УДК 519.8 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-01

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПОЛІРОЗМІЩЕННЯХ ПРИ СТАЛОСТІ СУМ КООРДИНАТ У РОЗМІЩЕННЯХ

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков І. М.

Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, м. Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті розглядається одна із задач оптимізації, а саме: лінійна умовна повністю комбінаторна задача евклідової оптимізації на поліp озміщеннях, у якій сума координат у розміщеннях константна. Ця задача полягає в мінімізації лінійної цільової функції за лінійних обмежень, які виражають умову, що ті координати допустимої точки, які входять в одне розміщення поліро зміщення, в сумі дорівнюють сталій, яку можна вважати одиницею. Комбінаторним обмеженням цієї задачі є те, що допустима точка є поліро зміщенням.

Для розв'язування задачі запропоновано та обґрунтовано метод гілок та меж. Для методу висвітлені правила галуження допустимих підмножин, оцінювання підмножин і відсікання. У роботі запропоновано правило оцінювання допустимих множин та доведено теорему, яка встановлює оцінку допустимої підмножини. Принцип оцінювання, який реалізовано в теоремі, полягає в тому, що в якості оцінки беруть суму двох доданків, один з яких є сумою тих елементів цільової функції, які відповідають визначеним у допустимій множині, що оцінюється, а другий – є мінімумом на комбінаторній множині поліро зміщень, яка утворюється спеціальним чином, лінійної цільової функції, що є тією частиною вихідної цільової функції, в яку входять невизначені в допустимій множині, що оцінюється, змінні.

Доведені деякі властивості оцінок, а саме: 1) для введеного способу оцінювання та галуження допустимих підмножин оцінка наступної підмножини на гілці дерева галуження від кореня до листа буде не меншого від оцінки попередньої підмножини; 2) на одному рівні глибини від кореня дерева галуження оцінки допустимих підмножин, що є підмножинами однієї і тієї ж допустимої підмножини, при русі від верхніх гілок до нижніх гілок підмножини розташовані нижче підмножини мають більші оцінки.

У статті наведено ілюстративний приклад, який поліпшує сприйняття матеріалу.

Ключові слова: комбінаторні ігрові задачі, метод гілок та меж, поліро зміщення, розміщення.

SOLVING OF THE LINEAR OPTIMIZATION PROBLEM ON POLYARRANGEMENTS WITH THE CONSTANT SUM OF COORDINATES IN THE ARRANGEMENTS

Iemets O. O., Yemets` O. O., Polyakov I. M.

Poltava University of Economics and Trade,
Coval str., 3, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

One of the optimization problems is considered in the article, namely, the linear conditionally complete combinatorial problem of Euclidean optimization on polyarrangements, in which the sum of coordinates in arrangements is constant. This problem is to minimize the linear objective function for linear constraints, which express the condition that those coordinates of the admissible point, which are included in a single arrangement of polyarrangements, in the sum equal to a constant, which can be considered as one. The combinatorial constraint of this problem is that the admissible point is a polyarrangement.

To solve the problem, the branch and bound method is proposed and substantiated. The rules of the branching of admissible subsets, the estimation of subsets and the cutting are proposed for the method. A rule for estimating admissible sets and a theorem that establishes the estimate of an admissible subset are proposed in the work. The principle of estimation, which is realized in the theorem, consists of the fact that the sum of two items is taken as an estimate, one of items is the sum of those elements of the objective function, that correspond to those defined in the admissible estimable set, and the second is the minimum on the combinatorial set of polyarrangement, which is formed in a special way, of linear objective function, which is the part of the original objective function, which includes variables that are not defined in an admissible set that is evaluated.

Some properties of estimations are proved, namely: 1) for the introduced method of estimation and branching of admissible subsets, the estimation of the next subset on the branch of the tree branch from the root to the leaf will be not less than the estimate of the previous subset; 2) at one level of depth from the root of the branch tree, the estimation of admissible subsets, which are subsets of one and the same admissible subset, when moving from the upper branches to the lower branches of the subset, located below subsets have higher estimates.

The article presents an illustrative example that improves perception of the material.

Key words: combinatorial gaming problems, the method of branches and boundaries, polyarrangements, arrangements.

ВСТУП

Задачі комбінаторної оптимізації [1] є розділом теорії оптимізації, що швидко і бурхливо розвивається і в якому досліджуються моделі, що використовують як допустимі точки – комбінаторні конфігурації, такі як перестановки, розміщення, сполучення та більш складні. Полірозміщення введені в роботах, які узагальнені в [2, 3] (див. також [4]).

Вивчення комбінаторних ігрових задач на розміщеннях (див., наприклад, [5, 6]), в яких розміщення є мішаною стратегією, а отже, сума координат в ньому є одиницею, призвело до необхідності розв’язувати лінійні комбінаторні задачі на розміщеннях, що мають таку властивість [7]. Можна ставити і більш складні ігрові комбінаторні задачі, в яких допустимими є точки-полірозміщення, що мають сталість сум координат у розміщеннях. Методів розв’язування таких задач немає, отже, актуальним та необхідним є предмет цієї публікації.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо множину полірозміщень [2, 3]. Нехай $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел, а $S(G)$ – її основа, $[G]=\{\eta_1,...,\eta_\nu\}$ – первинна специфікація, де $\eta_1+...+\eta_\nu=\eta$; $1\le\eta_i\le k$ $\forall i\in J_\nu=\{1,2,...,\nu\}$. Нехай $N_1,...,N_s$ – упорядковане розбиття множини $J_\eta=\{1,2,...,\eta\}$ на s підмножин, тобто: $N_i\bigcap N_j=\varnothing$, $\forall i\ne j$; $N_i\ne\varnothing$, $i,j\in J_s$; $\bigcup\limits_{i=1}^{s}N_i=J_\eta$. Розглянемо упорядковане розбиття числа k на s доданків $k_1,...,k_s$ за умов $1\le k_i\le n_i=|N_i|$ $\forall i\in J_s$. Очевидно, що $k_1+...+k_s=k$, $n_1+...+n_s=\eta$. Позначимо $J_n\bigcup\{0\}=J_n^0$. Утворимо множину k_i-розміщень з множини N_i, яку позначимо $E_{n_i}^{k_i}(N_i)$. Нехай її елемент – це π^i, тобто $\pi^i=\left(\pi_{i1},...,\pi_{ik_i}\right)\in E_{n_i}^{k_i}(N_i)$, $i\in J_s$. Об’єднаємо $\forall i$ упорядковані k_i-вибірки π^i в упорядковану k-вибірку з множини J_η $\pi=(\pi(1),...,\pi(k))=\left(\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s}\right)=\left(\pi^1,...,\pi^s\right)$. Нехай H – це множина всіх таких вибірок, тобто $H=\left\{\pi=\left(\pi^1,...,\pi^s\right)\middle|\forall\pi^i\in E_{n_i}^{k_i}(N_i)\,\forall i\in J_s\right\}$. Утворимо k-вибірку g з мультимножини G, вибираючи до неї ті елементи G і в тому порядку, який задає k-вибірка $\pi\in H$, а саме: $g=\left(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)}\right)$. Множину всіх таких вибірок називають [2, 3] загальною множиною полірозміщень і позначають $E_{\eta\nu}^{ks}(G,H)$, тобто $E_{\eta\nu}^{ks}(G,H)=$ $=\left\{\left(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)}\right)\middle|\forall\pi\in H\right\}$.

Розглянемо таку лінійну умовну повністю комбінаторну задачу евклідової оптимізації на полірозміщеннях [2, 3]:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j \to \min \tag{1}$$

за умов

$$y = \left(y_1, ..., y_k\right) = \left(Y_1, ..., Y_i, ..., Y_s\right) \in E_{\eta\nu}^{ks}\left(G^y\right); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} y_{m_i+j} = C_i \quad \forall i \in J_s , \tag{3}$$

де $Y_i = \left(y_{m_i+1}, y_{m_i+2}, ..., y_{m_i+k_i}\right)$; $c_j \in R^1 \ \ \forall j \in J_k$; G^y – мультимножина $G^y = \left\{g_1^y, ..., g_\eta^y\right\}$, $g_i^y \in R^1$ $\forall j \in J_\eta$; $C_i = const \in R^1$, $C_i \neq 0 \ \ \forall i \in J_s$, а

$$m_0 = 0; \quad k_0 = 0; \quad m_i = m_{i-1} + k_{i-1} \quad \forall i \in J_s . \tag{4}$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна розглядати задачу вигляду (1)-(3), яка одержана із задачі (1)-(3) такою трансформацією. Нехай мультимножина G^y представлена як сума мультимножин (див., наприклад, [2-4]) $G^y = \sum_{i=1}^{s} G_i^y$, де $G_i^y = \left\{g_{j_1^i}^{y,i}, ..., g_{j_{n_i}^i}^{y,i}\right\}$, а $\left\{j_1^i, ..., j_{n_i}^i\right\} = N_i \quad \forall i \in J_s$. Розділимо всі змінні $y_{m_i+j} \quad \forall j \in J_{k_i}$ та всі елементи $g_{j_t}^y \quad \forall t \in J_{n_i}$ мультимножин G_i^y на сталу C_i, $\forall i \in J_s$. Задача (1)-(3) набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \min \tag{5}$$

за умов

$$x = \left(x_1, ..., x_k\right) = \left(X_1, ..., X_i, ..., X_s\right) \in E_{\eta\nu}^{ks}\left(G\right); \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} = 1 \quad \forall i \in J_s , \tag{7}$$

де виконуються співвідношення (4), а $X_i = \left(x_{m_i+1}, ..., x_{m_i+k_i}\right)$, $G = \sum_{i=1}^{s} G_i$, $G_i = \left\{g_{j_1^i}^{i}, ..., g_{j_{n_i}^i}^{i}\right\}$, k_i-розміщення $X_i \in E_{n_i}^{k_i}\left(G_i\right)$, $\left|\left\{j_1^i, ..., j_{n_i}^i\right\}\right| = n_i$, та зв'язок між еквівалентними задачами (1)-(3) та (5)-(7) встановлюють співвідношення $x_{m_i+j} \cdot C_i = y_{m_i+j} \quad \forall j \in J_{k_i} \ \ g_{j_t^i}^{i} \cdot C^i = g_{j_t^i}^{y,i} \ \ \forall t \in J_{n_i} \ \ \forall i \in J_s$.

Далі розглянемо задачу (5)-(7). Її розв'язування пропонується проводити, використовуючи методологію методу гілок та меж (МГМ).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ

Суттєвим для реалізації алгоритму розв'язування задачі в рамках методологію методу гілок та меж є такі три аспекти. Це, по-перше, оцінювання підмножин допустимих розв'язків. По-друге, це визначення способу галуження множини допустимих розв'язків на підмножини, тобто конкретну реалізацію співвідношення між галуженням «углиб» та «вшир». По-третє, встановлення правил відсікання: констатування, що відсікання відбувається за «класичним» принципом (відсікаються підмножини з не меншою оцінкою, ніж «поточний рекорд» значення цільової функції). Або встановлення й інших правил відсікання підмножин (як таких підмножин, що не мають елементів, які дають кращі значення цільової функції, ніж вже наявні, або таких підмножин, які виявляються порожніми).

Розглянемо **спосіб галуження** множини допустимих розв'язків на підмножини.

Визначимо номери $\alpha_1,...,\alpha_k$ коефіцієнтів цільової функції з нерівностей: $c_{\alpha_1} \ge c_{\alpha_2} \ge ... \ge c_{\alpha_l} \ge 0 > c_{\alpha_{l+1}} \ge ... \ge c_{\alpha_k}$.

З цих нерівностей відповідно до представлення (6) для точки x можемо записати (виокремити) такі

$$c^i_{\alpha^i_1} \ge c^i_{\alpha^i_2} \ge ... \ge c^i_{\alpha^i_{l_i}} \ge 0 > c^i_{\alpha^i_{l_i+1}} \ge ... \ge c^i_{\alpha^i_{k_i}} \quad \forall i \in J_s, \tag{8}$$

що відповідають упорядкуванню за незростанням коефіцієнтів цільової функції при координатах точки X_i, $l_i \in J^0_{k_i} = J_{k_i} \bigcup \{0\}$.

Галуження здійснюватимемо спершу «углиб», потім «ушир», збільшуючи $i \in J_s$, а при фіксованому i в порядку $x_{m_i+j_1}$, $x_{m_i+j_2}$, …, $x_{m_i+j_{l_i}}$, де $j_1 = \alpha^i_1,\ j_2 = \alpha^i_2$, …, $j_{l_i} = \alpha^i_{l_i}$ відповідно до (8). При цьому вважаємо, що елементи, які позначимо $g^i_1,...,g^i_{n_i}$ мультимножини G_i, пронумеровані згідно з порядком

$$g^i_1 \le g^i_2 \le ... \le g^i_{n_i}. \tag{9}$$

При галуженні «вглиб» утворюватимемо ланцюг підмножин

$$D_{t_1} \supset D_{t_2} \supset ... \supset D_{t_1 t_2 ... t_{l_i}}, \tag{10}$$

де $(t_1, t_2, ..., t_\tau) \in E^\tau_{n_i}(J_{n_i})$ – це множина τ-розміщень з множини J_{n_i}, $\tau \in J_{l_i}$. Це будемо робити, надаючи:

змінній $x_{m_i+\alpha^i_1}$ для підмножини D_{t_1} послідовно значення $g^i_1, g^i_2, ..., g^i_{n_i}$ (t_1 – номер в (9) елемента $g^i_{t_1} = x_{m_i+\alpha^i_1}$);

змінній $x_{m_i+\alpha^i_2}$ для підмножини $D_{t_1 t_2}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g^i_{t_1}\}$ (t_2 – номер в (9) елемента $g^i_{t_2} = x_{m_i+\alpha^i_2}$);

…;

змінній $x_{m_i+\alpha^i_j}$ для підмножини $D_{t_1 ... t_j}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g^i_{t_1}, ..., g^i_{t_{j-1}}\}$ $\forall j \in J_{n_i}$ (t_j – номер в (9) елемента $g^i_{t_j} = x_{m_i+\alpha^i_j}$);

…;

змінній $x_{m_i+\alpha^i_{l_i}}$ для підмножини $D_{t_1 ... t_{l_i}}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g^i_{t_1}, ..., g^i_{t_{l_i-1}}\}$ (t_{l_i} – номер в (9) елемента $g^i_{t_{l_i}} = x_{m_i+\alpha^i_{l_i}}$).

Після утворення підмножини $D_{t_1 t_2 ... t_{l_i}}$ при подальшому галуженні «углиб» утворюється ланцюг

$$D_{t_1 t_2 ... t_{l_i}} \supset D_{t_1 t_2 ... t_{l_i} t_{l_i+1}} \supset D_{t_1 t_2 ... t_{l_i} t_{l_i+1} t_{l_i+2}} \supset ... \supset D_{t_1 ... t_{k_i}}, \tag{11}$$

де $(\tau - l_i)$-розміщення $\left(t_{l_i+1}, ..., t_\tau\right) \in E_{n_i}^{\tau - l_i}\left(J_{n_i}\right)$, $\tau \in J_{k_i}^{l_i+1} = \left\{ l_i+1, l_i+2, ..., k_i \right\}$. При цьому для утворення підмножини $D_{t_1 t_2 ... t_{l_i} t_{l_i+1}}$ змінній $x_{m_i+\alpha_{k_i}^i}$ надаватимемо послідовно значень

$$g_{n_i}^i, g_{n_i-1}^i, ..., g_2^i, g_1^i, \tag{12}$$

з мультимножини $G_i \setminus \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{l_i}}^i\right\}$, де номер t_{l_i+1} в (11) – індекс у номері підмножини – означає номер елемента $g_{t_{l_i+1}}^i = x_{m_i+\alpha_{k_i}^i}$.

Для утворення підмножини $D_{t_1 ... t_{l_i+2}}$ змінній $x_{m_i+\alpha_{k_i-1}^i}$ послідовно в порядку (12) надаватимемо значень з $G_i \setminus \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{l_i+1}}^i\right\}$, де номер у послідовності (11) t_{l_i+2} означає номер елемента $g_{t_{l_i+2}}^i = x_{m_i+\alpha_{k_i-1}^i}$;

…;

а для утворення підмножини $D_{t_1 ... t_{l_i+j}}$ змінній $x_{m_i+\alpha_{k_i-j+1}^i}$ послідовно в порядку (12) надаватимемо значень з $G_i \setminus \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{l_i+j-1}}^i\right\}$, де номер у послідовності (11) t_{l_i+j} означає номер елемента $g_{t_{l_i+j}}^i = x_{m_i+\alpha_{k_i-j+1}^i}$; $\forall j \in J_{k_i-l_i}$.

Будемо надавати змінній $x_{m_i+\alpha_{k_i-j}^i}$ для утворення множини $D_{t_1 ... t_{l_i+j+1}}$ послідовно в порядку (12) значень з $G_i \setminus \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{l_i+j}}^i\right\}$, де номер в послідовності (11) t_{l_i+j+1} означає номер елемента $g_{t_{l_i+j+1}}^i = x_{m_i+\alpha_{k_i-j+1}^i}$ $\forall j \in J_{k_i-l_i-1}^0$;

…;

також надаючи змінній $x_{m_i+\alpha_{k_i-(k_i-l_i-1)}^i} = x_{m_i+\alpha_{l_i+1}^i}$ для утворення підмножини $D_{t_1 ... t_{k_i}}$ послідовно в порядку (12) значень з $G_i \setminus \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{k_i-1}}^i\right\}$, де номер в послідовності (11) t_{k_i} означає номер елемента $g_{t_{k_i}}^i = x_{m_i+\alpha_{l_i+1}^i}$.

При збільшенні $i \in J_s$ утворюються множини з k_1 першими індексами, що відповідають $i = 1$, при k_2 – з наступними індексами, що відповідають $i = 2$, і т.д., аж до множини $D_{i_1 ... i_k}$ при $i = s$. При виборі наступного значення елемента з G на одному рівні галуження відбувається галуження «вшир».

Розглянемо **правила побудови оцінок допустимих підмножин**.

При утворенні підмножини $D_{t_1 t_2 ... t_{\tau_i}}$ маємо два випадки: 1) $\tau_i \le l_i$; 2) $\tau_i = l_i + j$ ($\tau_i > l_i$). В обох випадках використані елементи мультимножини G_i утворюють мультимножину $G_B^i = \left\{g_{t_1}^i, ..., g_{t_{\tau_i}}^i\right\}$, а не використані – різницю мультимножин $\tilde{G}_i = G_i \setminus G_B^i = \left\{\tilde{g}_1^i, ..., \tilde{g}_{n_i-\tau_i}^i\right\}$, $\tilde{g}_1^i \le ... \le \tilde{g}_{n_i-\tau_i}^i$. Позначимо мультимножину коефіцієнтів цільової функції при визначених у множині $D_{t_1 t_2 ... t_{\tau_i}}$ змінних $C_B^i = \left\{c_{t_1}^i, ..., c_{t_{\tau_i}}^i\right\}$ (причому c_l^i – коефіцієнт при змінній, що дорівнює g_l^i, $l = t_1, ..., t_\tau$). Позначимо C_i мультимножину всіх коефіцієнтів у цільовій функції при невідомих з X_i, а різницю C_i та C_B^i так: $\tilde{C}_i = C_i \setminus C_B^i = \left\{\tilde{c}_1^i, ..., \tilde{c}_{k_i-\tau_i}^i\right\}$, де $\tilde{c}_1^i \geq ... \geq \tilde{c}_{\lambda_i}^i \geq 0 > \tilde{c}_{\lambda_i+1}^i \geq ... \geq \tilde{c}_{k_i-\tau_i}^i$.

Розглянемо величину

$$\nu_i = \nu_{t_1t_2...t_{\tau_i}}^i = \sum_{j=1}^{\tau_i} c_{t_j}^i g_{t_j}^i . \tag{13}$$

Введемо в розгляд величину

$$c_i^* = c_{t_1t_2...t_{\tau_i}}^{*i} = \min_{\left(\tilde{x}_{t_{\tau_i+1}}, ..., \tilde{x}_{t_{k_i}}\right) \in E_{n_i}^{k_i-\tau_i}\left(\tilde{G}_i\right)} \sum_{j=1}^{k_i-\tau_i} \tilde{c}_j^i \tilde{x}_{t_{\tau_i+j}} . \tag{14}$$

Цей мінімум знаходиться за теоремою 3.1 з [2, стор. 79].

Застосувавши її, маємо:

$$c_i^* = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \tilde{c}_j^i \tilde{g}_j^i + \sum_{j=\lambda_i+1}^{k_i-\tau_i} \tilde{c}_j^i \tilde{g}_{n_i-k_i+j}^i . \tag{15}$$

Теорема. Оцінкою ξ множини $D_{t_1t_2...t_{\tau_i}}$ є величина

$$\xi = \nu_i + c_i^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} c_j^{*0} , \tag{16}$$

де

$$c_j^{*0} = \min_{X_i \in E_{n_i}^{k_i}(G_i)} \sum_{t=1}^{k_i} c_t^i x_{m_i+t} . \tag{17}$$

Зауваження. Величина c_j^{*0} – це частковий випадок c_j^*, коли $\tau_j = 0$, тобто: $c_j^{*0} = c_j^* = c_{t_0}^{*j}$, при цьому $\tilde{G}_j = G_j$; $\tilde{C}_j = C_j$. З урахуванням цього величину ξ з позначенням

$$c^* = c_i^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} c_j^{*0} = \sum_{j=1}^{s} c_j^* \tag{18}$$

можна записати так:

$$\xi = \nu_i + c^* . \tag{19}$$

Доведення теореми. Як відомо, величина ξ є оцінкою в методі гілок та меж допустимої підмножини Q_i в задачі мінімізації функції $F(x)$, якщо

$$\xi \leq F(x) \quad \forall x \in Q_i . \tag{20}$$

У силу властивості мінімуму та представлень (13)-(19) для величини (19) виконується умова (20) при $F(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ з (5) та $Q_i = D_{t_1t_2...t_{\tau_i}}$.

Зауваження. При галуженні «вшир» із задіянням декількох підмножин G_i одночасно оцінкою допустимої підмножини, як не важко бачити, буде величина

$$\xi = \nu + c^* ,$$

де

$$\nu = \sum_{i=1}^{s} \nu_i .$$

Відсікання відбуваються за класичним правилом: коли для підмножини Q оцінки $\xi \geq F_0 = F(x_0)$, де F_0 – поточний рекорд мінімального значення цільової функції $F(x)$, обчислений на одноелементній множині $Q = \{x_0\}$, то відповідна підмножина Q відсікається. При цьому, коли утворюється нова одноелементна множина $\{x_i\}$, $i = 1, 2, ...$, то за умови $F_i = F(x_i) < F_0$ рекорд F_0 оновлюється: далі за нього мають F_i.

ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Нехай $G_1 = \{0; 0,2; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$; $G_2 = \{0; 0,1; 0,5; 0,5; 0,9\}$; $s = 2$; $k = 5$; $k_1 = 3$; $k_2 = 2$. Нехай цільова функція така:

$$x_1 + 5x_3 - x_4 + x_5 \to \min .$$

Маємо обмеження вигляду (6)

$$x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in E_{11,8}^{5,2}(G),$$

де $X_1 = (x_1; x_2; x_3)$; $X_2 = (x_4; x_5)$; $G = \{0^2; 0,1; 0,2^2; 0,4; 0,5^2; 0,6; 0,8; 0,9\}$, $\nu = 8$, $\eta = 11$; та обмеження вигляду (7)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$

$$x_4 + x_5 = 1.$$

Отже, $n_1 = 6$; $n_2 = 5$ і можна обмеження вигляду (6) представити так: $X_1 \in E_6^3(G_1)$, $X_2 \in E_5^2(G_2)$.

Визначаємо за (8) α_1^1, α_2^1, α_3^1. У цільовій функції при зміні порядку додавання, маємо для X_1: $5x_3 + x_1 + 0x_2$. Отже, $c_3^1 = 5$; $\alpha_1^1 = 3$; $c_1^1 = 1$; $\alpha_2^1 = 1$; $c_2^1 = 0$; $\alpha_3^1 = 2$ (тобто (8) має вигляд $c_3^1 = 5 \geq c_1^1 = 1 \geq c_2^1 = 0$).

Для X_2 у цільовій функції маємо: $x_5 - x_4$, тобто $c_1^2 = 1$; $\alpha_1^2 = 5$; $c_2^2 = -1$; $\alpha_2^2 = 4$.

Галуження здійснюється «вглиб». При цьому визначаються одна за одною змінні в порядку x_3; x_1; x_2; далі x_5; x_4. Причому для X_1 порядок використання елементів G_1 такий: $g_1^1 \leq g_2^1 \leq ... \leq g_6^1$, а для X_2, оскільки $c_1^2 > 0$, а $c_2^2 < 0$, порядок використання елементів з G_2 для x_5 (як і в X_1) по не спаданню, а для x_4 – по не зростанню. Тобто, x_3, x_1, x_2 послідовно надаються значення: $0; 0,2; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$; для x_5 – значення $0; 0,1; 0,5; 0,9$; а для x_4 – значення $0,9; 0,5; 0,1; 0$.

Твердження 1. Для задачі (5)-(7) у методі гілок та меж, за розглянутого способу галуження та оцінювання допустимих підмножин за формулою (16), оцінка наступної підмножини $D_{t_1 ... t_{\alpha+1}}$ на гілці дерева галуження від кореня (множина $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$) до листа (одноелементна множина) буде не меншою від оцінки попередньої підмножини $D_{t_1 ... t_\alpha}$, $\alpha \in J_{k-1}$.

Доведення. Оскільки оцінка множини $D_{t_1 ... t_\alpha}$ здійснюється за (16), де c_j^{*0} – це мінімум (17), а оцінка множини $D_{t_1 ... t_\alpha t_{\alpha+1}}$ одержується як значення тієї ж функції при набутті нею нового значення заданням ще однієї змінної та знаходженням її мінімуму по комбінаторній множині можливих значень невизначених ще змінних, то з означення мінімуму і випливає справедливість твердження.

Ілюстрацією реалізації цього твердження є оцінка ξ для D_{1263}; $\xi = -0,2$ та для D_{12634} $\xi = F_1 = 0,2$ (див. рис. 1).

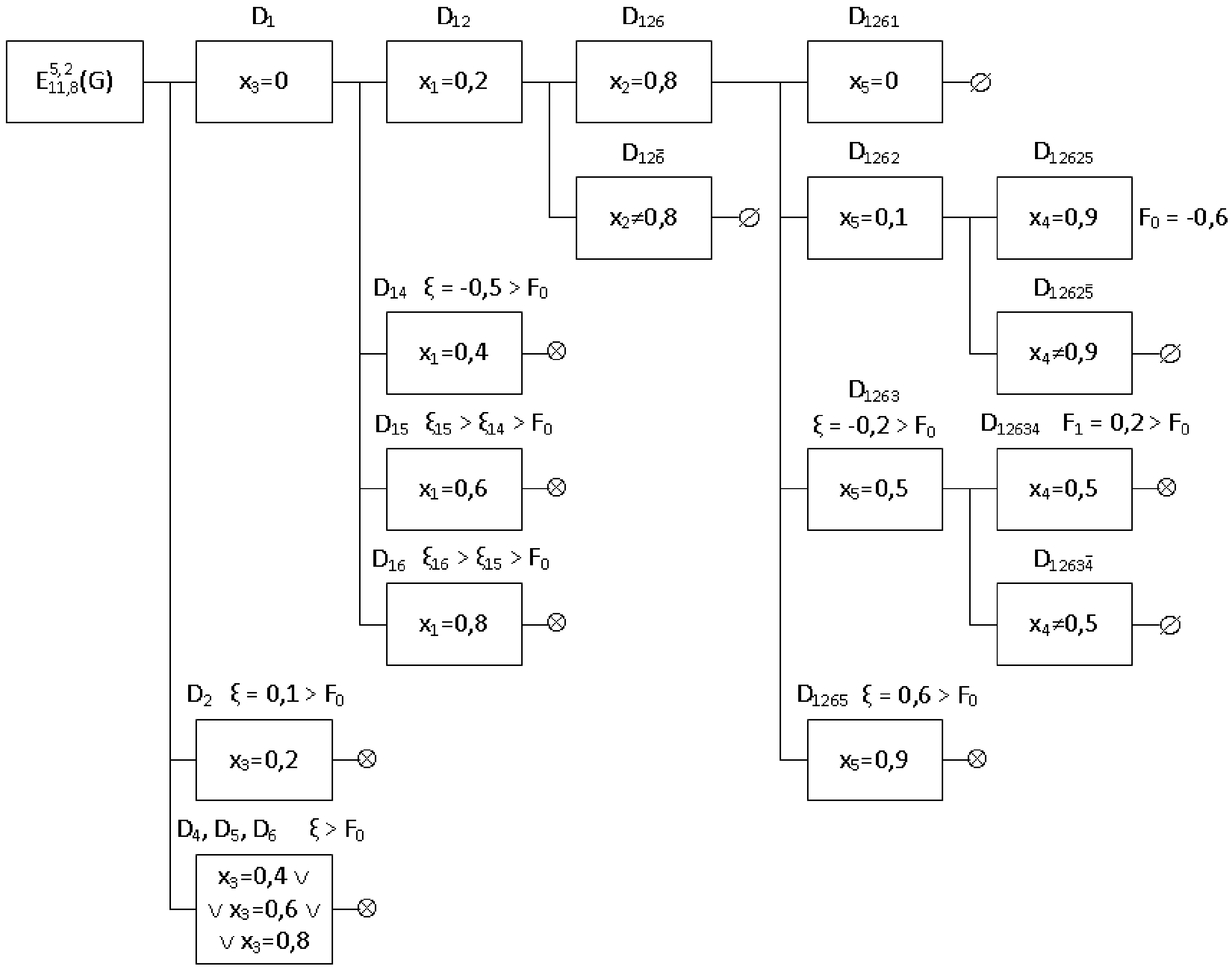

Рис. 1. Ілюстрація галуження та відсікання в прикладі (знак $\varnothing$ означає порожню множину, а $\otimes$ – відсікання)

Продовжимо розгляд прикладу.

Зауважимо, що рахувати оцінку раніше ніж знайдено F_0 немає сенсу.

Підмножина D_{12625} – одноелементна: $x_3 = 0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,8$; $x_5 = 0,1$; $x_4 = 0,9$. Рахуємо $F_0 = 5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1 + 0,9 \cdot (-1) = 0,2 + 0,1 - 0,9 = -0,6$.

Тому множина D_{1263} може бути відсічена як безперспективна.

$D_{1264} = D_{1263}$ ($g_3^2 = g_4^2 = 0,5$).

Підмножина D_{12634} також одноелементна, x_1, x_2, x_3 – ті ж, а $x_4 = x_5 = 0,5$. Отже, $F_1 = 5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot (-1) = 0,2$. $F_1 > F_0$, отже, F_0 не поліпшується.

$\xi = \xi_{1263} = 0,2 + 0,5 \cdot 1 - 0,9 = -0,2 > F_0 = -0,6$.

$\xi = \xi_{1265} = 0,2 + 0,9 + 0,5 \cdot (-1) = 0,6 > F_0$, отже, тут теж відсікання.

$\nu_{14} = 0 \cdot 5 + 0,4 \cdot 1 = 0,4$; $\tilde{G}_1^1 = \{0,2; 0,2; 0,6; 0,8\}$; $\tilde{G}^2 = G^2 = \{0; 0,1; 0,5; 0,5; 0,9\}$; $\tilde{C}^1 = \{0\}$; $\tilde{C}^2 = \{1; -1\}$.

$c_{14}^* = 0 + (1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0,9) = -0,9$.

$\xi_{14} = \nu_{14} + c_{14}^* = 0,4 - 0,9 = -0,5 > F_0$.

Зауважимо справедливість такого твердження.

Твердження 2. На одному рівні глибини від кореня дерева галуження оцінки допустимих підмножин $D_{t_1 \ldots t_{\alpha-1} t_\alpha}$, $D_{t_1 \ldots t_{\alpha-1}(t_{\alpha+1})}$, …, $D_{t_1 \ldots t_{\alpha+1}(t_{\alpha+j})}$, ..., $D_{t_1 \ldots t_{\alpha-1} n_i}$ $\forall i \in J_s$, $\forall \alpha \in J_{n_i}$, $\forall j \in J_{n_i - t_\alpha}^0$ що є підмножинами однієї і тієї ж допустимої підмножини $D_{t_1 \ldots t_{\alpha-1}}$ (у випадку $\alpha = 1$ множини $E_{\eta\nu}^{ks}$) при русі від верхніх гілок до нижніх гілок, тобто від $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_\alpha + j_1)}$ до $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_\alpha + j_2)}$, де $j_1 < j_2$, $t_\alpha + j_1 \in J_{n_i - 1}^0$, $t_\alpha + j_2 \in J_{n_i}$.

Доведення. Справедливість випливає з безпосереднього способу обчислення оцінок за формулами (16), (17) та описаним способом галуження. Оцінки множин $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_{\alpha + j_1})}$ та $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_{\alpha + j_2})}$, як видно, відрізняються одним доданком, а в силу способу галуження і оцінювання для множин $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_{\alpha + j_2})}$ він більше ніж для $D_{t_1 \ldots t_\alpha (t_{\alpha + j_1})}$, що і доводить твердження.

Ілюстрацією можуть виступати (рис. 1) підмножини D_{1236} з оцінкою $\xi = -0,2$ та D_{1265} з оцінкою $\xi = 0,6$. Користуючись цією властивістю, оскільки для першої множини оцінки $\xi > F_0$, то другу множину вже можна не розглядати.

Продовжимо розгляд прикладу.

$\nu_{15} = 0,5 + 0,6 \cdot 1 = 0,6$; $\tilde{G}_1^1 = \{0,2; 0,2; 0,4; 0,8\}$; $\tilde{G}^2 = G^2$; $\tilde{C}^1 = \{0\}$; $\tilde{C}^2 = \{1; -1\}$. $c_{15}^* = 0 + (1 \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,9) = -0,9$. $\xi_{15} = 0,6 - 0,9 = -0,3 > \xi_{16}$. $\xi_{15} = -0,5 > F_0$.

Розглянемо D_2, підрахуємо ξ_2. Визначимо $\nu_2 = 5 \cdot 0,2 = 1$. $\tilde{G}_1^1 = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$; $\tilde{C}^1 = \{1; 0\}$; $\tilde{G}^2 = \tilde{G}$; $\tilde{C}^2 = C^2 = \{1; -1\}$; $c_2^* = 0 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,9) = -0,9$. Отже, $\xi_2 = \nu_2 + c_2^* = 1 - 0,9 = 0,1 > F_0$. Отже, D_2 відсікається. Для D_4, D_5, D_6, $\xi_6 > \xi_5 > \xi_4 > \xi_2 > F_0$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянута задача оптимізації лінійної функції на полірозміщеннях зі сталою сумою координат у розміщеннях, що виникає в ігрових задачах комбінаторного типу.

Запропоновано і обґрунтовано застосування методу гілок та меж до цієї задачі, а саме: способів галуження, оцінювання та відсікання. Наведено ілюстративний приклад та доведено деякі властивості оцінок.

Як подальший напрямок досліджень вбачається проведення числових експериментів для цього підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.

3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика: навч. посіб. Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. 287 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
5. Emets O. A., Ustian N. Yu. Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2007. Vol. 39, № 1. P. 24–35.
6. Iemets O. A., Olkhovskaja E. V. Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. Vol. 43, № 5. P. 52–63.
7. Iemets O. O., Yemets O. O. Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. V. 48, № 4. P. 547–557.

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). Models for computer solution of combinatorial optimization. Kiev: Naukova dumka.
2. Stoyan, Yu. G & Iemets, O. O. (1993). Theory and methods of euclidian combinatorial optimization. Kyiv: Insytytut systemnyh doslidzhen' osvity. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Stoyan, Yu. G., Iemets, O. O. & Yemets, E. M. (2005). Optimization on polypermutations: theory and methods, RVTs PUSKU, Poltava. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Iemets, O. O. & Parfyonova, T. O. (2009). Discrete mathematics, RVV PUSKU, Poltava. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
5. Emets, O. A. & Ustian, N. Yu. (2007) Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 39, No 1, pp. 24–35.
6. Iemets, O. A. & Olkhovskaja, E. V. (2011), Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 43, No. 5, pp. 52–63.
7. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2012). Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 48, No. 4, pp. 547-557.

УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-02

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Зеленський А. Г., к. ф.-м. н., доцент

ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24а, Дніпро, 49600, Україна

a.zelensky@ukr.net

Дослідження локального навантаження тонкостінних елементів проводились рядом авторів. Фундаментальні розв'язки крайових задач будувались за допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є, яке було застосовано безпосередньо до системи диференціальних рівнянь граничної зони або до системи, що враховувала деформації поперечного зсуву. Такий підхід, з одного боку, призводив до складних математичних викладок, а з іншого боку, як відомо, в області дії локальних навантажень виникає суттєво просторовий напружений стан, і фізичні теорії в принципі не можуть його описувати достатньо точно.