

УДК 534.1:539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-12

## ПРО РУХ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА ПРИ ДІЇ МИТТЄВО ПРІКЛАДЕНОЇ СИЛИ

Ольшанський В. П., д. ф.-м. н., професор, Ольшанський С. В., к. ф.-м. н.

*Харківський національний технічний університет сільського господарства  
імені Петра Василенка,  
вул. Артема, 44, м. Харків, 61000, Україна*

stasolsh@gmail.com

Розглянуто три варіанти нелінійних коливань осцилятора, спричинених миттєво прикладеною до нього сталою силою. Вони відповідають різним значенням коефіцієнтів у виразі силової характеристики. Побудовано в елементарних функціях точні аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. Встановлено гарну відповідність результатів, до яких призводять ці розв'язки, з результатами числового інтегрування рівняння руху на комп'ютері. Виведено формули для обчислення періодів коливань при різних варіантах руху. Показано, що з одержаних формул, як окремі випадки, впливають відомі аналітичні розв'язки лінійної задачі. Одержано вирази коефіцієнта динамічності і встановлено, що він не дорівнює двом, а його значення залежить не лише від характеристик жорсткості осцилятора, а й від величини прикладеної сили.

*Ключові слова: нелінійний осцилятор, миттєво прикладена сила, період коливань, коефіцієнт динамічності.*

## ON THE MOVEMENT OF A NON-LINEAR OSCILLATOR UNDER THE ACTION OF THE MOMENTALLY APPLIED FORCE

Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V.

*Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture,  
Artyoma str., 44, Kharkiv, 61002, Ukraine*

stasolsh@gmail.com

Three variants of nonlinear oscillations of the oscillator caused by a constant force applied to it at once are considered. They correspond to different values of the coefficients in the expression of the power characteristic. In the elementary functions, exact analytic solutions of the nonlinear Cauchy problem for a second-order differential equation are constructed. A good correspondence of the results, to which these solutions lead with the results of numerical integration of the equation of motion on a computer, is established. Formulas are derived for calculating the periods of oscillations for different variants of motion. It is shown that, as special cases, the known formulas give rise to well-known analytic solutions of the linear problem. The expression for the dynamic coefficient is obtained and it is established that it is not equal to two, and its values depend not only on the stiffness characteristics of the oscillator, but on the magnitude of the applied force.

*Key words: nonlinear oscillator, instantaneous applied force, oscillation period, dynamic coefficient.*

### ВСТУП

Вивченню закономірностей нелінійних механічних коливань приділялась і продовжує приділятися значна увага. Не виділяючи окремих наукових статей, відзначимо лише монографічні видання останніх років [1-4], у яких є огляди відповідних літературних джерел. Історія розвитку теорії нелінійних механічних коливань висвітлена в [5]. Підкреслимо, що серед відомих публікацій порівняно мало робіт присвячено динаміці нелінійних коливальних систем при дії силових імпульсних навантажень. Із робіт цього напрямку вкажемо на [6, 7], де аналітичні розв'язки нелінійних задач одержано в Атеб та періодичних еліптичних функціях Якобі. На відміну від них тут розглядаємо окремий особливий варіант нелінійної силової характеристики системи, для якої вдається побудувати точні аналітичні розв'язки в елементарних функціях, що спрощує їх аналіз. Саме такі розв'язки дають можливість досить

просто дослідити особливості руху нелінійної коливальної системи в умовах силового імпульсивного навантаження.

**Метою роботи** є виведення та апробація розрахунками нових формул для обчислення переміщень нелінійного осцилятора та періодів його коливань у русі, спричиненому миттєво прикладеною силою. Визначенню також підлягають коефіцієнти динамічності, які залежать не тільки від власних параметрів осцилятора, а також і від величини прикладеної сили.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗКИ

Переміщення  $x(t)$  системи з одним ступенем вільності описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2\sqrt{|x|}\text{sign}(x) = P_1H(t), \quad (1)$$

у якому  $m$  – маса осцилятора;  $c_1$ ,  $c_2$  – характеристики його жорсткості;  $P_1$  – величина миттєво прикладеної сили;  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда;  $t$  – час; крапка означає похідну по  $t$ .

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Увівши позначення  $\alpha = c_1/m$ ;  $\beta = c_2/m$ ;  $P = P_1/m$ , рівнянню (1), при  $t > 0$ ,  $x > 0$ , надаємо вигляд:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = P - \alpha - \beta\sqrt{x}. \quad (3)$$

Проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \sqrt{Px - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{2\beta}{3}x^{3/2}}. \quad (4)$$

Далі будемо розрізняти три варіанти силової характеристики.

1. Розглянемо спочатку перший із них, коли  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$ . У цьому випадку інтегрування рівняння (4), з урахуванням (2), дає співвідношення:

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{Pu - \frac{\alpha}{2}u^2 - \frac{2\beta}{3}u^{3/2}}} = \sqrt{2}t. \quad (5)$$

Переходом до нової змінної інтегрування  $u = y^2$  виразові (5) надаємо форму:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2P}{\alpha} + \frac{4}{9}\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \left(y + \frac{2\beta}{3\alpha}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}t,$$

звідки випливає, що:

$$x(t) = \left[ A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t + B\right) - \frac{2\beta}{3\alpha} \right]^2, \quad (6)$$

причому  $A = \sqrt{\frac{2P}{\alpha} + \frac{4\beta^2}{9\alpha^2}}$ ;  $B = \arcsin \frac{2\beta/(3\alpha)}{A}$ .

Отже, нелінійне рівняння (1) має аналітичний розв'язок (6) в елементарних функціях.

Згідно з (6) максимальне динамічне відхилення системи  $x_g$  від положення статичної рівноваги  $x = 0$  становить:

$$x_g = \left( A - \frac{2\beta}{3\alpha} \right)^2.$$

Воно досягається при  $t = t_* = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{\pi}{2} - B \right)$ .

Коливання проходять з періодом:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} (\pi - 2B) = 2t_*,$$

який залежить не лише від власних параметрів осцилятора, а також і від величини миттєво прикладеної сили, що властиво нелінійним системам.

Статичне відхилення  $x_c$  осцилятора від положення  $x = 0$  під дією сили  $P$  задовольняє рівнянню:

$$\alpha x_c + \beta \sqrt{x_c} = P,$$

що має корінь:

$$x_c = \left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2.$$

Для обчислень коефіцієнта динамічності системи  $K_g$  одержуємо формулу:

$$K_g = \frac{x_g}{x_c} = 2 \left( \frac{\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta}{2\alpha}}}{\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}\beta}{3\alpha}}} \right)^2. \tag{7}$$

При  $\beta = 0$ ,  $K_g = 2$ , що відповідає лінійній системі. Якщо  $\beta > 0$ , то  $K_g > 2$ , бо в (7):

$$\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta}{2\alpha}} > \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}\beta}{3\alpha}}.$$

Із (6) при  $\beta = 0$ ,  $A = \sqrt{\frac{2P}{\alpha}}$ ,  $B = 0$  впливає відома формула переміщень лінійного осцилятора, миттєво навантаженого силою  $P$ , а саме:

$$x(t) = \frac{2P}{\alpha} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{2} t \right) = \frac{P_1}{c_1} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{c_1}{m}} t \right) \right). \tag{8}$$

Тут період коливань не залежить від сили  $P$ .

Графіки переміщень, до яких призводить формула (6), зображено на рис. 1. Розрахунки проведемо при  $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $\beta = 0,2 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$  для трьох значень  $P$ . Зі збільшенням  $P$  зростають не тільки амплітуди, а й період коливань. Залежність амплітуд від  $P$  нелінійна.

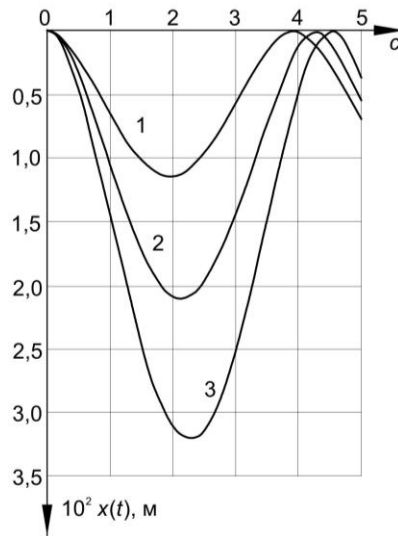


Рис. 1. Графіки  $x(t)$  при  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ :  
1 –  $P = 0,02 \text{ м/с}^2$ ; 2 –  $P = 0,03 \text{ м/с}^2$ ; 3 –  $P = 0,04 \text{ м/с}^2$

2. Другий варіант руху осцилятора при  $x > 0$  описується диференціальним рівнянням:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = P - \alpha x + |\beta| \sqrt{x},$$

у якому  $\alpha > 0$ .

Його інтегрування, з урахуванням початкових умов (2), дає:

$$x(t) = \left[ A \sin \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{2} t - B_1 \right) - \frac{2|\beta|}{3\alpha} \right]^2. \quad (9)$$

Тут  $B_1 = \arcsin \left( \frac{2|\beta|/3\alpha}{A} \right)$ .

Тепер  $x = 0$  не є положенням стійкої рівноваги. Його маємо при  $x = x_1 = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2$ .

Згідно з (9) максимальне динамічне відхилення  $x_g$  від  $x = 0$  становить:

$$x_g = \left( A + \frac{2|\beta|}{3\alpha} \right)^2. \quad (10)$$

Воно досягається при  $t = t_* = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{\pi}{2} + B_1 \right)$ .

Колівання проходять з періодом:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} (\pi + 2B_1) = 2t_*, \quad (11)$$

який теж залежить від значення прикладеної сили  $P$ .

Обчислення статичного відхилення  $x_c$  від положення  $x=0$  зводиться до використання формули:

$$x_c = \left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{|\beta|}{2\alpha} \right)^2$$

при  $P \rightarrow 0$   $x_c \rightarrow x_1$ .

Коефіцієнт динамічності системи подається виразом:

$$K_g = 2 \frac{\left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}|\beta|}{3\alpha}} \right)^2}{\left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{|\beta|}{2\alpha} \right)^2}. \tag{12}$$

Він менший двох, бо в (12), при  $|\beta| > 0$ :

$$\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{2\beta^2}{9\alpha^2} + \frac{\sqrt{2}|\beta|}{3\alpha}} < \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{|\beta|}{\alpha}.$$

Коли  $\beta = 0$ , розв'язок (9) переходить в (8), а  $K_g = 2$ .

На рис. 2 показано графіки коливань осцилятора, одержані числовим інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері при  $\alpha = 1 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = -0,1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$  і двох значеннях  $P$ . Тут збільшення  $P$  призводить до зростання амплітуд коливань і зменшення їх періоду, що властиво нелінійній системі з жорсткою характеристикою. Обчислені за формулами (10) і (11) амплітуди і періоди коливань дорівнюють відповідно  $x_g = 0,0349 \text{ м}$ ,  $T = 8,6352 \text{ с}$  при  $P = 0,005 \text{ м/с}^2$  і  $x_g = 0,0497 \text{ м}$ ,  $T = 8,0452 \text{ с}$  при  $P = 0,01 \text{ м/с}^2$ . В обох випадках маємо гарне узгодження одержаних  $x_g$  і  $T$  із результатами числового розв'язання задачі Коші, поданого на рис. 2.

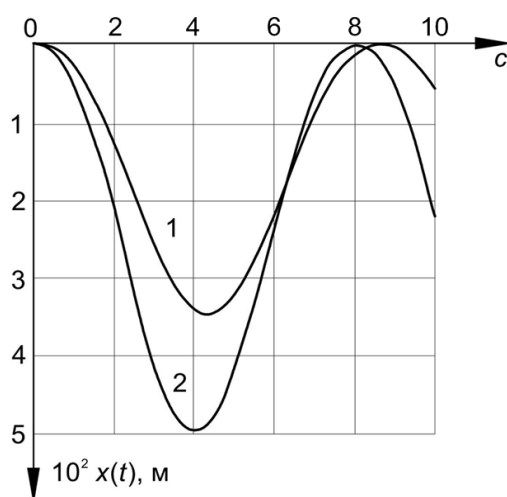


Рис. 2. Графіки  $x(t)$  при  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ :  
 1 –  $P = 0,005 \text{ м/с}^2$ ; 2 –  $P = 0,01 \text{ м/с}^2$

Інформація про вплив  $P$  на коефіцієнт динамічності системи  $K_g$ , у якої  $\alpha = 1 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = -0,1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ , надана в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення  $K_g$  при  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  і різних  $P$ 

$P$ , м/с <sup>2</sup>	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020
$K_g$	1,812	1,871	1,900	1,915	1,925

Збільшення навантаження  $P$ , згідно з (12), супроводжується збільшенням  $K_g$ , але коефіцієнт динамічності залишається меншим двох.

3. Третій варіант коливального руху осцилятора маємо при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ . Такий рух можливий лише при малому зовнішньому навантаженні, тобто за умови, що:

$$P \leq \frac{2\beta^2}{9|\alpha|}. \quad (13)$$

Інтегрування виразу (4) у цьому випадку дає:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2\beta}{3|\alpha|} - y\right)^2 - \left(\frac{4\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{2P}{|\alpha|}\right)}} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t. \quad (14)$$

Ліва частина в (14) виражається через обернені гіперболічні функції. Тому після інтегрування її отримуємо:

$$\text{Arch} \frac{2\beta/3|\alpha|}{A_*} - \text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|) - \sqrt{x}}{A_*} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t, \quad (15)$$

де  $A_* = \sqrt{\frac{4\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{2P}{|\alpha|}}$ .

Із (15) випливає, що:

$$x(t) = \left[ \frac{2\beta}{3|\alpha|} - A_* \text{ch} \left( \text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{A_*} - \frac{\sqrt{|\alpha|} t}{2} \right) \right]^2. \quad (16)$$

Максимальне відхилення  $x_g$  від положення  $x = 0$  становить:

$$x_g = \left( \frac{2\beta}{3|\alpha|} - A_* \right)^2. \quad (17)$$

Воно досягається при:

$$t = t_* = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \text{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{A_*}.$$

Період коливань дорівнює:

$$T = 2t_*. \quad (18)$$

Вираз (16) описує переміщення системи на першому циклі коливань  $t \in [0; T]$ , що потім легко поширити і на інші цикли, тобто більші значення  $t$ .

Статичне відхилення  $x_c$  визначимо з рівняння:

$$|\alpha|x_c - \beta\sqrt{x_c} + P = 0.$$

Воно дорівнює:

$$x_c = \left( \frac{\beta}{2|\alpha|} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}} \right)^2$$

за умови, що:  $P < \frac{\beta^2}{4|\alpha|}$ .

Отже, при виконанні нерівності (13) коефіцієнт динамічності системи  $K_g$  становить:

$$K_g = 2 \left( \frac{\frac{\beta}{2|\alpha|} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}}{\frac{\sqrt{2}\beta}{3|\alpha|} + \sqrt{\frac{2\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}} \right)^2. \tag{19}$$

Він більший двох, бо в (19):

$$\frac{\sqrt{2}\beta}{3|\alpha|} + \sqrt{\frac{2\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}} < \frac{\beta}{2|\alpha|} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{P}{|\alpha|}}.$$

Результати обчислень  $x(t)$  при  $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$  і двох значеннях  $P$  зображено на рис. 3. Графіки одержано числовим інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері. Для порівняння, за формулами (17) і (18) було обчислено  $x_g$  і  $T$ . При  $P = 0,1 \text{ м/с}^2$  вони становлять:  $x_g = 0,0255 \text{ м}$ ,  $T = 2,9117 \text{ с}$ , а при  $P = 0,15 \text{ м/с}^2$  значно більші, а саме:  $x_g = 0,06154 \text{ м}$ ,  $T = 3,7556 \text{ с}$ . Спостерігаємо гарну відповідність результатів, одержаних різними способами.

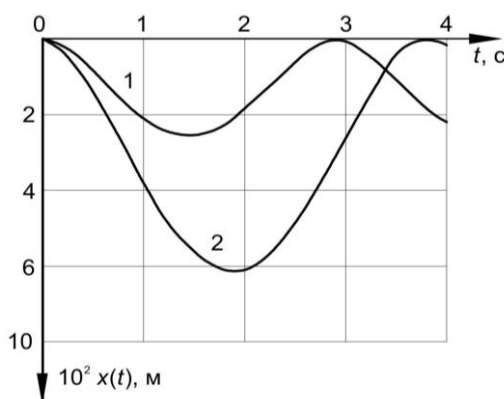


Рис. 3. Графіки  $x(t)$  при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ :

1 –  $P = 0,1 \text{ м/с}^2$ ; 2 –  $P = 0,15 \text{ м/с}^2$

У табл. 2 записано значення  $K_g$ , обчислені за формулою (19), при  $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$  і різних  $P$ .

Таблиця 2 – Значення  $K_g$  при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  і різних  $P$

$P, \text{ м/с}^2$	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
$K_g$	2,253	2,265	2,284	2,307	2,336

Тут  $K_g > 2$ , причому він збільшується зі збільшенням  $P$ .

4. Четвертий варіант руху аперіодичний. Він має місце при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $P \geq \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$ .

У випадку, коли  $P = \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$ , переміщення описуються виразом:

$$x(t) = \frac{4\beta^2}{9\alpha^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t\right) \right]^2. \quad (20)$$

Результати обчислень  $x(t)$  за формулою (20) при  $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ ,  $P = \frac{4}{9} \text{ м/с}^2$  і різних  $t$  записано в табл. 3. Для порівняння, там також вказано  $x_r(t)$ , одержані числовим інтегруванням рівняння руху.

Таблиця 3 – Значення переміщень, одержані різними способами

$t, \text{с}$	1	5	10	20	30
$x(t), \text{м}$	0,15767	1,22261	1,67567	1,77476	1,77769
$x_r(t), \text{м}$	0,15767	1,22261	1,67567	1,77473	1,77675

Як видно з (20) і табл. 3, із ростом  $t$  переміщення асимптотично прямують до значення  $4\beta^2/(9\alpha^2)$ .

При  $P > \frac{2}{9} \frac{\beta^2}{|\alpha|}$  із ростом  $t$  переміщення осцилятора прямують до нескінченності, бо розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$x(t) = \left[ \frac{2\beta}{3|\alpha|} + B_* \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2} t - \operatorname{Arch} \frac{2\beta/(3|\alpha|)}{B_*} \right) \right]^2. \quad (21)$$

Тут  $B_* = \sqrt{\frac{2P}{|\alpha|} - \frac{4\beta^2}{9\alpha^2}}$ .

Вірогідність формули (21) підтверджується результатами обчислень  $x(t)$  при  $\alpha = -0,5 \text{ с}^{-2}$ ;  $\beta = 1 \text{ м}^{1/2}\text{с}^{-2}$ ,  $P = 0,5 \text{ м/с}^2$ , що записані в табл. 4. Там, для порівняння, наведено  $x_r(t)$ , одержані числовим інтегруванням рівняння руху осцилятора.

Таблиця 4 – Значення  $x(t)$  при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $P = 0,5 \text{ м/с}^2$

$t, \text{с}$	1	3	5	7	10
$x(t), \text{м}$	0,18171	0,94965	1,78410	2,88367	7,18741
$x_r(t), \text{м}$	0,18171	0,94965	1,78409	2,88366	7,18739



## ВИСНОВКИ

Дослідженням показано, що вибраний нелінійний осцилятор може здійснювати коливання або виконувати аперіодичний рух під дією миттєво прикладеної сили. При всіх режимах руху існують аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші в елементарних функціях, що дозволяє з високою точністю обчислювати переміщення і періоди коливань системи. Коефіцієнти динамічності осцилятора залежать не тільки від його власних параметрів, а також і від величини прикладної сили, що не спостерігається у лінійних системах.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления: в 2 т. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. Т. 1. 716 с. Т. 2. 700 с.
2. Митропольский Ю. А. Избранные труды: в 2 т. Киев: Наукова думка, 2012. 504 с.
3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.
4. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. 456 с.
5. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. Севастополь: Вебер, 2013. 403 с.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Динаміка і міцність машин.* 2017. № 39 (1261). С. 62–67.
7. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2017. № 6 (1228). С. 86–94.

## REFERENCES

1. Avramov K. V. & Mikhlin, YU. V. (2015). Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods, phenomena: in 2 volumes. Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research.
2. Mitropolsky, Yu. A. (2012). Selected Works: in 2 volumes. Kiev: Naukova Dumka.
3. Pukach, P. Ya. (2014). Qualitative methods of research of nonlinear oscillatory systems. Lviv: Lviv Polytechnic.
4. Shatokhin, V. M. (2008). Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission of machines. Kharkov: NTU "KhPI".
5. Larin, A. A. (2013). Essays on the history of the development of the theory of mechanical oscillations. Sevastopol: Weber.
6. Olshansky, V. P. & Olshanskii, S. V. (2017). Fluctuations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading. *Visnyk NTU «KHPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn,* No. 39(1261), pp. 62–67.
7. Olshansky, V. P. & Olshanskii, S. V. (2017). Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading. *Visnyk NTU «KHPI». Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh,* No. 6(1228), pp. 86–94.