

16. Ashihmin, V. A., Merzlyakova, N. A. & Shapaev, I. V. (2018). Effect of interphase layers on the elastic characteristics of the fibrous material with a hexagonal structure. Scientific and practical electronic journal of Science Alley, No. 4 (20). Available at: https://alley-science.ru/sovremennaya_nauka_i_ee_razvitiye__4_20___2018/.
17. Yao, Y., Chen, S. & Chen, P. (2013). The effect of a graded interphase on the mechanism of stress transfer in a fiber-reinforced composite. Mechanics of Materials, Vol. 58, pp. 35–54. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.11.008.
18. Erasov, V. S. & Makarycheva, A. I. (2014). Determination of the elastic modulus of the interphase zone in a layered polymer composite material. Aviation materials and technologies, No. 2., pp. 53–55. doi: 10.18577/2071-9140-2014-0-2-53-55.
19. Nelyub V. A. (2013). Characteristics of interfacial layers of polymer composite materials. Adhesives. Sealants. Technology, No. 6, pp. 23–25.
20. Grebenyuk, S. N. (2011). Elastic characteristics of a composite material with a transversely isotropic matrix and fiber. Methods of solving applied problems of mechanics of a deformable solid: a collection of scientific works, No. 12, pp. 62–68.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-15

КОНТАКТ ПЛОСКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ ПРИ НЕМОНОТОННОМУ НАВАНТАЖУВАННІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

Стреляєв Ю. М., к. ф.-м. н, Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Стреляєв О. Ю., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com

Отримано чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі про взаємодію жорсткого циліндричного штампа з плоскою підшоною і пружного півпростору при наявності тертя Кулона між ними. Навантаження штампа здійснювалося в два етапи. На початку, за рахунок монотонно зростаючого нормального зміщення, штамп вдавлювався в півпростір на фіксовану величину заглиблення. Потім, за рахунок монотонного зменшення нормального зміщення, відбувався другий етап неповного розвантаження. У постановці задачі використовувалася гіпотеза про можливість малого збурення умов процесу навантаження взаємодіючих тіл у квазістатичних контактних задачах теорії пружності з урахуванням тертя Кулона. На основі цієї гіпотези крайові умови контактної взаємодії тіл на кожному кроці дискретного процесу навантаження виражені у вигляді рівностей і нерівностей. Отримані крайові умови є модифікацією крайових умов квазістатичної контактної задачі в класичній постановці. Механічний сенс цієї модифікації полягає у введенні малого запізнювання дії нормальних контактних напружень відносно дотичних контактних напружень на кожному кроці навантаження. Квазістатична контактна задача в модифікованій постановці зведена до послідовного розв'язування на кожному кроці навантаження системи нелінійних крайових інтегральних рівнянь. Чисельний алгоритм розв'язання отриманих систем полягав у їх дискретизації і використанні ітераційного процесу для розв'язання дискретного аналога системи на кожному кроці навантаження. Виконано порівняння отриманих чисельних результатів з відомим чисельним розв'язком задачі, а також з розв'язком квазістатичної задачі в немодифікованій постановці. Аналіз результатів показав, що прийнята модифікація квазістатичної постановки контактної задачі є коректною і запропонований підхід дозволяє отримати розв'язок цієї задачі, достатньо близький до її відомого чисельного розв'язку.

Ключові слова: контактна задача, пружність, тертя Кулона, плоский штамп, розвантаження, інтегральне рівняння, ітераційний метод.

CONTACT WITH FRICTION OF A FLAT CYLINDRICAL PUNCH WITH AN ELASTIC HALF-SPACE UNDER NONMONOTONIC LOADING

Streliaiev Yu. M., Klymenko M. I., Streliaiev O. Yu.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.com

A numerical solution to the quasistatic contact problem of the interaction of a rigid flat cylindrical punch with an elastic half-space taking into account Coulomb friction is obtained. The process of loading the stamp was carried out in two stages. At the first stage, the punch was pressed into the half-space to the fixed value of indentation depth due to the monotonically increasing normal displacement. Then, due to the monotonous decrease in the normal displacement of the stamp, the second stage of incomplete unloading was realized. The statement of the problem is based on the original hypothesis of the possibility of a small perturbation of the loading conditions in quasistatic frictional contact problems of elasticity. New modification of boundary conditions of the quasistatic contact problem is obtained using this hypothesis. The boundary conditions for contact interaction of bodies at each step of discrete loading process are expressed as a system of equalities and inequalities. Mechanical meaning of this modification is an introduction of a small delay in action of normal contact stresses with respect to tangential contact stresses at each step of loading process. The quasistatic contact problem in the modified formulation is reduced to a series of similar systems of the non-linear boundary integral equations. Each of the obtained systems describes the conditions of contact interaction at each step of loading. Numerical algorithm for solving these systems consisted of discretizing the obtained integral equations and using the iterative process to solve the discrete analog of the system at each loading step. The obtained numerical results are compared with the well-known numerical solution of the problem, as well as with the solution of a quasistatic problem in an unmodified statement. The analysis of the results showed that the accepted hypothesis about the modification of the quasistatic statement is correct for this contact problem and the proposed approach allows us to obtain a solution which is close enough to known numerical solution of this problem.

Key words: contact problem, elasticity, Coulomb friction, flat punch, unloading, integral equation, iterative method.

ВСТУП

Одним із суттєвих факторів, що впливають на міцність і знос взаємодіючих елементів різних механічних систем, є тертя, що виникає на контактуючих поверхнях елементів цих систем. Основна трудність урахування тертя в контактних задачах полягає в тому, що на поверхні контакту виникають зони часткового зчеплення і проковзування, які заздалегідь невідомі. Ця обставина призводить до появи геометричних і фізичних нелінійностей у таких задачах, що істотно ускладнює їх розв'язання. Уперше аналітичний розв'язок задачі про контакт ідентичних пружних куль з частковим проковзуванням було отримано в роботах С. Cattaneo [1] і R. D. Mindlin [2]. Плоска контактна задача про вдавлювання прямокутного штампа в пружну півплощину при невідомій межі областей зчеплення і проковзування вперше розв'язана Л. О. Галінім [3]. Розв'язок осесиметричної задачі для тіл з різними пружними властивостями знайдено в роботах [4, 5]. Узагальнений метод Вінера–Хопфа для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь деяких плоских і осесиметричних контактних задач використовувався в роботах [6, 7]. Особливий інтерес, обумовлений часто спостережуваними на практиці ушкодженнями поверхонь деталей при немонотонних навантаженнях, представляє дослідження розподілу контактних зусиль, що розвиваються в результаті тертя на контактній поверхні, при зменшенні зовнішнього навантаження, а також під дією коливальних сил. Перші спроби таких досліджень зроблені в роботах [8-11]. Досліджуючи випадок розвантаження для плоского кругового штампа, J. R. Turner встановив [8], що на початковій стадії розвантаження зона проковзування зміщується до центру й одночасно на межі ділянки контакту утворюється вузька кільцева зона зчеплення. R. D. Mindlin і H. Deresiewicz у роботі [9] дослідили розподіли поверхневих зусиль при контакті двох сферичних тіл під дією різних комбінацій нормального і дотичного навантажень. У роботах

[10, 11] виконані експериментальні дослідження контактної взаємодії сферичних тіл за наявності коливальних навантажень. Водночас слід зазначити, що чисельні методи розв'язання контактних задач такого типу в літературі досліджені недостатньо. Такі методи, як правило, ґрунтуються на варіаційній постановці задачі [12] або на її зведенні до операторних рівнянь [13-15]. У багатьох випадках при використанні нелінійних крайових інтегральних рівнянь автори обмежуються розглядом контактних задач без урахування тертя [13] або задач, у яких тертя враховується за умови повного проковзування тіл [14]. Перевага методу нелінійних крайових інтегральних рівнянь, запропонованого в роботі [15], полягає в тому, що він дозволяє враховувати часткове зчеплення і проковзування на поверхні контакту, а також історію зовнішнього навантаження в процесі взаємодії контактуючих тіл.

Метою даної статті є розв'язання контактних задач про фрикційну взаємодію пружних тіл при комбінованих немонотонних навантаженнях, а також визначення впливу малого збурення умов процесу навантаження взаємодіючих тіл на точність отриманих розв'язків.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо просторову контактну задачу про взаємодію плоского циліндричного штампа радіуса R та пружного півпростору. Вважатимемо, що для взаємодіючих тіл виконано наступні умови: штамп є абсолютно жорстким тілом; півпростір є лінійно-пружним і ізотропним; пружні переміщення точок півпростору малі порівняно з розмірами поверхні контакту. Нехай у ненавантаженому стані підшва штампа дотикається до площини, що обмежує півпростір. Введемо у просторі пов'язану зі штампом прямокутну декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1). Нехай під дією невідомого заздалегідь зовнішнього навантаження, що змінюється у часі, штамп здійснює задане залежне від часу t переміщення γ . Припустимо, що взаємодія тіл супроводжується поверхневим тертям, що описується законом Кулона [16]. Потрібно знайти розподіл питомого контактного навантаження, що діє на підшву штампа з боку пружного півпростору.

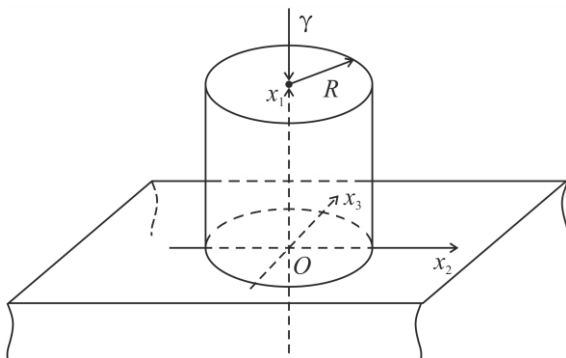


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Вважаючи, що вектор $\gamma(t)$ повільно змінюється при зміні часу t від 0 до фіксованого значення T , будемо нехтувати інерційними і хвильовими ефектами. Виконаємо дискретизацію процесу контактної взаємодії тіл, розглядаючи його як скінченне число l послідовних станів рівноваги (кроків навантажування) в моменти часу $t = t_i$, де $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = T$. Введемо для вектора $\gamma(t)$ і його компонентів на i -ому кроці навантажування наступні позначення:

$\gamma_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}) \equiv \gamma(t_i)$. На основі гіпотези про можливість малого збурення умов навантажування шляхом введення запізнювання контактних тисків відносно дотичних контактних напружень [15] контактна задача заводиться до відшукування на кожному i -му кроці навантажування невідомих функцій $p_{1i}(s)$, $p_{2i}(s)$, $p_{3i}(s)$, що задають нормальну і дотичні складові питомого контактного навантаження в обмеженій області Ω площини Ox_2x_3 (яка містить у собі ділянку контакту) і задовольняють в кожній точці $s = (x_2, x_3) \in \Omega$ наступним співвідношенням:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{li}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{li})_s \geq 0; p_{li}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{li})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{li-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ i = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $\mu > 0$ – коефіцієнт тертя, а функції $F_1(p_i, \Delta_{li})$, $F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})$, $F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$ задаються співвідношеннями

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(p_i, \Delta_{li})_s = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \Delta_{li}; \\ F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s); \\ F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s), \end{array} \right. \quad (2)$$

в яких $\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}$, $\tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}$.

Інтегральні оператори впливу поверхневих напружень на поверхневі пружні переміщення, що входять у співвідношення (2), мають вигляд

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}).$$

Ядра $K_{kj}(s, s')$ цих операторів визначаються відповідно до розв'язків Буссінеска та Черруті [17] з наступних співвідношень:

$$K_{11}(s, s') = \frac{c_1}{r}; K_{12}(s, s') = -K_{21}(s, s') = \frac{c_2(x_2 - x'_2)}{r^2}; K_{13}(s, s') = -K_{31}(s, s') = \frac{c_2(x_3 - x'_3)}{r^2};$$

$$K_{22}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_2 - x'_2)^2}{r^3}; K_{23}(s, s') = -K_{32}(s, s') = \frac{c_3(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3)}{r^3};$$

$$K_{33}(s, s') = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_3 - x'_3)^2}{r^3};$$

$$c_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}; c_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{2\pi E_1}; c_3 = \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{\pi E_2};$$

$$r = |s - s'| = \sqrt{(x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2}. \quad (3)$$

У співвідношеннях (3) E_1 , E_2 і ν_1 , ν_2 – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона першого та другого тіла відповідно, а x_2 , x'_2 та x_3 , x'_3 – абсциси та ординати точок s і s' області Ω відповідно. Штамп вважатимемо умовно пружним тілом з нескінченним модулем Юнга, тобто приймемо $\frac{1}{E_1} = 0$ у співвідношеннях (3).

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТА АЛГОРИТМ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Використовуючи допоміжні дійсні функції вигляду [18]:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z, \end{cases}$$

систему (1) при фіксованому i можна звести до наступної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) = h \left(p_{1i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \Delta_{1i} \right) \right); \\ p_{2i}(s) = q \left(p_{2i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), p_{3i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ p_{3i}(s) = q \left(p_{3i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), p_{2i}(s) - E \cdot \left(\sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (4)$$

де E – довільне додатне число. Отже, розглянута контактна задача зводиться до послідовного розв'язання на кожному i -му кроці системи нелінійних інтегральних рівнянь (4) відносно невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$.

Нехай область Ω – це відкритий квадрат, обмежений паралельними осям x_2, x_3 відрізками прямих, с центром у початку координат. Для отримання чисельного розв'язку системи (4) розіб'ємо Ω на n^2 однакових неперетинних квадратів $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^2}$, орієнтованих подібно Ω . Вважаючи, що при кожному фіксованому i невідомі функції $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ приймають на кожному граничному елементі ω_k сталі значення $y_{3k-2i}, y_{3k-i}, y_{3ki}$, отримаємо для визначення цих значень наступну серію l систем, кожна з яких містить $3n^2$ скалярних нелінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{3k-2i} = h \left(y_{3k-2i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot y_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ y_{3k-i} = q \left(y_{3k-i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot y_{ji} - b_{3k-i} \right), y_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot y_{ji} - b_{3ki} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ y_{3ki} = q \left(y_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot y_{ji} - b_{3ki} \right), y_{3k-i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot y_{ji} - b_{3k-i} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ k = \overline{1, n^2}, \quad i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (5)$$

У системі (5) числові параметри a_{kj} є елементами матриці податливості взаємодіючих тіл, а b_{ki} визначають умови навантаження взаємодіючих тіл на i -му кроці навантажування [15].

Наближений розв'язок системи (5) при кожному фіксованому i шукатимемо за допомогою методу простої ітерації, використовуючи наступний ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(y_{1i}^{(0)}, y_{2i}^{(0)}, \dots, y_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}; \quad k = \overline{1, n^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ & y_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left(y_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ & y_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left(y_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), y_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} y_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right); \\ & y_{3ki}^{(m+1)} = q \left(y_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} y_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), y_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} y_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot y_{3k-2i-1} \right). \end{aligned} \right. \quad (6)$$

У роботі [19] доведено, що збіжність ітераційного процесу (6) на кожному i -му кроці навантажування при будь-якому виборі початкового наближення $\left(y_{1i}^{(0)}, y_{2i}^{(0)}, \dots, y_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}$ можна забезпечити належним вибором довільної додатної константи E . При послідовному розв'язанні серії систем (5) за допомогою ітераційного процесу (6) природно обирати наближений розв'язок системи (5), отриманий на $(i-1)$ -му кроці навантажування, за початкове наближення на i -му кроці. При $i=1$ вважатимемо вектор початкового наближення нульовим.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

Для чисельних розрахунків використовувались наступні вихідні дані. Радіус штампа $R=0,02$ м. Модуль Юнга E_2 і коефіцієнт Пуассона ν_2 півпростору були прийняті рівними $3,5 \cdot 10^4$ МПа і $0,44$ відповідно. Коефіцієнт тертя $\mu=0,07$. Відношення $\mu/\gamma=0,665$, де $\gamma=(1-2\nu_2)/(2-2\nu_2)$. Використовувалась поверхнева сітка, яка складалась з $41 \times 41=1681$ рівних квадратних граничних елементів з довжиною сторони $0,001$ м. Процес навантажування складався з двох етапів: початкового етапу вдавлювання штампа в півпростір і наступного етапу «розвантаження» за рахунок зворотного переміщення штампа до певного значення величини заглиблення штампа в півпростір. Початковий етап навантажування здійснювався за l кроків згідно з наступним характером зміни нормального зміщення Δ_{li} штампа, вираженого у метрах:

$$\Delta_{li} = -\frac{|\Delta_1|}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}. \quad (7)$$

Етап «розвантаження» здійснювався також за l кроків відповідно до співвідношення:

$$\Delta_{li} = -|\Delta_1| + \frac{|\Delta_1| \cdot (1-W)}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (8)$$

де $W=0,818$ [8]. Величина $|\Delta_1|$ максимального заглиблення штампа в півпростір, що входить у співвідношення (7), (8), обиралась рівною 10^{-4} м. Дотичні зміщення штампа Δ_{2i} і Δ_{3i} вздовж осей Ox_2 і Ox_3 вважались рівними нулю на всіх кроках навантажування. Чисельний розв'язок, отриманий на першому етапі навантажування при $l=80$ у співвідношеннях (7), зіставлявся з відомим розв'язком цієї задачі [8] та з чисельним

розв'язком квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20] при 40 кроках навантажування, а також з чисельним розв'язком відповідної статичної задачі, отриманим згідно з [20] при одному кроці навантажування. На рис. 2 показано залежність безрозмірної величини $q/\mu p$ від безрозмірної координати x/a , де q і p є відповідно дотичною і нормальною складовими питомого контактного навантаження у вузлових точках сітки, розташованих на осі Ox_2 ; a – радіус ділянки контакту (в розглянутому випадку $a = R$).

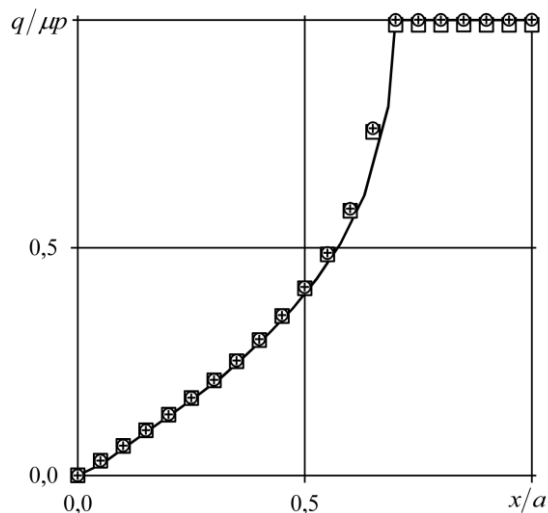


Рис. 2. Розв'язок контактної задачі (монотонне навантажування)

Тут суцільна лінія відповідає розв'язку [8], квадрати – отриманому чисельному розв'язку, круги – чисельному розв'язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20], символи «+» – чисельному розв'язку статичної задачі, отриманому згідно з [20]. Результати, наведені на рис. 2, свідчать про те, що отриманий чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі при 80 кроках навантажування відрізняється від розв'язку цієї задачі в немодифікованій постановці при 40 кроках навантажування несуттєво (відносна похибка не перевищує 2% відносно найбільшого значення величини $q/\mu p$). Максимальне відхилення отриманого розв'язку від розв'язку [8] складає приблизно 5%, а в переважній більшості вузлових точок не перевищує 2%. Похибка в 5% досягається в точці, розташованій поблизу межі зони зчеплення, де функція $q/\mu p$ має високий градієнт (див. рис. 2). Представлені на рис. 2 результати також свідчать про те, що отриманий запропонованим методом чисельний розв'язок квазістатичної контактної задачі (при $l = 80$) і отриманий згідно з [20] чисельний розв'язок відповідної статичної задачі (при $l = 1$) практично співпадають. Цей факт доводить, що квазістатичну контактну задачу при монотонному вдавлюванні плоского циліндричного штампa в пружний півпростір можна розглядати в статичній постановці.

На рис. 3 представлені результати, отримані при двохетапному навантаженні, що здійснювалося згідно зі співвідношеннями (7) і (8) при $l = 60$. Тут квадрати відповідають отриманому чисельному розв'язку, круги – чисельному розв'язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [20], суцільна лінія – відомому чисельному розв'язку [8].

Результати, наведені на рис. 3, свідчать, що в переважній більшості вузлових точок центральної зони зчеплення і в зоні проковзування відхилення отриманого розв'язку від розв'язку [8] не перевищує 3% відносно максимального значення величини $q/\mu p$. Лише в окремих точках, розташованих біля межі зони проковзування, відносне відхилення порівнюваних розв'язків сягає 8%. Максимальне значення цього відхилення, що дорівнює приблизно 26%, досягається в точці на межі підшви штампa. Таке збільшення відхилення можна пояснити тим, що біля межі області контакту крива розв'язку [8] (суцільна лінія на рис. 3) має дуже високий градієнт. Порівняння отриманого чисельного розв'язку (квадрати

на рис. 3) з чисельним розв'язком цієї задачі в немодифікованій постановці (круги на рис. 3) свідчить про добру близькість порівнюваних величин. Максимальне відхилення порівнюваних розв'язків тут склало приблизно 3%.

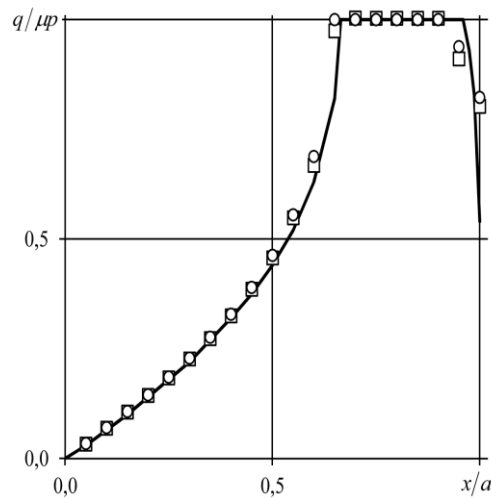


Рис. 3. Розв'язок контактної задачі (немонотонне навантажування з розвантаженням)

ВИСНОВКИ

Отримано чисельний розв'язок контактної задачі про фрикційну взаємодію плоского циліндричного штампа та пружного півпростору при немонотонному законі нормального навантажування штампа. Задача розглядалася в модифікованій квазістатичній постановці. Процес навантажування складався з початкового етапу монотонного вдавлювання штампа в півпростір і наступного етапу неповного розвантажування. Порівняння отриманих чисельних результатів з відомим розв'язком задачі [8], а також з чисельним розв'язком квазістатичної задачі в класичній постановці [20] показало, що прийнята в роботі [15] гіпотеза про можливість малого збурення умов навантажування тіл шляхом введення запізнювання контактних тисків відносно дотичних контактних напружень у співвідношеннях закону тертя Кулона є правомірною в розглянутій контактній задачі і розроблений на основі цієї гіпотези метод дозволяє отримати розв'язок задачі, близький до її відомого чисельного розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. Vol. 27, Ser. 6. P. 342–348, 434–436, 474–478.
2. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1949. Vol. 16, №3. P. 259–268.
3. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9, вып. 5. С. 413–424.
4. Spence D. The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity*. 1975. Vol. 5 (3). P. 297–319.
5. Моссаковский В. И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай). *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 418–427.
6. Ostryk V. I., Ulitko A. F. Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion. *Materials Science*. 2013. Vol. 48. №. 4. С. 444–455.
7. Острик В. И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. № 4. С. 605–619.
8. Turner J. R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and its Appl.* 1979. Vol. 24. P. 439–469.

9. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Applied Mech.* 1953. 20, 327-344.
10. Johnson K. L. Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1961. 3(4), 362-368.
11. Tyler J. C., Burton R. A., Ku P. A. Contact fatigue under oscillatory normal load. *ASLE TRANSACTIONS.* 1963. 6(4), 255-269.
12. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития. *Прикладная математика и механика.* 2009. Вып. 73, № 3. С. 492–502.
13. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта. *Прикладная математика и механика.* 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
14. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости. *Прикладная математика и механика.* 2004. Т. 68, вып. 3. С. 516–527.
15. Стреляев Ю. М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки.* 2016. Т. 20, № 2. С. 306–327.
16. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM.* 1977. В. 57, Н. 5. Р. Т3–Т17.
17. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
18. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2013. Т. 56, № 3. С. 29–42.
19. Стреляев Ю. М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2014. № 2. С.161–172.
20. Александров А. И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* 2014. №. 3 (7). С. 36–40.

REFERENCES

1. Cattaneo, C. (1938). Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, Vol. 27, Ser. 6, pp. 342-348, 434-436, 474-478.
2. Mindlin, R. D. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 16, No. 3, pp. 259-268.
3. Galin, L. A. (1945). The indentation of a punch in the presence of friction and adhesion. *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. 9, Issue 5, pp. 413-424.
4. Spence, D. A. (1975). The Hertz contact problem with finite friction. *J. of Elasticity*, Vol. 5(3), pp. 297-319.
5. Mossakovskii, V. I. (1963). Compression of elastic bodies under conditions of adhesion (axisymmetric case). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 27, Issue 3, pp. 630-643.
6. Ostryk, V. I. & Ulitko, F. (2013). Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion. *Materials Science*, Vol. 48, No. 4, pp. 444-455.
7. Ostryk, V. I. (2013). Axisymmetric contact of a punch of polynomial profile with an elastic half-space when there is friction and adhesion. *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 77, No. 4, pp. 433-444.
8. Turner, J. R. (1979). The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and ist Appl.*, Vol. 24, pp. 439-469.

9. Mindlin, R. D. & Deresiewicz, H. (1953). Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Applied Mech.*, 20, pp. 327-344.
10. Johnson, K. L. (1961). Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 3(4), pp. 362-368.
11. Tyler, J. C., Burton, R. A. & Ku, P. A. (1963). Contact fatigue under oscillatory normal load. *ASLE TRANSACTIONS*, 6(4), pp. 255-269.
12. Kravchuk, A. S. (2009). The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *J. Appl. Math. Mech.*, Issue 73, No. 3, pp. 351-357.
13. Galanov, B. A. (1985). The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 49, Issue 5, pp. 634-640.
14. Aleksandrov, V. M. & Pozharskii, D. A. (2004). Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 68, Issue 3, pp. 463-472.
15. Streliaiev, Yu. M. (2016). A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, Vol. 20, No. 2, pp. 306-327.
16. Kalker, J. J. (1977). A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*, B. 57, H. 5, pp. T3-T17.
17. Johnson, K. L. (1989). *Contact Mechanics*. Moscow: Mir.
18. Aleksandrov, A. I. (2015). A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction. *Matematychni metody ta fizyko-mexanichni polya*, No. 3, pp. 29-42.
19. Streliaiev, Y. M. (2014). Solution of the quasistatic contact problem of elasticity with friction. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 2, pp. 161-172.
20. Alexandrov, A. I. & Streliaiev, Y. M. (2014). Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, No. 3(7), pp. 36-40.