

4. Rvachev, V. L., Tolok, A. V., Uvarov, R. A. & Sheyko, T. Y. (2000). New approaches to the construction of equations of three-dimensional loci using R-functions. Visnyk Zaporiz'koho Derzhavnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 119-131.
5. Tolok, A. V., Tolok, V. A. & Gomenyuk, S. I. (1999). A language for describing schemes for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. Proceedings off the XXVI Mezhdunarodnaya konferentsiya i diskussionnyy nauchnyy klub IT+SE'99 "Novyye informatsionnyye tekhnologii v nauke, obrazovanii i biznese", (pp. 43-46). Yalta-Gurzuf.
6. Tolok, A. V., Myl'tsev, A. M. & Korohod, V. L. (2006). Analytical modeling based on graphic transformations in the RANOK system. Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky, No.1, pp. 124-133.
7. Korohod, V. L., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2003). Mathematical model for refining a three-dimensional data array using spatial interpolation. Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky. Biolohichni nauky, No. 1, pp. 42-48.
8. Morozov, D. N., Gnezdovskiy, A. V., Myl'tsev, A. M., & Tolok, A. V. (2010). Cognitive computer graphics in the process of solving optimization problems of mathematical modeling. Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika, Issue 86, pp. 112-117.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-10

ПРО ОДИН СПОСІБ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТІВ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК

Михайл О. В., Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

loboda@dnu.dp.ua

Запропонована методика визначення степені особливості напружень в околі кутових точок біматеріальних тіл, яка оснований на методі скінченних елементів. Для конкретної області, яка являє собою два спаяні різнорідні прямокутники різної ширини, побудована скінченно-елементна сітка, що має суттєве згущення при підході до кутової точки. Реалізація методу скінченних елементів на такій сітці показує значний ріст напружень в околі кутової точки. Використовуючи відому формулу, що визначає поведінку напружень у вказаній області, а також результати скінченно-елементного аналізу, визначено ступінь особливості напружень, а також коефіцієнт при цій особливості, що може розглядатись як узагальнення коефіцієнту інтенсивності напружень на випадок особливості, відмінної від кореневої. Реалізація методики проведена на прикладах однорідної області та для випадку, коли модулі пружності матеріалів підобластей відрізняються у дев'ять разів. Продемонстровано поведінку нормального та дотичного контактних напружень для обох випадків та проведено їх порівняння.

Розглянута також близька по суті задача, яка виходить, коли нижній прямокутник замінити нескінченною половою, а верхній півполовою. У цьому випадку для розв'язку використано аналітичний метод, що базується на застосуванні інтегральних перетворень Фур'є. У результаті їх використання проблема зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь на проміжку, що співпадає із зоною контакту, яка включає рухомі та нерухомі особливості в ядрі. Методом механічних квадратур, що базується на використанні многочленів Якобі, побудовано наближений розв'язок цієї системи і на його основі визначено контактні напруження та їх ступінь особливості при підході до кутових точок. Проведено порівняння результатів, отриманих методом скінченних елементів та шляхом аналітичного аналізу і встановлено їх хорошу узгодженість.

Ключові слова: біматеріал, кутова точка, плоска задача, метод скінченних елементів.

ON THE METHOD OF ANALYSIS OF STRESS STATE OF COMPOSITES IN THE VICINITY OF THE CORNER POINTS

Mykhail O. V., Loboda V. V.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Gagarin ave., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

loboda@dnu.dp.ua

The methodology of the stresses power singularity determination at the vicinity of angular points of bimaterial bodies, which is based on the finite element approach is proposed. For a specific region, which is composed of two welded heterogeneous rectangle of different widths, a finite-element mesh is constructed that has a significant condensation when approaching an angle point. The implementation of the finite element method on such a grid shows a significant increase in the stresses at the vicinity of the angular point. Using the well-known formula that determines the behavior of stresses in the specified region, as well as the results of finite element analysis, the power of singularity of stresses is determined, as well as the coefficient before this singularity, which can be considered as a generalization of the stress intensity factor for the case of a singularity other than the root one. The implementation of the methodology is carried out on the examples of a homogeneous region, and for the case of the elastic modulus of the sub-areas materials differ nine times. The behavior of normal and tactical contact stresses for both cases is demonstrated and their comparison is demonstrated.

The similar problem that occurs when the lower rectangle is replaced by an infinite strip and the upper one by the half-strip is also considered. In this case, an analytical method based on the application of Fourier integral transformations is used for the solution. As a result of their use, the problem is reduced to a system of singular integral equations over an interval that coincides with the contact area, which includes moving and motionless singularities in the kernel of the equations. With use of the method of mechanical quadratures, which is based on the use of the Jacobi polynomials, an approximate solution of this system is constructed, and on the basis of it the contact stresses and their power of singularities at the corner points are determined. Comparison of the results obtained by the finite element method and by analytical analysis is made and their good agreement is revealed.

Key words: bimaterial, angular point, plane problem, finite element method.

ВСТУП

Дослідження біматеріальних тіл, у зоні стику яких присутні кутові точки, є дуже важливим для практики, тому що кутові точки, зазвичай, є головною причиною руйнування конструкцій. Дослідженню пружно-деформівного стану в околі кутових точок присвячена велика кількість робіт, але піонерською в цьому напрямі є робота [1], у якій досліджено характер сингулярності напружень в околі біматеріального кута. Дуже розповсюдженими є кутові точки, які утворюються на стику двох прямокутників різної ширини або прямокутника чи півполоси з половою. Такі задачі досліджувались чисельно-аналітичним методом у роботах [2, 3, 5]. У цих роботах, як правило, одна із підобластей є нескінченною по одній з координат або напівнескінченною. Якщо ж обидві підобласті, що контактують, є скінченними, то аналітичний аналіз провести практично неможливо і треба використовувати чисельні підходи.

У даній роботі пропонується методика, основана на методі скінченних елементів, за допомогою якої є можливість визначити не тільки польові характеристики напружень, деформацій та переміщень, а і степені особливості напружень та похідних від переміщень в околі кутових точок на стику однакових або різних матеріалів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Розглядається плоска задача для біматеріального тіла, яке утворене в результаті зчеплення ізотропних прямокутника $|x_1| \leq h$, $0 < x_2 < c$ (верхній) з механічними характеристиками E_1 , ν_1 і прямокутника $|x_1| < d$, $-b < x_2 < 0$ (нижній) з механічними характеристиками E_2 , ν_2 (рис. 1). Сторона $x_2 = -b$ нижнього прямокутника жорстко закріплена, а на сторону $x_2 = c$ верхнього діє рівномірно розподілене розтягувальне напруження інтенсивності P .

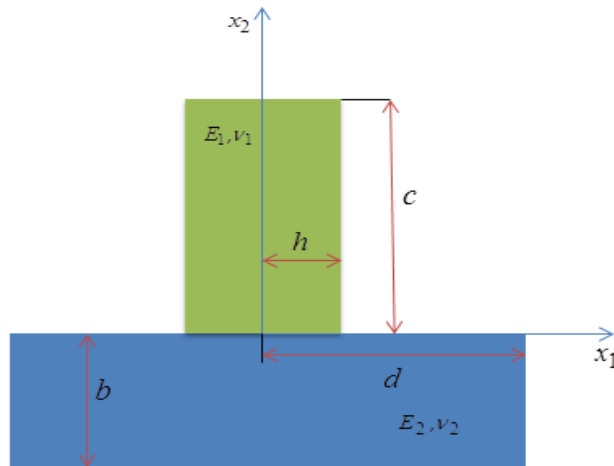


Рис. 1

Розв’язок задачі будувався методом скінченних елементів. Вибирались наступні геометричні характеристики областей: $h = 15$ мм, $c = 20$ мм, $d = 30$ мм, $b = 20$ мм. З урахуванням симетрії відносно осі x_2 , розбиття правої частини біматеріального тіла на скінченні елементи показано на рис. 2.

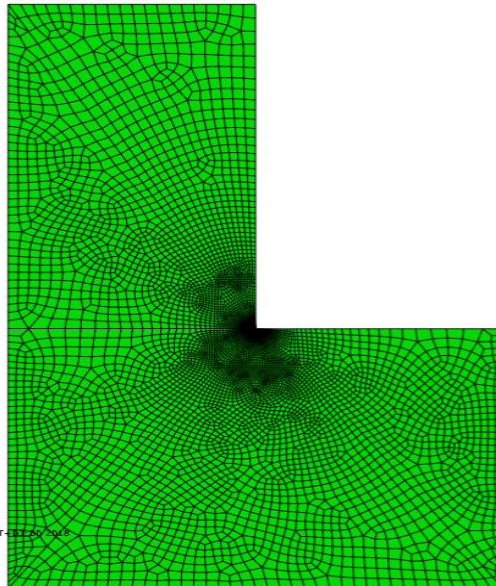


Рис. 2

Багатократне згущення сітки мало місце біля кутової точки, де напруження мають степеневу особливість [1]. Локальні фрагменти сітки в околі кутової точки наведені на рисунках 3 і 4.

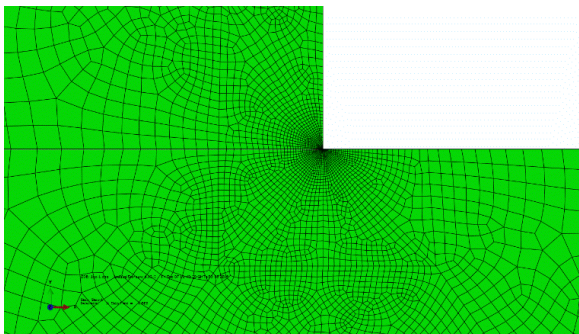


Рис. 3. Перший рівень згущення сітки

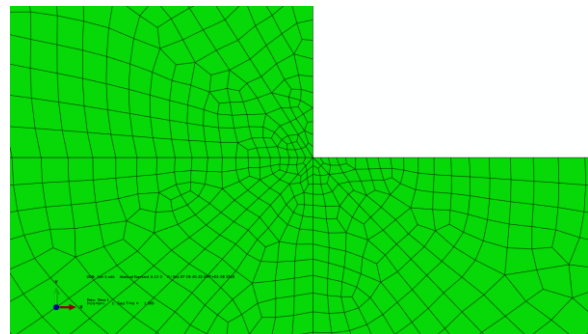


Рис. 4. Безпосередній окіл кутової точки

Для досягнення мети даної роботи характерний розмір скінченного елемента, що прилягає до кутової точки, складав $8,133 \times 10^{-5}$ від максимального розміру області.

Деякі результати розрахунків показані на наступних рисунках. Зокрема, на рисунку 5 показаний розподіл нормального напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ вздовж правої половини області контакту, а на рисунку 6 – розподіл $\sigma_{12}(x_1, 0)$ вздовж цієї ж частини області контакту (криві I). Ці рисунки побудовані для випадку однакових матеріалів верхнього і нижнього прямокутників з $E_1 = E_2 = 1 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ при $P = 1000$ Па.

З рисунків 5 і 6 видно, що напруження різко зростають при наближенні до кутової точки. Це не дивно, тому що в даній точці напруження мають степеневу особливість, тобто ведуть себе як

$$\sigma_{11}(0, x_2) \Big|_{x_2 \rightarrow h} \rightarrow \frac{K_1}{(h - x_2)^\alpha}, \quad (1)$$

де K_1 і α – коефіцієнт при особливості та степінь особливості відповідно.

У даній роботі пропонується спосіб визначення степеня цієї особливості і коефіцієнта при ній, який можна розглядати як узагальнення поняття коефіцієнта інтенсивності напружень, який є характерним для сингулярних точок зі степенем особливості 0,5. Для визначення цих величин побудовано графік зміни нормального напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ в безпосередній близькості до кутової точки, а саме на проміжку (14,557 мм, 14,9952 мм). Цей графік наведено на рис. 7 (крива I). Для порівняння на цьому ж рисунку наведено аналогічний графік для випадку наступних механічних характеристик прямокутників: $E_1 = 1 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 9 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,3$ (крива II). Навіть із простого порівняння графіків видно, що степінь особливості у випадку однакових матеріалів вища, ніж для випадку більш жорсткого нижнього матеріалу.

$\sigma_{22}(x_1, 0)$

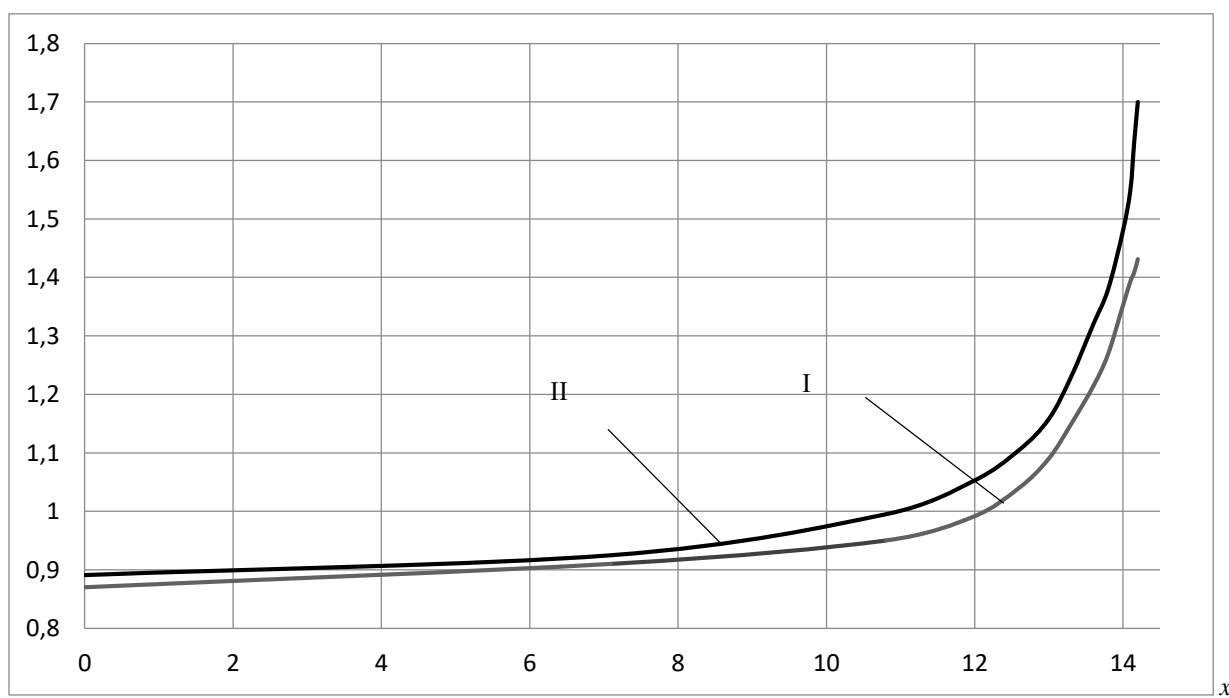


Рис. 5

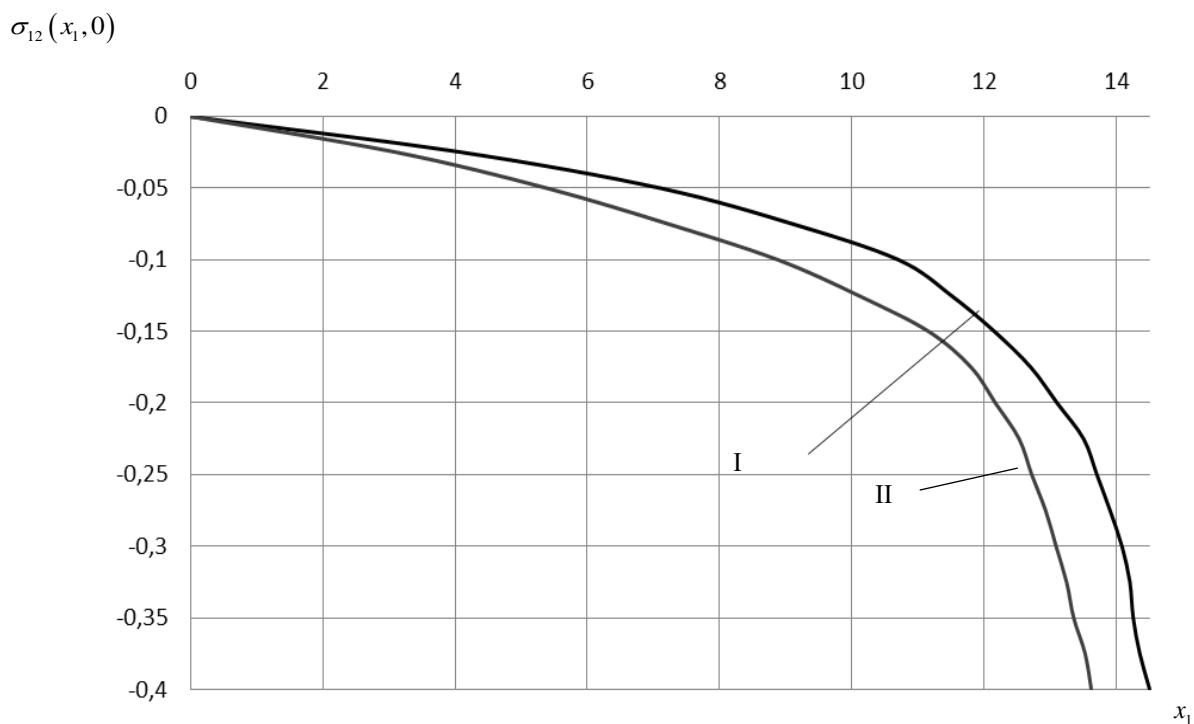


Рис. 6

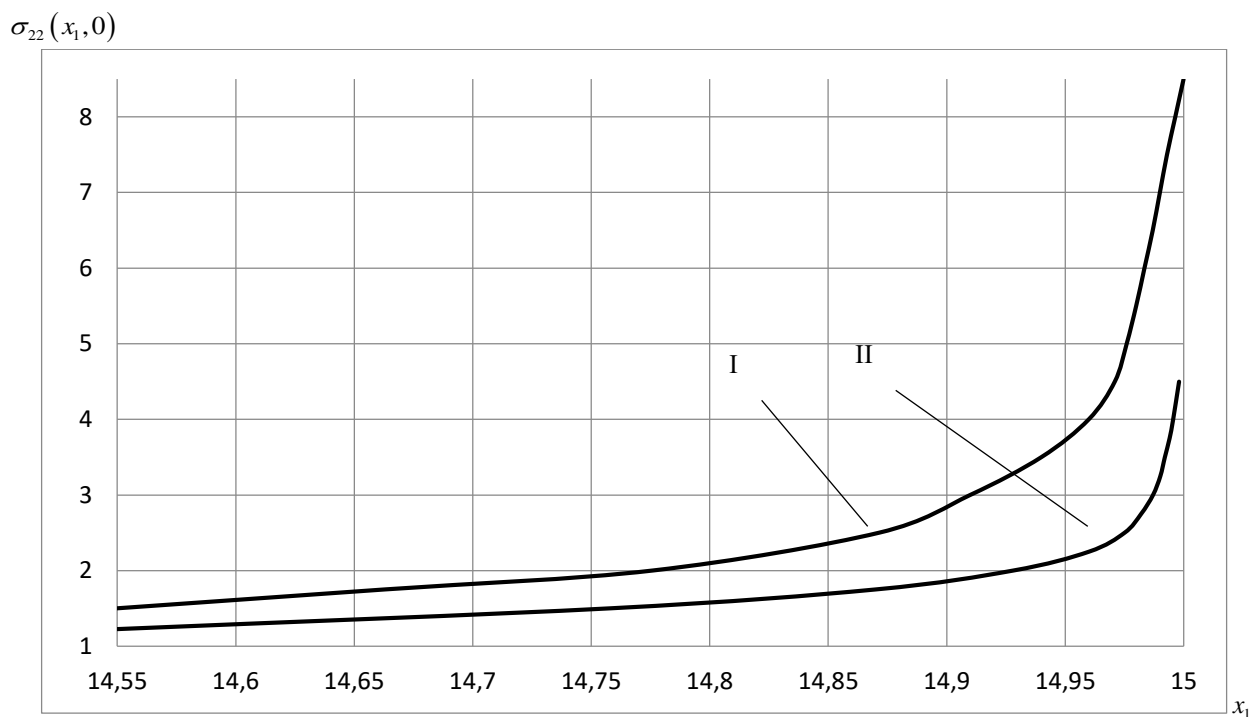


Рис. 7

ЗНАХОДЖЕННЯ СТЕПЕНІ ОСОБЛИВОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК

Конкретно спосіб визначення степені особливості напружень біля кутової точки полягає у наступному. Вибираються дві точки $x_2^{(1)}$ та $x_2^{(2)}$ на деякому віддаленні від кутової точки і обчислюється

$$\sigma_{11}(0, x_2^{(1)}) = S_1, \quad \sigma_{11}(0, x_2^{(2)}) = S_2.$$

Тоді, позначаючи $x_2^{(1)} = r_1$, $x_2^{(2)} = r_2$, із формули (1) маємо

$$S_1 = \frac{K_1}{(h-r_1)^\alpha}, \quad S_2 = \frac{K_1}{(h-r_2)^\alpha}.$$

Або

$$K_1 = S_1 (h-r_1)^\alpha, \quad K_1 = S_2 (h-r_2)^\alpha. \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини останніх рівностей, одержуємо $S_1 (h-r_1)^\alpha = S_2 (h-r_2)^\alpha$. Це співвідношення запишемо у вигляді

$$\left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right)^\alpha = \frac{S_1}{S_2},$$

що після логарифмування дає

$$\alpha \ln \left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right) = \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right).$$

З останнього рівняння одержуємо наступну формулу для визначення степені особливості

$$\alpha = \ln \left(\frac{S_1}{S_2} \right) / \ln \left(\frac{h-r_1}{h-r_2} \right). \quad (3)$$

Коефіцієнт при особливості (коефіцієнт інтенсивності) напружень може бути визначено по одній із формул (2).

Далі наведено деякі результати розрахунку степені особливості та КІН. Зокрема, для вищезгаданого однорідного матеріалу вибирались точки $r_1 = 14,5557$ та $r_2 = 14,5557$ і обчислювались $S_1 = 1599,93$ та $S_2 = 6928,97$. Підставляючи ці значення у формули (3) та (2), отримуємо $\alpha = 0,4487$, $K_1 = 1008,23 \text{ Н/м}^{3/2}$. Аналогічним чином, вибираючи для неоднорідного матеріалу $r_1 = 14,5458$ та $r_2 = 14,9831$ і обчислюючи $S_1 = 1401,87$ та $S_2 = 3701,59$, одержуємо $\alpha = 0,3516$, $K_1 = 1110,69 \text{ Н/м}^{3/2}$.

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ ТА ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо тепер близьку задачу аналітичним методом.

Використаємо рівняння рівноваги плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях

$$\left(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)} \right) \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial x_j} + \mu^{(i)} \Delta u_j^{(i)} = 0 \quad (j=1,2), \quad (4)$$

де

$$\theta^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_2}, \quad \lambda^{(i)} = \frac{(1-\nu_i)E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad \mu^{(i)} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}.$$

Введемо невідомі функції

$$q_1(x_1) = \sigma_{12}^{(1)}(0, x_1) = \sigma_{12}^{(2)}(0, x_1), \quad q_2(0, x_1) = \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1}(0, x_1) = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) \quad (|x_1| \leq h). \quad (5)$$

Застосовуючи метод інтегральних перетворень і вводячи, крім цих невідомих функцій, також функцію

$$q_3(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = \sigma_{22}^{(2)}(0, x_1) \quad (|x_1| \leq h),$$

знайдемо окремо розв'язки задач для смуги і півсмуги.

Розв'язок рівнянь (5) для смуги ($i = 2$) при граничних умовах (1) та умовах

$$\sigma_{2i}^{(2)}(0, x_1) = \begin{cases} q_{2i-1}(x_1), & |x_1| \leq h; \\ 0, & |x_1| > h \end{cases} \quad (6)$$

отримано шляхом застосування комплексного перетворення Фур'є по координаті x_2 . Необхідні надалі похідні від переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) &= \pi \chi_{21}^0 q_3(x_1) + \chi_{22}^0 \int_{-h}^h \frac{q_1(y)}{y-x_1} dy + \sum_{j=1-h}^2 \int_{-h}^h q_{5-2j}(y) \psi_{2j}^0(x_1, y) dy, \\ \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}(0, x_1) &= \chi_{11}^0 \int_{-h}^h \frac{q_3(y)}{y-x_1} dy - \pi \chi_{12}^0 q_1(x_1) + \sum_{j=1-h}^2 \int_{-h}^h q_{5-2j}(y) \psi_{1j}^0(x_2, y) dy, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\chi_{ii}^0 = \chi_i, \quad \chi_{ij}^0 = \chi_j \quad (j \neq i),$$

$$\chi_1 = 2\chi_3(1-\nu^{(2)}), \quad \chi_2 = \chi_3(1-2\nu^{(2)}), \quad \chi_3 = \frac{1+\nu^{(2)}}{\pi E^{(2)}},$$

$$\psi_{ii}^0(x_2, y) = \chi_i \int_0^\infty (p\gamma_{1p} - 1) \sin p(y-x_2) dp,$$

$$\psi_{21}^0(x_2, y) = -\psi_{12}^0(x_2, y) = \chi_2 \int_0^\infty (p\gamma_{2p} - 1) \cos p(y-x_2) dp,$$

$$\gamma_{1p} = \frac{(2\chi' sh 2p_1 - 4p_1)}{pD_p}, \quad \gamma_{2p} = \frac{\left[\frac{2\chi' ch 2p_1 - 4p_1^2}{(1-2\nu^{(2)})} - 2\chi' \right]}{pD_p},$$

$$D_p = 2\chi' ch 2p_1 + 4p_1^2 + \chi'^2 + 1, \quad \chi' = 3 - 4\nu^{(2)}, \quad p_1 = pb_0.$$

При отриманні співвідношень (7) враховані формули

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h q_{2i-1}(y) dy \int_0^\infty \sin p(y-x_1) dp &= \int_{-h}^h \frac{q_{2i-1}(y)}{y-x_1} dy, \\ \int_{-h}^h q_{2i-1}(y) dy \int_0^\infty \cos p(y-x_1) dp &= \pi q_{2i-1}(x_1), \end{aligned}$$

які витікають з характеристик інтегральних перетворень Фур'є.

Для розв'язання задачі для півсмуги проводиться заміна $\sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = \tilde{\sigma}_{22}^{(1)}(0, x_1) + \sigma_0$. Тоді для додаткового напруженого стану маємо однорідні граничні умови на нескінченності. Застосовуючи для знаходження цього стану інтегральні перетворення Фур'є і методику роботи [2] та повертаючись до основних невідомих, одержуємо вирази для $u_1^{(1)'}(0, x_1)$, $\sigma_{22}^{(1)}(0, x_1)$ у вигляді:

$$u_1^{(1)'}(0, x_1) = \Gamma_1^0(x_1), \quad \sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = -2\mu^{(1)}\Gamma_2^0(x_1), \quad (8)$$

$$2\pi\Gamma_i^0(x_1) = \sum_{j=1}^2 \eta_{ij}^0 \int_{-h}^h \frac{q_j(y)}{x_1 - y} dy + \Omega_i^0(x_1), \quad (9)$$

а η_{ij}^0 і $\Omega_i^0(x_1)$ визначаються формулами

$$\eta_{11}^0 = -\chi e_3, \quad \eta_{12}^0 = -e_2 e_4, \quad \eta_{21}^0 = -e_2 e_3, \quad \eta_{11}^0 = e_4,$$

$$e_1 = 1 - \nu^{(1)}, \quad e_2 = 1 - 2\nu^{(1)}, \quad \chi = 3 - 4\nu^{(1)}, \quad e_3 = -(2\mu^{(1)} e_1)^{-1}, \quad e_4 = \frac{1}{e_1},$$

$$\Omega_i^0(x_1) = \int_{-h}^h [\tilde{M}_1(x_1, y, \beta_i) q_1(y) + \tilde{M}_2(x_1, y, \beta_i) q_2(y)] dy + \tilde{Q}_i. \quad (10)$$

Ядра $\tilde{M}_j(x_1, y, \beta_i)$ ($\beta_1 = \nu^{(1)}$, $\beta_2 = 1$) в даному випадку мають наступний вигляд:

$$\tilde{M}_i(x_1, y, \beta_i) = e_{i+2} \int_0^\infty \Delta_i^{-1} M_i^*(x_1, y, t, \beta) dt,$$

$$M_i^*(x_1, y, t, \beta) = [f_{i1}(y, t, \beta) \chi_3(tx_1) + f_{i2}(y, t, \beta) tx_1 \chi_4(tx_1)] \exp[-(h-y)t]; \quad (11)$$

$$f_{11}(y, t, \beta) = [2e_1 + (h-y)t] [th\chi_3(th) + \chi_4(th)] + [e_2 + (h-y)t] th\chi_4(th) -$$

$$-2\beta \{ [2e_1 + (h-y)t] \chi_4(th) + [e_2 + (h-y)t] \chi_3(th) \},$$

$$f_{12}(y, t, \beta) = -[2(1-\nu^{(1)}) + (h-y)t] \chi_4(th) - [e_2 + (h-y)t] \chi_3(th),$$

$$f_{21}(y, t, \beta) = [th\chi_3(th) + (1-2\beta)\chi_4(th)] t(h-y) - [th\chi_4(th) 2\beta\chi_3(th)] [1-t(h-y)] \chi_3(th),$$

$$f_{22}(y, t, \beta) = [1-t(h-y)] \chi_3(th) - t(h-y) \chi_4(th), \quad (12)$$

$$\Delta_i = 0,5sh(2th) + rth,$$

а $\tilde{Q}_1 = 0$, $\tilde{Q}_2 = \sigma_0$.

Функції $\Delta_i^{-1} M_i^*(x_2, y, t, \beta)$ і $\Delta_i^{-1} Q^*(x_2, t, \beta)$ при $t \rightarrow 0$ мають особливості, характер яких описаний у роботі [3]. Тому застосовуючи для усунення цієї особливості методику роботи [3], отримуємо

$$\Omega_i^0(x_2) = \int_{-h}^h [M_1(x_2, y, \beta_i) q_1(y) + M_2(x_2, y, \beta_i) q_2(y)] dy + \tilde{Q}_i, \quad (13)$$

де

$$M_i(x_1, y, \beta_i) = e_{i+2} \left[\int_0^\infty \Delta_i^{-1} M_i^*(x_1, y, t, \beta) - M_i^{**}(x_1, y, t, \beta) \right] dt, \quad (14)$$

$$M_1^{**}(x_1, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} e_2 \\ \left[2(2\beta\nu^{(1)} - \beta - \nu^{(1)})(1+ty) + ty \right] tx_1 \end{array} \right\}, \quad (15)$$

$$M_1^{**}(x_1, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta \\ 2x_1 y \beta t^2 \end{array} \right\}.$$

Із (3), (4) витікає, що у зоні контакту повинні виконуватися умови

$$u_2^{(1)}(0, x_1) = u_2^{(2)}(0, x_1), \quad \sigma_{22}^{(1)}(0, x_1) = q_3(x_1), \quad \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}(0, x_1) = q_2(x_1) \quad \text{при } (|x_2| \leq h). \quad (16)$$

Підставляючи співвідношення (7)-(9) у (18), отримуємо наступну систему:

$$\sum_{n=1}^3 \left\{ \int_{-h}^h \left[\frac{a_{mn}}{x_1 - y} + D_{mn}(x_1, y) \right] q_n(y) dy + \pi \theta_{mn}^0 q_n(x_1) \right\} = B_m, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} |x_1| \leq h, \quad a_{ij} &= \eta_{ij}^0 + 2\pi \delta_i^1 \delta_j^1 \chi_1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0, \\ D_{ij}(x_1, y) &= M_j(x_1, y, \beta_i) - 2\pi \delta_i^1 \delta_j^1 \psi_{22}^0(x_1, y), \quad D_{13}(x_1, y) = -2\pi \psi_{21}^0(x_1, y), \quad D_{23}(x_1, y) = 0, \\ D_{31}(x_1, y) &= -\frac{\psi_{12}^0(x_1, y)}{\chi_1}, \quad D_{32}(x_1, y) = 0, \quad D_{33}(x_2, y) = -\frac{\psi_{11}^0(x_1, y)}{\chi_1}, \\ \theta_{13}^0 &= -2\pi \chi_2, \quad \theta_{23}^0 = \frac{1}{\mu^{(1)}}, \quad \theta_{31}^0 = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad \theta_{32}^0 = \frac{1}{\chi_1}, \quad \theta_{11}^0 = \theta_{12}^0 = \theta_{21}^0 = \theta_{22}^0 = \theta_{33}^0 = 0, \\ B_i &= -\tilde{Q}_i, \quad B_3 = 0, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Розв'язок системи (17) розшукується у вигляді

$$q_m(y) = \frac{q_m^*(y)}{(h^2 - y^2)^\alpha}, \quad (18)$$

де $0 \leq \text{Re}(\alpha) < 1$, $q_m^*(\pm h) \neq 0$.

Додаткові умови для цієї системи впливають з характеристик симетрії невідомих функцій, а також умов рівноваги півсмуги і мають вигляд

$$\int_{-h}^h q_m(y) dy = T_m, \quad (19)$$

де $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 = 2hP$.

Степінь особливості α знаходиться за методикою [4] і зводиться до розв'язання наступного трансцендентного рівняння [5].

$$\Delta(\alpha_1) \equiv \det[\psi_{pq}(\alpha_1)]_1^3 = 0, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{1i}(\alpha) &= a_{1i} \cos \pi \alpha + d_{1i} \varepsilon_i(\nu^{(1)}), \quad \psi_{2i}(\alpha) = a_{2i} \cos \pi \alpha + d_{2i} \varepsilon_i, \\ \varepsilon_i(\beta) &= \ell_{i1}(\beta) + \alpha \ell_{i2}(\beta) - \alpha(\alpha + 1), \quad \psi_{i3}(\alpha) = \theta_{i3}^0 \sin \pi \alpha, \\ \psi_{3i}(\alpha) &= \theta_{3i}^0 \sin \pi \alpha, \quad \psi_{33}(\alpha) = a_{33} \cos \pi \alpha. \end{aligned}$$

Із цього рівняння, зокрема, витікає, що для $E_1 = E_2 = 1 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ степінь особливості $\alpha \approx 0,455$, а для $E_1 = 1 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 9 \times 10^5$ МПа і $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,3$ маємо $\alpha \approx 0,366$. Видно, що узгодженість результатів, знайдених за допомогою МКЕ, із вказаними є досить прийнятною.

Розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (18) при додаткових умовах (19) виконано за допомогою методу механічних квадратур, описаного в [6]. При цьому враховувалась степінь особливості розв'язку α , і в якості точок колокації використовувались нулі відповідних многочленів Якобі. У результаті для того ж однорідного матеріалу і навантаження, що і раніше, отримані розподіли нормального та дотичного напружень вздовж області контакту, які наведені лініями II на рисунках 5 і 6 відповідно. Знайдені також коефіцієнти при особливостях нормального напруження для розглянутих вище однорідного та неоднорідного матеріалів. Вони вийшли рівними $1014,02 \text{ Н/м}^{3/2}$ та $1016,45 \text{ Н/м}^{3/2}$ відповідно. Порівнюючи отримані результати аналітичного та чисельного аналізу, видно їх досить хорошу узгодженість, що підкреслює коректність як аналітичного, так і чисельного підходів, використаних у даній роботі.

ВИСНОВКИ

У даній роботі запропонована методика визначення степені особливості напружень в околі кутових точок на стику однакових або різнорідних матеріалів. Вона основана на використанні методу скінченних елементів і може бути застосована до біматеріальних тіл скінченних розмірів і будь-якої геометричної форми. Особливості методики продемонстровані на прикладі задачі про контакт ізотопних прямокутників різної ширини, один з яких навантажений рівномірно розподіленим напруженням на торці. З використанням методу скінченних елементів знайдено розподіли напружень у зоні контакту і за рахунок суттєвого згущення сітки біля кутової точки знайдено степінь особливості напружень у цій точці. Вважаючи, що прямокутники досить вузькі, і замінюючи їх півполосою і половою, одержано біматеріал, для якого побудовано чисельно-аналітичний розв'язок. Порівняння цього розв'язку з чисельним показало їх хорошу узгодженість, що підтверджує ефективність методик, що застосовуються.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser. E. J Appl. Mech.* 1971. Vol. 38, No. 2. P. 277–386.
2. Loboda V. V., Tauchert T. R. The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips. *Int. J. Eng. Sci.* 1985. Vol. 23, No. 12. P.1337–1349.
3. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы. *ПММ.* 1986. Т. 50, Вып. 2. С. 363–370.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 512 с.
5. Лобода В. В. Решение плоской задачи упругого контакта полосы и полуполосы. *Изв. АН СССР, МТТ.* 1987. № 1. С. 65–74.
6. Лобода В. В. О методах решения СИУ с неподвижными особенностями. *Методы решения граничных задач и обработки данных.* 1989. С. 35–42.

REFERENCES

1. Bogy, D. B. (1971). Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser. E. J Appl. Mech.*, Vol. 38, No. 2, pp. 277-386.
2. Loboda, V. V. & Tauchert, T. R. (1985). The elastic contact problem for dissimilar orthotropic semi-infinite and infinite strips. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 23, No. 12, pp. 1337-1349.
3. Loboda, V. V. (1986). On the peculiarities of the stressed state of an orthotropic half-strip. *PMM*, Vol. 50, Issue 2, pp. 363-370.
4. Muskhelishvili, N. I. (1968). *Singular Integral Equations.* Moscow: Nauka.
5. Loboda, V. V. (1987). Solution of the plane problem of elastic contact of a strip and a half-strip. *News of AN USSR, MTT*, No. 1, pp. 65-74.
6. Loboda, V. V. (1989). About methods of solving of SIE with fixed singularities. *Methods for solving boundary problems and data processing*, pp. 35-42.