j=C_j$ $\forall j\in J_k$), є мінімаллю в розв'язку задачі (9).

Таким чином, $\sum_{j=1}^{k} g_j Y_j \preceq \sum_{j=1}^{k} g_j C_j$ для будь-якої перестановки елементів мультимножини $\Psi=\{C_1,C_2,...,C_k\}$. А тоді також $\sum_{j=1}^{k} C_j x_j \preceq \sum_{j=1}^{k} g_j C_j$ для будь-якої перестановки елементів мультимножини $\Gamma'=\{g_1,g_2,\ldots,g_k\}$, тобто $x^*=(g_1,g_2,\ldots,g_k)$ є мінімаллю в розв'язку задачі (6). Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2. Якщо для коефіцієнтів цільової функції та елементів мультимножини в задачі (6) виконуються умови (7) і (10) відповідно, то точка x^*, яка задовольняє умови $x^*_j=g_j$ $\forall j\in J_k$, є мінімаллю у розв'язку задачі (6).

Розглянемо особливості застосування МГМ для розв'язування такої H_d-задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях: знайти пару (6) таку, що

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\Xi\subset R^k. \tag{11}$$

Як і для H-задач оптимізації, використовуватимемо покомпонентний спосіб галуження: множина $\Theta'\in E^k_\eta(\Gamma)$ визначається умовами

$$x_j=g_{r_j},\ j\in I. \tag{12}$$

Розглянемо величину

$$\xi(\Theta')=\sum_{j\in I} C_j g_{r_j}+\sum_{i=1}^{\tau}\tilde{C}_i\tilde{g}_i, \tag{13}$$

де позначення аналогічні до тих, що використовувалися в МГМ розв'язування H-задачі. Враховуючи спосіб упорядкування елементів мультимножин $\tilde{\zeta}$ і $\tilde{\Gamma}$, на основі теореми 2 отримуємо, що точка x^*, яка задовольняє умовам $x^*_j=g_j$ $\forall j\in J_k$, є мінімаллю функції $\tilde{\Phi}_1(x)=\sum_{i=1}^{\tau}\tilde{C}_i x_i$ на множині $E^\tau_p(\tilde{\Gamma})$. Тому $\tilde{\Phi}_1(\tilde{x}^*)\preceq\tilde{\Phi}_1(\tilde{x})$ $\forall\tilde{x}\in E^\tau_p(\tilde{\Gamma})$. Далі аналогічно до доведення теореми 1 одержуємо, що $\xi(\Theta')\preceq\Phi_1(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. Оцінкою функції $\Phi_1(x)$ на множині $\Theta'\subset E^k_\eta(\Gamma)$, визначеній згідно з (12), у методі гілок і меж може бути $\xi(\Theta')$ згідно з (13).

Для розв'язування H_d-задач (6), (11), де $h_1(C_j)>0$ $\forall j\in J_k$, а елементи мультимножини Γ є додатними числами, може використовуватися запропонований вище алгоритм методу гілок і меж.

ВИСНОВКИ

У статті досліджуються задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Постановка задач здійснена на основі введення відношення порядку на фактор-множині, що утворюється при розбитті заданої множини незалежних випадкових величин на основі порівняння їх числових характеристик. Обґрунтовано спосіб обчислення оцінки в методі гілок і меж, якщо цільова функція є лінійною, причому коефіцієнти цільової функції або невідомі (але не те й інше одночасно) або є відповідними класами еквівалентності. Запропоновано алгоритм методу гілок і меж для розв'язування таких задач. Як перспективний напрямок подальших досліджень вбачається удосконалення процедури оцінювання множин й обґрунтування інших правил їх відсікання в рамках розв'язування методом гілок і меж таких задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гуляницький Л. Ф., Рясна І. І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень: зб. наук. праць*. 2016. С. 17–25.

2. Емец О. А., Роскладка А. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 5. С.35–44.

3. Перепелица В. А., Тебуева Ф. Б. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных. Москва: Академия Естествознания, 2007. 151 с.

4. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников. *Доклады НАН Украины*. 1998. № 9. С. 114–120.

5. Гребенник И. В., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б. Интервальное оценивание альтернатив при принятии решений в геометрическом проектировании. *Бионика интеллекта. Информация. Язык. Интеллект: научно-технический журнал*. 2008. № 2(69). С. 56–60.

6. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.

7. Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 2. С. 88–99.

8. Сергиенко И. В., Емец О. А., Емец А. О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 38–50.

9. Емец О. А., Барболина Т. Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью. *Доповіді НАН України*. 2014. № 11. С. 40–45.

10. Барболина Т. Н. О подходе к оптимизации с вероятностной неопределенностью с использованием упорядочивания случайных величин. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 11–20.

11. Емец О. А., Барболина Т. Н. О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 2. С. 127–139.

12. Ємець О. О., Барболіна Т. Н. Лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв'язання. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. №1. С. 107–119.

13. Емец О. А., Барболина Т. Н. Решение линейных безусловных задач комбинаторной оптимизации на размещениях со стохастической неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 3. С. 141–153.

14. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.

15. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.

16. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей: учебник. 8-е изд., испр. и доп. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.

17. Емец О. А., Барболина Т. Н. Свойства комбинаторных оптимизационных безусловных задач на размещениях с линейной и дробно-линейной целевыми функциями. *Проблемы управления и информатики*. 2017. № 1. С. 66–76.

REFERENCE

1. Hulianytskyi, L. F. & Riasna, I. I. (2016). On formalization of combinatorial optimization problems on fuzzy sets. Teoriia optymalnykh rishen, pp. 17-25.

2. Yemets, O. A. & Roskladka, A. A. (2008). Combinatorial optimization under uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 44, Iss. 5, pp. 655-663.

3. Perepelitsa, V. A. & Tebuieva, F. B. (2007). Discrete optimization and modeling under uncertainty of data. Moscow: Akademiia Yestestvoznaniia.

4. Stoyan, Yu. G., Romanova, T. Ye. & Sysoeva, Yu. A. (1998). Optimization promlem of placement of regular interval polygons. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Iss. 9, pp. 114-120.

5. Grebennik, I. V., Romanova, T. E & Shekhovtsov, S. B. (2008). Interval estimation of alternatives in decision making in geometric design. Bionica Intellecta. Informatciia. Yazyk. Intellekt: scientific and technical journal, Iss. 2, pp. 56-60.

6. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2011). Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets. Poltava: PUET.

7. Semenova, N. V., Kolechkina, L. N. & Nagirna, A. M. (2011). Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 47, Iss. 2, pp. 250-259.

8. Sergienko, I. V., Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2013). Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 49, Iss. 5, pp. 673-683.

9. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). About optimization problems with probabilistic uncertainty. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Iss. 11, pp. 40-45.

10. Barbolina, T. M. (2016). About approach to optimization with probabilistic uncertainty using ordering of random variables. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences, No. 1, pp. 11-20.

11. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 52, Iss. 2, pp. 285-295.

12. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Linear optimization problems on permutations under probabilistic uncertainty: properties and solution. System research and information technologies, Iss. 1, pp. 107-119.

13. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Solving Linear Unconstrained Problems of Combinatorial Optimization on Arrangements Under Stochastic Uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 52, Iss. 3, pp. 457-466.

14. Stoyan, Yu. G. & Iemets, O. O. (1993). Theory and methods of euclidian combinatorial optimization. Kyiv: Instytut systemnykh doslidzhen osvity.

15. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). Models and methods of solving combinatorial optimization problems by computers. Kyiv: Naukova dumka.

16. Gnedenko, B. V. (2005). Course in probability theory. Moscow: Editorial URSS.

17. Iemets, O. A. & Barbolina, T. M. (2017). Properties of Combinatorial Optimization Unconstrained Problems on Arrangements with Linear and Linear–Fractional Objective Functions. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 49, Iss. 1, pp. 41-52.