

12. Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1962. P. 1075–1085.
13. Selezov I. T., Korsunski S. V. Numerical inverting Laplace transform based on Fourier-Bessel expansions (in Russian). *Dokl. Acad. Nauk UkrSSR, Ser. A.* 1988. N 11. P. 25–28.
14. Tikhonov A. N., Arsenin V. J. Methods of solution of ill-posed problems (in Russian). Moscow: Nauka, 1986. 288 p.
15. Miller M. K., Guy W. T. Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials. *SIAM J. Numer. Analysis.* 1966. 3. P. 624–635.
16. Weeks W. T. Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. *J. Assoc. Comput. Math.* 1966. 13. P. 419–426.
17. Vilge J. I., Zakharov E. V. To calculation of nonstationary acoustic field in slit by the method of numerical inverting Laplace transform (in Russian). *Collection chisl. Metody in geophys.* 1978. N 1. P. 102–107.
18. Bellman R., Lockett R. E., Kalaba J. A. Numerical inversion of the Laplace transform: applications to biology, economics and physics. Amsterdam, Elsevier 1966.
19. Honig G., Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transform. *J. Comp. App. Math.* 1984. 10, N 1. P. 113–132.
20. Sherief H. H., Youssef H. M. Short time solution for a problem in magnetothermoelasticity with thermal relaxation. *J. Thermal stresses.* 2004. 27 (6). P. 537–559.
21. Abate J., Whitt, W. A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. *INFORMS J. on Computing.* 2006. 18, N 4. P. 408–421.
22. Selezov I. T., Kryvonos Ju. G. Modeling medicine propagation in tissue: generalized statement. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. 53, № 4. P. 535–542. DOI: 10.1007/s10559-017-9955-1.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-14

## ПОЗДОВЖНИЙ МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА З ПЕРЕХІДНИМ ШАРОМ

Столярова А. В., аспірант, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент, Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

st\_av991@ukr.net, gsm1212@ukr.net, m1655291@gmail.com

При розв'язанні задач механіки композитів зручно використовувати модель композита у вигляді суцільного однорідного середовища з ефективними сталими, що адекватно відображають його найбільш суттєві характеристики. Задачі визначення напружено-деформованого стану композита базуються на припущенні, що з'єднання матриці з волокном має чітку границю розподілу, що обмежує компоненти композита. Однак важливу роль у механіці композитів відіграє ефект неідеального контакту між компонентами, одним із яких є наявність перехідного шару. Отримано формулу залежності поздовжнього модуля пружності для трансропного матеріалу, що моделює композит, від пружних характеристик матриці, волокна, перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, та об'ємної долі кожного з них у композиті. Для цього розв'язано дві крайові задачі: про поздовжнє розтягування нескінченного складеного ізотропного тришарового циліндра та поздовжнє розтягування нескінченного трансропного суцільного циліндра. Для розв'язування системи рівнянь рівноваги в переміщеннях у циліндричній системі координат у роботі використані наступні припущення: матеріали матриці, перехідного шару і волокна є ізотропними, площини ізотропії співпадають та перпендикулярні осі волокна; задача

вісесиметрична; зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука; розглядається гексагональна укладка волокон в односпрямованому композиті. Проаналізовано вплив наявності перехідного шару на величину ефективного поздовжнього модуля пружності. Залежність поздовжнього модуля пружності від об'ємної частки перехідного шару відповідно має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

*Ключові слова:* композиційний матеріал, матриця, волокно, поздовжнє розтягнення, перехідний шар, ефективні пружні сталі.

## THE LONGITUDINAL ELASTIC MODULUS OF THE FIBROUS COMPOSITE WITH THE TRANSITION LAYER

Stoliarova A. V., Grebenyuk S. M., Klymenko M. I.

*Zaporizhzhya National University,  
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

st\_av991@ukr.net, gsm1212@ukr.net, m1655291@gmail.com

In our time, structural elements of composite materials are widely used in engineering, modern research of which is based on the idea of homogenization. This method is based on solving special problems of the theory of elasticity on the periodicity cell of the composite. The tasks of determining the stress-strain state of composite materials in the classical formulation are based on the assumption that the matrix-fiber connection has a clear boundary of distribution for the components of the composite. Consider the case when a transition layer is formed between the basic components. To solve the system of equilibrium equations in displacements in a cylindrical coordinate system, the following assumptions are used in the paper: the problem is axisymmetric; the cylinder in question is infinite; after deformation, the sections remain flat. In this way two boundary problems on the longitudinal extension of an infinite composite isotropic three-layer cylinder and the longitudinal extension of an infinite transonic solid cylinder are solved. On the basis of the solution of the problems, the formula for the dependence of the longitudinal modulus of elasticity for the transtropic material that models the composite is obtained from the elastic characteristics of the matrix, the fiber, the transition layer that is formed between the matrix and the fiber as a result of the interaction of the components, and the volume fraction of each of them in the composite. Varying by the volume fractions of the fiber, the transition layer and the matrix in the composite, some cases of their dependence are considered. Based on the numerical calculations, the graphs of the longitudinal modulus of elasticity of the composite material are plotted against the volume fraction of the transition layer. The effect of the formation of the transition layer due to deformation on the stress-strain state of the composite cylinder is analyzed. It should be noted that with increasing volume fraction of the transition layer in the composite material, the value of the longitudinal modulus of elasticity of the composite growing.

*Key words:* composite material, matrix, fiber, transition layer, longitudinal stretching.

### ВСТУП

Визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів має важливе прикладне значення при створенні різного роду композиційних матеріалів, які використовуються в авіації для високонавантажених деталей літаків, автомобілебудуванні, гірській промисловості, цивільному будівництві та в інших областях народного господарства.

Задачі визначення напружено-деформованого стану композита в класичній постановці базуються на припущенні, що з'єднання матриці з волокном має чітку границю розподілу, що обмежує компоненти композиту, зокрема статті [1-5]. У [6] запропоновані співвідношення для визначення поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона двофазного волокнистого композита з транструпними складовими. Задача про поздовжнє розтягування у випадку двошарового циліндра (без урахування перехідного шару) наведена в роботі [7]. Там же містяться і деякі чисельні розв'язки цієї задачі для двошарового композита.

Однак важливу роль у механіці композитів відіграє ефект неідеального контакту між компонентами. Властивості перехідного шару, що утворюється при різного роду взаємодіях матеріалів матриці з включеннями, більшою мірою визначають експлуатаційні характеристики композита та їх стабільність у часі. При механічному навантаженні

композита напруження досягають максимальних значень саме на границях розділу компонентів. Головна функція перехідного шару полягає в тому, щоб знизити локальні напруження і забезпечити рівномірну передачу навантаження на границі розподілу.

Зазвичай складність процесів взаємодії матриці та волокна призводить до складних математичних постановок задач, розв'язати які аналітичними методами не видається можливим. Тому використовують чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, метод кінцевих різниць та інші. Робота [8] присвячена застосуванню методу гомогенізації до розробки математичної моделі трифазного (включення, матриця та міжфазний шар) композиційного матеріалу. Отримані чисельні результати для ефективних характеристик композиційного матеріалу з випадково розподіленими сферичними включеннями та композиційного матеріалу з випадково розподіленими односпрямованими волокнами. Асимптотичний метод гомогенізації застосовується до комірки у вигляді паралелограма для обчислення ефективних пружних коефіцієнтів композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними складовими та неідеальним контактом на межі поділу між матрицею й волокнами [9]. У статті [10] із використанням методу гомогенізації знайдено поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. На основі експериментальних методів проаналізовано міжфазну взаємодію на границі полімерної матриці й волокна [11]. Різні механічні параметри міжфазної взаємодії матриці та волокна чисельно досліджені за допомогою методу скінченних елементів. Вивчено ефективні пружні характеристики композита з ромбічним вкладанням волокон та з урахуванням особливостей міжфазного контакту на межі матриця-волокно за допомогою методу гомогенізації та методу скінченних елементів [12].

Досліджені міжфазові явища в композитах епоксіполімер/скловолокно методами релаксаційної спектроскопії [13]. У [14, 15] врахована можливість утворення перехідного шару між волокном та матрицею при отриманні розрахункових формул для ефективних коефіцієнтів теплопровідності в напрямку укладки волокон і в площині, перпендикулярній цьому напрямку. Знайдені поля напружень та деформацій в односпрямованому склопластику без міжфазного шару й з міжфазним шаром з використанням методу скінченних елементів в програмному комплексі ANSYS [16]. Проаналізовано вплив міжфазного шару.

Досліджено вплив неоднорідного перехідного шару, що утворюється між матрицею та волокном, на напружено-деформований стан односпрямованих волокнистих композитів [17]. При цьому коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт теплового розширення міжфазу вважалися постійними, а поздовжній модуль пружності таким, що змінюється за лінійним та степеневим законами. У роботі [18] запропоновано формулу розрахунку модуля пружності міжфазової зони, що включає модулі пружності вуглепластику, волокна та полімерної матриці та об'ємних часток компонентів композита в поперечному розрізі зразка вуглепластику. Формули для визначення товщини міжфазового шару отримані в [19].

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що задачі визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів, між компонентами яких має місце утворення перехідного шару, є досить актуальними. За даним науковим напрямом наукові статті можна умовно розділити на дві категорії. До першої можна віднести статті, у яких досліджуються компоненти напружено-деформованого стану композиційного матеріалу. До другої – автори яких досліджують характеристики саме перехідного шару.

Метою роботи є отримання аналітичного співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності композита з ізотропними матрицею, перехідним шаром та волокном шляхом узгодження компонентів переміщень однорідного композита та його складових.

## ВИЗНАЧЕННЯ ПОЗДОВЖНЬОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ КОМПОЗИТА ЗА НАЯВНОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ШАРУ МІЖ ЙОГО КОМПОНЕНТАМИ

Ефективний поздовжній модуль пружності композиційного матеріалу знаходиться з розв'язання двох крайових задач: для сумісного деформування складеного циліндра (ізотропні матриця, перехідний шар, волокно) та однорідного трансверсально-ізотропного циліндра, що моделює композит.

Основні припущення:

- матеріали матриці, перехідного шару і волокна є ізотропними, площини ізотропії співпадають та перпендикулярні осі волокна;
- композитний матеріал вважатимемо однорідним та трансотропним з площиною ізотропії, перпендикулярній осі волокна;
- зв'язок між напруженнями та деформаціями описується законом Гука;
- розглядається гексагональна укладка волокон в односпрямованому композиті.

Апроксимуємо об'єм елементарної гексагональної комірки об'ємом циліндра. Радіус у цьому випадку приймемо таким, щоб об'ємний вміст волокна в гексагональній комірці і об'ємний вміст волокна в циліндричній комірці були б однаковими (рис. 1).

Тоді представницький елемент волокнистого односпрямованого композиційного матеріалу, що має трансотропні властивості, представимо у вигляді комбінації трьох ізотропних циліндрів нескінченної довжини, що моделюють матрицю, перехідний шар та волокно відповідно.

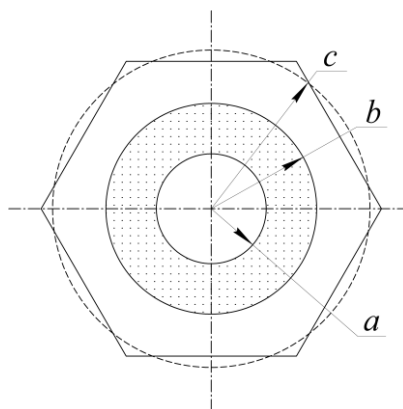


Рис. 1. Гексагональна комірка:  $a$  – радіус волокна;  $b$  – радіус перехідного шару;  $c$  – радіус матриці

Нехай  $f$  та  $l$  – відповідно об'ємний вміст волокна та перехідного шару у матеріалі композита. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, отримуємо наступні співвідношення:

$$f = \frac{a^2}{c^2}, \quad l = \frac{b^2 - a^2}{c^2}. \quad (1)$$

Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 2,  $a$ ) суцільного циліндра ( $0 < r \leq a$ ), що моделює волокно, порожнистого циліндра ( $a \leq r \leq b$ ), що моделює перехідний шар, та порожнистого циліндра ( $b \leq r \leq c$ ), що моделює матрицю. Перейдемо до циліндричної системи координат  $Ozr\theta$ . Тоді індекс 1 відповідатиме напрямку осі  $z$ , напрямком 2 –  $r$ , напрямком 3 –  $\theta$ .

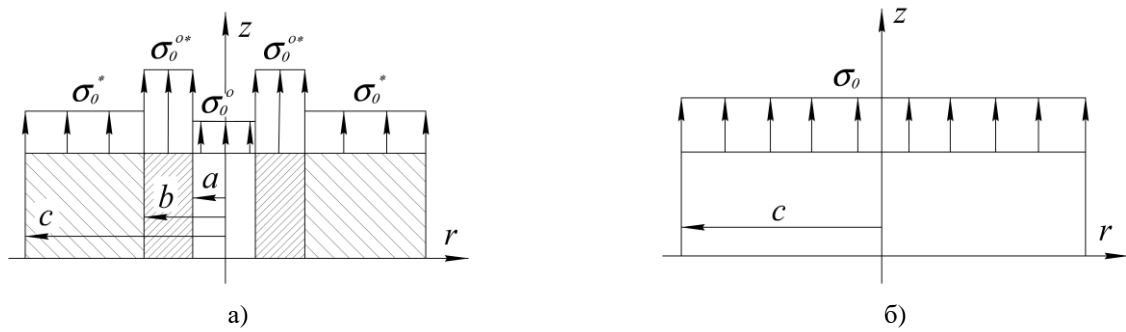


Рис. 2. Поздовжнє розтягнення:  $a$  – сумісне деформування матриці, перехідного шуру та волокна;  $b$  – деформування композита

Враховуючи вищезгадані припущення для вісесиметричної задачі, поле напружень визначатиметься наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r), \quad \sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (2)$$

Припускається, що характеристики перехідного шару величини сталі й відомі. Граничні умови для представницького елемента підберемо з урахуванням реальної поведінки неперервного односпрямованого композита. На границях розділу шарів відсутній стрибок за радіальним напруженням та радіальним переміщенням:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a) = \sigma_{rr}^{o*}(a), \quad \sigma_{rr}^{o*}(b) = \sigma_{rr}^*(b), \quad u_r^{\circ}(a) = u_r^{o*}(a), \quad u_r^{o*}(b) = u_r^*(b). \quad (3)$$

Тут і далі символ  $\circ$  позначає величини, що відносяться до волокна, символ  $o^*$  позначає величини, що відносяться до перехідного шару, а символ  $*$  – величини, що відносяться до матриці.

Крім цього, відсутнє радіальне напруження на зовнішній поверхні композита (матриці):

$$\sigma_{rr}^*(c) = 0. \quad (4)$$

Радіальні переміщення описуються співвідношенням:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (5)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі, що визначаються з крайових умов,  $u_r(r)$  – розв'язок рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0, \quad (6)$$

яке отримуємо з рівняння рівноваги для вісесиметричного напружено-деформованого стану.

Осьові переміщення описуються співвідношенням [20]:

$$u_z(z) = \left( \frac{\sigma_0(1-\nu-2\nu^2)}{E(1-\nu)} - \frac{2C_1\nu}{1-\nu} \right) z. \quad (7)$$

Для волокна при  $r = 0$  переміщення  $u_r^{\circ}(0) = 0$ , тоді маємо, що  $C_2 = 0$ . Тепер співвідношення (5) запишеться у вигляді (перепозначимо  $C_1$  на  $A$ ):

$$u_r^{\circ}(r) = Ar. \quad (8)$$

Тоді напружено-деформований стан ізотропного волокна описуватиметься, окрім (8), наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ} = \sigma_{rr}^{\circ} = \frac{\sigma_0^{\circ} \nu^{\circ} + AE^{\circ}}{1 - \nu^{\circ}}, \quad (9)$$

$$u_z^{\circ}(z) = \left( \frac{\sigma_0^{\circ} (1 - \nu^{\circ} - 2(\nu^{\circ})^2)}{E^{\circ} (1 - \nu^{\circ})} - \frac{2A\nu^{\circ}}{1 - \nu^{\circ}} \right) z. \quad (10)$$

Аналогічно запишемо співвідношення, що описують напружено-деформований стан перехідного шару (перепозначимо  $C_1$  на  $C$ , а  $C_2$  на  $D$ ):

$$u_r^{*\circ}(r) = Cr + \frac{D}{r}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{*\circ}(r) = E^{*\circ} \left( \frac{\sigma_0^{*\circ} \nu^{*\circ}}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} + \frac{C}{1 - \nu^{*\circ}} + \frac{D}{r^2 (1 + \nu^{*\circ})} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{rr}^{*\circ}(r) = E^{*\circ} \left( \frac{\sigma_0^{*\circ} \nu^{*\circ}}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} + \frac{C}{1 - \nu^{*\circ}} - \frac{D}{r^2 (1 + \nu^{*\circ})} \right), \quad (13)$$

$$u_z^{*\circ}(z) = \left( \frac{\sigma_0^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ} - 2(\nu^{*\circ})^2)}{E^{*\circ} (1 - \nu^{*\circ})} - \frac{2C\nu^{*\circ}}{1 - \nu^{*\circ}} \right) z. \quad (14)$$

Співвідношення, які описують напружено-деформований стан ізотропної матриці (перепозначимо  $C_1$  на  $K$ , а  $C_2$  на  $H$ ):

$$u_r^*(r) = Kr + \frac{H}{r}, \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^* \left( \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1 - \nu^*)} + \frac{K}{1 - \nu^*} + \frac{H}{r^2 (1 + \nu^*)} \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^* \left( \frac{\sigma_0^* \nu^*}{E^* (1 - \nu^*)} + \frac{K}{1 - \nu^*} - \frac{H}{r^2 (1 + \nu^*)} \right), \quad (17)$$

$$u_z^*(z) = \left( \frac{\sigma_0^* (1 - \nu^* - 2(\nu^*)^2)}{E^* (1 - \nu^*)} - \frac{2K\nu^*}{1 - \nu^*} \right) z. \quad (18)$$

Невідомі постійні  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $K$ ,  $H$  знаходимо з системи рівнянь, складеної з умов (3) та (4):

$$A = -2 \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} E^{\circ*} \nu^* (1 - \nu^{\circ}) (f + l) (1 - f - l) - \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} l \nu^{*\circ} (1 - \nu^{\circ}) (k_6 + (f + l) k_7) - \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} \nu^{\circ} \left( 2f E^{\circ*} (1 + \nu^*) + l (1 + \nu^{*\circ}) k_5 + (f + l) \left( 2f E^{\circ*} (1 - \nu^*) + l (1 + \nu^{*\circ}) k_4 \right) \right), \quad (19)$$

$$C = -\frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \nu^* (1 - \nu^{*\circ}) (f + l) (1 - f - l) k_3 - \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} f \nu^{\circ} (1 - \nu^{*\circ}) (k_6 + (f + l) k_7) -$$

$$-\frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} v^{\circ*} \left( f \frac{k_2}{E^{\circ*}} (1+v^{\circ*}) + l(1+v^{\circ*})k_3 + (f+l) \left( f \frac{k_1}{E^{\circ*}} (1+v^{\circ*}) + l(1-v^{\circ*})k_3 \right) \right), \quad (20)$$

$$D = f(f+l)(1+v^{\circ*}) \frac{c^2}{k_8} \left( \sigma_0^{\circ*} v^{\circ*} (1f-l)(2E^{\circ} - k_3) - \right. \\ \left. - \sigma_0^{\circ} v^{\circ} (k_5 + (f+l)k_4) + \sigma_0^{\circ*} \frac{v^{\circ*}}{E^{\circ*}} (k_2 + (f+l)k_1) \right), \quad (21)$$

$$K = \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} \frac{v^{\circ*}}{E^{\circ*}} \left( -2fk_2 - lk_3k_5 + E^{\circ*} (f+l) (2fE^{\circ*} (1-v^{\circ}) + l(1-v^{\circ*})k_3) \right) - \\ - 2 \frac{\sigma_0^{\circ}}{k_8} v^{\circ} E^{\circ*} f (f+l) (1-v^{\circ}) - \frac{\sigma_0^{\circ*}}{k_8} v^{\circ*} l (f+l) (1-v^{\circ}) k_3, \quad (22)$$

$$H = -(f+l)(1+v^{\circ*}) \frac{c^2}{k_8} \left( \sigma_0^{\circ*} \frac{v^{\circ*}}{E^{\circ*}} E^{\circ*} (-2fE^{\circ} - lk_3) + 2\sigma_0^{\circ} v^{\circ} fE^{\circ*} + \sigma_0^{\circ*} v^{\circ*} lk_3 \right), \quad (23)$$

де  $k_1 = E^{\circ*} (E^{\circ} (1-v^{\circ}) - E^{\circ*} (1-v^{\circ}))$ ,  $k_2 = E^{\circ*} (E^{\circ} (1+v^{\circ}) + E^{\circ*} (1-v^{\circ}))$ ,  $k_3 = E^{\circ*} (1-v^{\circ}) + E^{\circ} (1+v^{\circ*})$ ,  
 $k_4 = E^{\circ*} (1-v^{\circ*}) - E^{\circ} (1-v^{\circ})$ ,  $k_5 = E^{\circ*} (1+v^{\circ}) + E^{\circ} (1-v^{\circ*})$ ,  $k_6 = E^{\circ*} (1+v^{\circ}) - E^{\circ} (1+v^{\circ*})$ ,  
 $k_7 = E^{\circ*} (1-v^{\circ}) + E^{\circ} (1+v^{\circ*})$ ,  $k_8 = (f+l)(2fk_1 + lk_3k_4) + 2fk_2 + lk_3k_5$ .

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного транстропного матеріалу, що моделює поведінку композита (рис. 2, б). У цьому випадку поле напружень визначатиметься такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (24)$$

Умови узгодження в переміщеннях для представницького елемента до та після гомогенізації запишемо як

$$u_z^{\circ}(h) = u_z^{\circ*}(h), \quad u_z^{\circ*}(h) = u_z^*(h), \quad u_z^*(h) = u_z(h). \quad (25)$$

З перших двох умов (25), враховуючи (19), (20) та (22), матимемо

$$\sigma_0^* = \sigma_0^{\circ*} m, \quad (26)$$

$$\sigma_0^{\circ} = \sigma_0^{\circ*} \frac{g_1 + g_2 m}{g_3}, \quad (27)$$

де

$$m = \frac{g_1 g_4 + g_3 g_5}{g_3 g_6 - g_2 g_4}, \quad g_1 = \frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{2(v^{\circ*})^2}{1-v^{\circ*}} \left( \frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{x_2}{k_8} \right) - (k_6 + (f+l)k_7) \frac{2lv^{\circ} v^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_2 = (f+l)(1-f-l) \frac{2v^{\circ*}}{k_8} (v^{\circ*} k_3 - 2E^{\circ*} v^{\circ}),$$

$$g_3 = \frac{1}{E^{\circ}} - \frac{2(v^{\circ})^2}{1-v^{\circ}} \left( \frac{1}{E^{\circ}} - \frac{x_1}{k_8} \right) - (k_6 + (f+l)k_7) \frac{2lv^{\circ} v^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_4 = \frac{2v^{\circ} f}{k_8} (2v^{\circ} E^{\circ*} (f+l) - v^{\circ*} (k_6 + (f+l)k_7)),$$

$$g_5 = -\frac{1}{E^{\circ*}} + \frac{2(v^{\circ*})^2}{1-v^{\circ*}} \left( \frac{1}{E^{\circ*}} - \frac{x_2}{k_8} \right) + (f+l)k_3 \frac{2lv^{\circ*}}{k_8},$$

$$g_6 = -\frac{1}{E^*} \left( 1 - \frac{2(v^*)^2}{1-v^*} \left( 1 + \frac{x_3}{k_8} \right) \right) + (f+l)(1-f-l) \frac{2v^*v^{\circ*}}{k_8} k_3,$$

$$x_1 = 2fE^{\circ*}(1+v^*) + lk_5(1+v^{\circ*}) + (f+l)(2fE^{\circ*}(1-v^*) + lk_4(1+v^{\circ*})),$$

$$x_2 = (f+l) \left( \frac{fk_1}{E^{\circ*}}(1+v^{\circ*}) + lk_3(1-v^*) \right) + \frac{fk_2}{E^*}(1+v^*) + lk_3(1+v^*),$$

$$x_3 = -2fk_2 - lk_3k_5 + E^*(f+l)(2fE^{\circ*}(1-v^{\circ}) + lk_3(1-v^{\circ*})).$$

Для того, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^{*\circ} + \pi(c^2 - b^2) \sigma_0^* = \pi c^2 \sigma_0. \quad (28)$$

Перейшовши до об'ємних часток складових композита, отримуємо:

$$\sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^{*\circ} l + \sigma_0^* (1-f-l) = \sigma_0. \quad (29)$$

Підставивши (26) та (27) в (29), маємо:

$$\sigma_0^{*\circ} = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)}. \quad (30)$$

Тоді (26) та (27) запишеться у вигляді:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)} m, \quad (31)$$

$$\sigma_0^{\circ} = \frac{\sigma_0}{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1-f-l)} \cdot \frac{g_1 + g_2 m}{g_3}. \quad (32)$$

Переміщення визначаємо за формулою:

$$u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_1. \quad (33)$$

З урахуванням того, що для цієї задачі виконується умова  $u_z(0) = 0$ , стала  $C_1 = 0$ , тому вираз для переміщення набуває вигляду:

$$u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (34)$$

Тоді третє зі співвідношень (25) з урахуванням (18) та (34) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^*(1-v^* - 2(v^*)^2)}{E^*(1-v^*)} - \frac{2Kv^*}{(1-v^*)} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (35)$$



З урахуванням (22), (30)–(32), після перетворень отримуємо формулу для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропними складовими за наявності перехідного шару між ними:

$$E_1 = \frac{l + f \frac{g_1 + g_2 m}{g_3} + m(1 - f - l)}{\frac{g_1 + g_2 m}{g_3(1 - \nu^\circ)} \left( \frac{1 - \nu^\circ - 2\nu^{\circ 2}}{E^\circ} + \frac{2\nu^{\circ 2} x_1}{k_8} \right) + 2 \frac{\nu^\circ}{k_8} (2mE^{\circ*} \nu^* (f + l)(1 - f - l) + l\nu^{\circ*} (k_6 + (f + l)k_7))}. \quad (36)$$

### ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ПОЗДОВЖНЬОГО МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ КОМПОЗИТІВ

Проведемо розрахунок поздовжнього модуля пружності  $E_1$ , отриманого за формулою (36), варіюючи об'ємним вмістом перехідного шару. Розглянемо односпрямований волокнистий композит (склопластик) з гексагональною укладкою циліндричних скляних волокон в епоксидній матриці. Волокна, матриця та перехідний шар є ізотропними з наступними пружними характеристиками: скловолокно –  $E^\circ = 70$  ГПа,  $\nu^\circ = 0,2$ , епоксидна матриця –  $E^* = 2,91$  ГПа,  $\nu^* = 0,356$ , перехідний шар –  $E^{\circ*} = 5,4$  ГПа,  $\nu^{\circ*} = 0,34$  [16].

Зафіксуємо об'ємну частку волокна  $f = 0,1$ , а об'ємну частку перехідного шару візьмемо в діапазоні  $[0,1; \dots; 0,4]$  з кроком  $0,05$ . Результати обчислень зведені в табл. 1 та проілюстровані на рис. 3.

Таблиця 1

$l$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$E_1$	9,8801	10,0052	10,1301	10,2549	10,3795	10,5041	10,6287

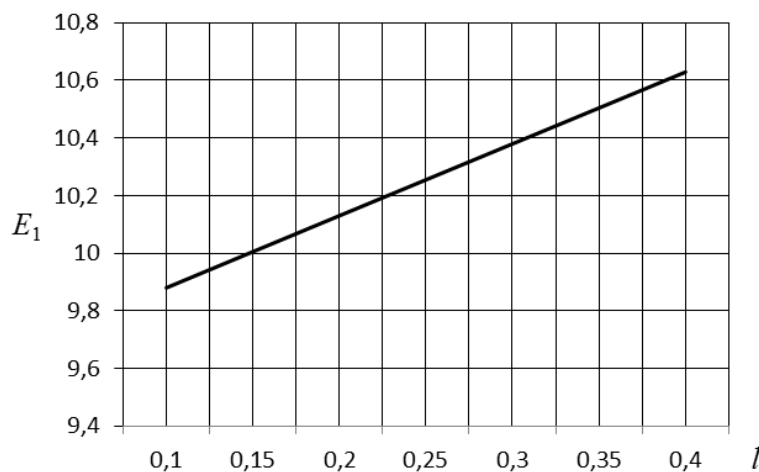


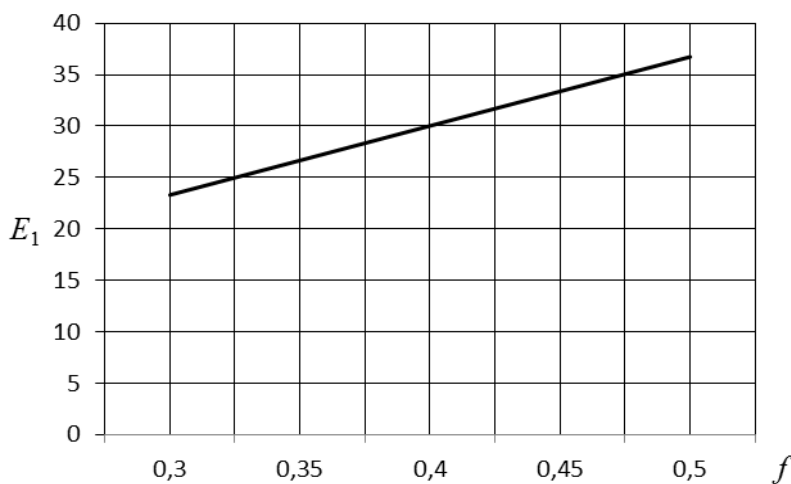
Рис. 3. Значення  $E_1$  при  $f = 0,1$  та  $l \in [0,1; 0,4]$

Як видно з рис. 3, залежність поздовжнього модуля пружності  $E_1$  від об'ємної частки перехідного шару  $l$  має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

Зафіксуємо тепер об'ємну частку перехідного шару  $l = 0,1$ , а об'ємну частку волокна візьмемо в діапазоні  $[0,3; \dots; 0,5]$  з кроком  $0,05$ . Результати обчислень зведені в табл. 2 та проілюстровані на рис. 4.

Таблиця 2

$f$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$E_1$	23,3099	26,6658	30,0212	33,3761	36,7306

Рис. 4. Значення  $E_1$  при  $l = 0,1$  та  $f \in [0,3; 0,5]$ 

Залежність поздовжнього модуля пружності від об'ємної частки волокна при фіксованому значенні  $l$  має також яскраво виражений зростаючий характер, близький до лінійного (рис. 4).

### ВИСНОВКИ

У результаті виконаного дослідження отримано аналітичне співвідношення для ефективного поздовжнього модуля пружності  $E_1$  для композита з ізотропними компонентами за наявності перехідного шару між ними. Воно відображає залежність від пружних характеристик матриці, перехідного шару, волокна та об'ємних часток волокна та перехідного шару в матеріалі композита.

Проведено розрахунок значень поздовжнього модуля пружності для композита, варіюючи об'ємним вмістом перехідного шару. Відзначимо, що і при фіксованій об'ємній частці як волокна, так і перехідного шару залежність поздовжнього модуля пружності  $E_1$  від об'ємної частки перехідного шару і волокна відповідно має зростаючий характер, що узгоджується з фізичним змістом цих показників.

Варто відзначити, що запропонована формула включає, зокрема, і пружні характеристики перехідного шару, що ускладнює її широке використання. Це пов'язано з тим, що пружні характеристики міжфазових шарів для конкретних пар матриць та наповнювачів визначені для дуже вузького кола композитів. Надалі доцільним буде виведення формули, що включає лише пружні характеристики матриці та волокна.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Tang T., Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2007. Vol. 2, Issue 9. P. 1813–1830.
2. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры: монография / отв. за вып. Р. О. Лазарева. Днепропетровск: Пороги, 2008. 196 с.
3. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 2. С. 28–48.

4. Srivastava V. K., Gabbert U., Berger H., Singh S. Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2011. Vol. 3, Issue 1. P. 52–68.
5. Klusemann B., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*. 2010. Vol. 30 (4). P. 374–386.
6. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.
7. Гребенюк С. М. Визначення пружних сталих композита з транстропними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2012. № 1. С. 62–76.
8. Kari S., Berger H., Gabbert U. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*. 2007. Vol. 68, Issues 3-4. P. 684–691.
9. Lopez-Realpozo J. C., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R. Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, Issue 6. P. 1253–1262.
10. Ko Y.-F., Ju J. W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223 (11). P. 2437–2458.
11. Sockalingam S., Nilakantan G. Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2012. Vol. 13(3). P. 282–295.
12. Würkner M., Berger H., Gabbert U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*. 2013. Vol. 63. P. 1–9.
13. Магомедов Г. М., Яхьяева Х. Ш., Козлов Г. В. Молекулярная подвижность и межфазные явления в композитах эпоксиполимер/стекловолокно. *Известия ДГПУ: Естественные и точные науки*. 2013. № 4. С. 16–19.
14. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита при наличии промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение»*. 2014. № 1. С. 58–67.
15. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценка теплопроводности волокнистого композита при непрерывном изменении теплопроводности промежуточного слоя между волокном и матрицей. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение»*. 2013. № 4. С. 3–15.
16. Ашихмин В. А., Мерзлякова Н. А., Шапаев И. В. Влияние межфазного слоя на упругие характеристики волокнистого материала с гексагональной структурой. *Научно-практический электронный журнал Аллея Науки*. 2018. № 4 (20).
17. Yao Y., Chen S., Chen P. The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. *Mechanics of Materials*. 2013. Vol. 58. P. 35–54.
18. Ерасов В. С., Макарычева А. И. Определение модуля упругости межфазной зоны в слоистом полимерном композиционном материале. *Авиационные материалы и технологии*. 2014. № 2. С. 53–55.
19. Нелюб В. А. Характеристики межфазных слоев полимерных композиционных материалов. *Клеи. Герметики. Технологии*. 2013. № 6. С. 23–25.
20. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с транстропной матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць*. 2011. Вип.12. С. 62–68.

## REFERENCES

1. Tang, T. & Yu, W. (2007). A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 2 (9), pp. 1813–1830. doi: 10.2140/jomms.2007.2.1813.
2. Bol'shakov, V. I., Andrianov, I. V. & Danishevskij, V. V. (2008). Asymptotic methods for calculating composite materials with allowance for internal structure. Dnepropetrovsk: «Porogy» (In Ukraine).
3. Dimitrienko, Yu. I., Gubareva, E. A. & Sborshnikov, S. V. (2014). Finite-element modeling of effective viscoelastic properties of unidirectional composite materials. *Mathematical Modeling and Numerical Methods*, Vol. 2, pp. 28–48. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/4986a9de2f7714798765784534f1cd23/mmcm12.pdf>.
4. Srivastava, V. K., Gabbert, U., Berger, H. & Singh, S. (2011). Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size. *International Journal of Engineering. Science and Technology*, Vol. 3 (1), pp. 52–68. doi: 10.4314/ijest.v3i1.67638.
5. Klusemann, B. & Svendsen, B. (2010). Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische mechanik*, Vol. 30 (4), pp. 374–386. Available at: [http://www.ovgu.de/ifme/zeitschrift\\_tm/2010\\_Heft4/07\\_Klusemann.pdf](http://www.ovgu.de/ifme/zeitschrift_tm/2010_Heft4/07_Klusemann.pdf).
6. Klastorny, M., Konderla, P. & Piekarskij, R. (2009). The exact stiffness theory of unidirectional fibrous-reinforced composites. *Mechanics of composite materials*, Vol. 45 (1), pp. 109–144.
7. Grebenyuk, S. M. (2012). Determination of elastic stable composite with transistor matrix and fiber based on the kinematic condition of harmonization. *Visnik of the Zaporizhzhya National University*, No. 1, pp. 62–76.
8. Kari, S., Berger H. & Gabbert, U. (2007). Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*, Vol. 68 (3-4), pp. 684–691. doi: 10.1016/j.compscitech.2007.09.009.
9. Lopez-Realpozo, J. C., Rodriguez-Ramos, R. & Guinovart-Diaz, R. (2014). Effective elastic shear stiffness of a periodic fibrous composite with non-uniform imperfect contact between the matrix and the fibers. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51 (6), pp. 1253–1262. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.015.
10. Ko, Y.-F. & Ju, J. W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*, Vol. 223 (11), pp. 2437–2458.
11. Sockalingam, S. & Nilakantan, G. (2012). Fiber-matrix interface characterization through the microbond test. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 13 (3), pp. 282–295. doi: 10.5139/IJASS.2012.13.3.282.
12. Würkner, M., Berger, H. & Gabbert, U. (2013). Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 63, pp. 1–9. doi: 10.1016/j.ijengsci.2012.10.002.
13. Magomedov, G. M., Yah`yaeva, H. Sh. & Kozlov, G. V. (2013). Molecular mobility and interfacial phenomena in epoxy polymer / fiberglass composites. *Izvestiya DGPU: Natural and exact sciences*, No. 4, pp. 16–19.
14. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel`eva, I. Yu. (2014). Estimates of the effective conductivity of the composite with the presence of the intermediate layer between fiber and matrix. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series «Engineering»*, No. 1, pp. 58–67.
15. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel`eva, I. Yu. (2013). Evaluation of the thermal conductivity of the fiber composite with a continuous change in the thermal conductivity of the intermediate layer between the fiber and the matrix. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series «Engineering»*, No. 4, pp. 3–15.

16. Ashihmin, V. A., Merzlyakova, N. A. & Shapaev, I. V. (2018). Effect of interphase layers on the elastic characteristics of the fibrous material with a hexagonal structure. Scientific and practical electronic journal of Science Alley, No. 4 (20). Available at: [https://alley-science.ru/sovremennaya\\_nauka\\_i\\_ee\\_razvitiye\\_\\_4\\_20\\_\\_2018/](https://alley-science.ru/sovremennaya_nauka_i_ee_razvitiye__4_20__2018/).
17. Yao, Y., Chen, S. & Chen, P. (2013). The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. Mechanics of Materials, Vol. 58, pp. 35–54. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.11.008.
18. Erasov, V. S. & Makarycheva, A. I. (2014). Determination of the elastic modulus of the interphase zone in a layered polymer composite material. Aviation materials and technologies, No. 2., pp. 53–55. doi: 10.18577/2071-9140-2014-0-2-53-55.
19. Nelyub V. A. (2013). Characteristics of interfacial layers of polymer composite materials. Adhesives. Sealants. Technology, No. 6, pp. 23–25.
20. Grebenyuk, S. N. (2011). Elastic characteristics of a composite material with a transversely isotropic matrix and fiber. Methods of solving applied problems of mechanics of a deformable solid: a collection of scientific works, No. 12, pp. 62–68.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-15

## **КОНТАКТ ПЛОСКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ ПРИ НЕМОНОТОННОМУ НАВАНТАЖУВАННІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ**

Стреляєв Ю. М., к. ф.-м. н, Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Стреляєв О. Ю., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com

Отримано чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі про взаємодію жорсткого циліндричного штампа з плоскою підшовою і пружного півпростору при наявності тертя Кулона між ними. Навантаження штампа здійснювалося в два етапи. На початку, за рахунок монотонно зростаючого нормального зміщення, штамп вдавлювався в півпростір на фіксовану величину заглиблення. Потім, за рахунок монотонного зменшення нормального зміщення, відбувався другий етап неповного розвантаження. У постановці задачі використовувалася гіпотеза про можливість малого збурення умов процесу навантаження взаємодіючих тіл у квазістатичних контактних задачах теорії пружності з урахуванням тертя Кулона. На основі цієї гіпотези крайові умови контактної взаємодії тіл на кожному кроці дискретного процесу навантаження виражені у вигляді рівностей і нерівностей. Отримані крайові умови є модифікацією крайових умов квазістатичної контактної задачі в класичній постановці. Механічний сенс цієї модифікації полягає у введенні малого запізнювання дії нормальних контактних напружень відносно дотичних контактних напружень на кожному кроці навантаження. Квазістатична контактна задача в модифікованій постановці зведена до послідовного розв'язування на кожному кроці навантаження системи нелінійних крайових інтегральних рівнянь. Чисельний алгоритм розв'язання отриманих систем полягав у їх дискретизації і використанні ітераційного процесу для розв'язання дискретного аналога системи на кожному кроці навантаження. Виконано порівняння отриманих чисельних результатів з відомим чисельним розв'язком задачі, а також з розв'язком квазістатичної задачі в немодифікованій постановці. Аналіз результатів показав, що прийнята модифікація квазістатичної постановки контактної задачі є коректною і запропонований підхід дозволяє отримати розв'язок цієї задачі, достатньо близький до її відомого чисельного розв'язку.

*Ключові слова:* контактна задача, пружність, тертя Кулона, плоский штамп, розвантаження, інтегральне рівняння, ітераційний метод.