3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика: навч. посіб. Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. 287 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
5. Emets O. A., Ustian N. Yu. Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2007. Vol. 39, № 1. P. 24–35.
6. Iemets O. A., Olkhovskaja E. V. Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. Vol. 43, № 5. P. 52–63.
7. Iemets O. O., Yemets O. O. Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. V. 48, № 4. P. 547–557.

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). Models for computer solution of combinatorial optimization. Kiev: Naukova dumka.
2. Stoyan, Yu. G & Iemets, O. O. (1993). Theory and methods of euclidian combinatorial optimization. Kyiv: Insytytut systemnyh doslidzhen' osvity. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Stoyan, Yu. G., Iemets, O. O. & Yemets, E. M. (2005). Optimization on polypermutations: theory and methods, RVTs PUSKU, Poltava. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Iemets, O. O. & Parfyonova, T. O. (2009). Discrete mathematics, RVV PUSKU, Poltava. Retrieved from: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
5. Emets, O. A. & Ustian, N. Yu. (2007) Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 39, No 1, pp. 24–35.
6. Iemets, O. A. & Olkhovskaja, E. V. (2011), Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 43, No. 5, pp. 52–63.
7. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2012). Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 48, No. 4, pp. 547-557.

УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-02

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Зеленський А. Г., к. ф.-м. н., доцент

ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24а, Дніпро, 49600, Україна

a.zelensky@ukr.net

Дослідження локального навантаження тонкостінних елементів проводились рядом авторів. Фундаментальні розв'язки крайових задач будувались за допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є, яке було застосовано безпосередньо до системи диференціальних рівнянь граничної зони або до системи, що враховувала деформації поперечного зсуву. Такий підхід, з одного боку, призводив до складних математичних викладок, а з іншого боку, як відомо, в області дії локальних навантажень виникає суттєво просторовий напружений стан, і фізичні теорії в принципі не можуть його описувати достатньо точно.

У нашому дослідженні визначаються частинні розв'язки задач згину нетонких трансверсально-ізотропних пластин з кососиметричним локальним навантаженням відносно серединної площини. Для цього був використаний варіант математичної теорії, який базується на позиції використання тривимірної теорії пружності. Згідно з цією теорією усі компоненти переміщень (як функції трьох незалежних змінних x, y, z) апроксимуються розкладаннями Фур'є-Лежандра за поперечною координатою z. Інші компоненти напружено-деформованого стану і граничні умови на бічній поверхні пластини також залежать від трьох координат і теж зображуються у вигляді розкладань за допомогою поліномів Лежандра. Перехід від тривимірних крайових задач до двовимірних здійснюється за допомогою варіаційного принципу Рейснера. На відміну від інших варіантів математичної теорії спосіб отримання основних рівнянь побудовано таким чином, що умови на граничних площинах у будь-яких наближеннях виконуються абсолютно точно. Це суттєва перевага перед іншими теоріями; яка підвищує точність розв'язування граничних задач.
Розроблено метод, який дозволяє побудувати фундаментальні розв'язки визначальної системи неоднорідних диференціальних рівнянь (перетвореної системи диференціальних рівнянь рівноваги) варіанта математичної теорії трансверсально-ізотропних пластин довільної сталої товщини.
Напружено-деформований стан при локальному навантаженні описується саме системами неоднорідних диференціальних рівнянь.
В роботі розглянуто визначальні системи рівнянь у другому і третьому наближеннях у рядах для переміщень при кососиметричному навантаженні відносно серединної площини. В другому (третьому) наближенні система диференціальних рівнянь має восьмий (дванадцятий) порядок відносно двох (трьох) функцій (складових поперечних переміщень). Методом операторних перетворень вони зводяться до зручних розв'язувальних неоднорідних диференціальних рівнянь восьмого (дванадцятого) порядку стосовно нових функцій. В цих рівняннях ліві частини однакові, а праві дорівнюють $a_{k0}\left(\nabla^2 - s_{k0}\right) F\,\delta(x,y)$, де a_{k0}, s_{k0} – механіко-геометричні параметри пластини, ∇^2 – оператор Лапласа, F – локальна поперечна сила, що діє в початку координат, $\delta(x,y)$ – двовимірна функція Дірака.
Знаходження фундаментального розв'язку кожного отриманого неоднорідного диференціального рівняння високого порядку з частинними похідними зведено до визначення операторів $a_{k0}\left(\nabla^2 - s_{k0}\right)$ від лінійної комбінації фундаментальних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь низького порядку, а саме: рівняння Пуассона, неоднорідного бігармонічного рівняння, двох неоднорідних рівнянь Гельмгольца (рівняння Пуассона, неоднорідного бігармонічного рівняння і чотирьох неоднорідних рівнянь Гельмгольца). Праві частини цих рівнянь однакові і дорівнюють $F\,\delta(x,y)$.
Фундаментальні розв'язки кожного диференціального рівняння невисокого порядку отримуються з частинних розв'язків аналогічних рівнянь, праві частини яких дорівнюють $q_0\,\delta(r - r_0)$, де q_0 – рівномірно розподілене навантаження, r_0 – радіус кола навантаження. Частинні розв'язки шукаються методом інтегрального перетворення Ханкеля.
Побудовані фундаментальні розв'язки визначальної системи рівнянь, які узагальнені для полюса в довільній точці.
Запропонований метод пошуку фундаментальних розв'язків може бути використаний для інших систем диференціальних рівнянь з частинними похідними розглянутого класу.
Отримані фундаментальні розв'язки визначальних рівнянь математичної теорії пластин дають можливість визначати частинні розв'язки диференціальних рівнянь у граничних задачах згину пластин довільної сталої товщини при будь-яких поперечних навантаженнях.

Ключові слова: пластина довільної сталої товщини, математична теорія, неоднорідне диференціальне рівняння, фундаментальні розв'язки, операторний метод, інтегральне перетворення Ханкеля.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE DEFINING SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLATES

Zelenskiy A. G., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

Department of Structural Engineering and Strength of Materials,
Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Chernyshevsky Street, 24-a, Dnepr, 49600, Ukraine

a.zelensky@ukr.net

Studies of the local load of thin-walled elements were carried out by a number of authors. Fundamental solutions of boundary value problems were constructed using the Fourier transform integral transform method, which was applied directly to the system of differential equations of equilibrium. This approach led to complex mathematical calculations. In these works, differential equations for boundary domains, the equation with allowance for the deformation of the transverse shear were used. But in the area of local load there is, in essence, a spatial deformed state, and physical theories in principle can not describe it sufficiently accurately.

In our study, fundamental solutions to the problems of bending of non-thin trans-versal-isotropic plates with skew-symmetric loading relative to the median plane are obtained. For this purpose, a variant of the mathematical theory was used, which is based on the position of the use of the three-dimensional theory of elasticity. In accordance with this theory, all components of the displacement (as functions of three independent variables) are approximated by Fourier-Legendre decompositions in a transverse coordinate. Other components of the stress-strain state and boundary conditions on the lateral surface of the plate are also dependent on three coordinates and are also presented in the form of series with the aid of Legendre polynomials.

The transition from three-dimensional boundary value problems to two-dimensional ones is carried out by means of the Reissner variational principle. Unlike other variants of mathematical theory, the method of obtaining the basic equations is constructed in such a way that the conditions on boundary planes in any approximations are perfectly accurate. This is a significant advantage over other theories; which increases the accuracy of the solution of boundary problems. The distribution of stresses and displacements along the thickness of the plate depends on the Legendre polynomials. With an increase in the order of the polynomials, the accuracy of determining the stresses and displacements increases.

A method is developed that enables to construct fundamental solutions of the defining system of inhomogeneous differential equations (the transformed system of differential equations of equilibrium) of a variant of the mathematical theory of transversally isotropic plates of arbitrary constant thickness. The stress-strain state of a local load is described by systems of non-uniform differential equations.

In this paper we consider the defining systems of equations in the second and third approximations in rows for displacements in the case of skew-symmetric loading relative to the median plane. In the second (third) approximation, the system of differential equations has an eighth (twelfth) order in relation to two (three) displacement functions. By the method of operator transformations, they are reduced to convenient solvable inhomogeneous equations of the eighth (twelfth) order in relation to new functions. In these equations, the left-hand sides are the same, and the right-hand ones have the following form: $a_{k0}\left(\nabla^2 - s_{k0}\right)F\delta\left(x,y\right)$, where a_{k0}, s_{k0} – mechanical and geometric parameters plates, ∇^2 – Laplace operator, F – local transverse force acting at the origin of coordinates, $\delta\left(x,y\right)$ – two-dimensional Dirac function.

The search for the fundamental solution of each obtained inhomogeneous equation of high order is reduced to the definition of operators $a_{k0}\left(\nabla^2 - s_{k0}\right)$ from a linear combination of fundamental solutions of nonhomogeneous differential equations of low order, namely: Poisson equation, inhomogeneous biharmonic equation and two inhomogeneous Helmholtz equations (Poisson equation, inhomogeneous biharmonic equation and four inhomogeneous Helmholtz equations). The right-hand sides of these equations are the same and equal to $F\delta\left(x,y\right)$.

Fundamental solutions to each equation of low order are obtained from partial solutions of similar equations, the right-hand side of which is $q_0\,\delta\left(r - r_0\right)$, where q_0 is a uniformly distributed load, r_0 – the circle load radius.

Partial solutions are sought by Hankel's integral transformation method. The fundamental solutions of the defining system of equations, which are generalized for a pole at an arbitrary point, are constructed.

The proposed method for the search for fundamental solutions can be used for other systems of differential equations with partial derivatives of the considered class.

The obtained fundamental solutions of the defining equations of the mathematical theory of the plates allow us to determine partial solutions of the equations in bending problems of plates of arbitrary thickness at any transverse loads.

Key words: plate of arbitrary constant thickness, mathematical theory, inhomogeneous differential equation, fundamental solutions, operator method, integral Hankel transform.

ВСТУП

Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонких пластин і оболонок, в основу яких покладено гіпотези Кірхгофа-Лява, проведено достатньо повно в багаточисленних книгах, монографіях, наукових статтях. Класична теорія коректна для тонких ізотропних та слабоанізотропних пластин і оболонок, з повільно змінювальним НДС. В інших випадках використання класичної теорії для однорідних та шаруватих елементів конструкцій може призвести до значних похибок у визначенні НДС, а саме: у розрахунках товстих пластин і оболонок; якщо є лінії спотворення (лінії різкого змінення зовнішнього навантаження або геометрії пластини чи оболонки), тобто у випадках наявності різного роду концентраторів напруження, в т. ч. і при дії зосереджених навантажень; якщо матеріал характеризується суттєвою анізотропією або ж є фізично нелінійним чи пружно пластичним, та якщо жорсткості шарів відрізняються значним чином (навіть для тонких пластин і оболонок); якщо елемент конструкцій зазнає великих переміщень.

Неточні результати, які дає класична теорія пластин та оболонок, призвели до необхідності розроблення теорій розрахунку, які б уточнювали класичну теорію. Уточнюючі теорії базуються на різних фізичних та кінематичних гіпотезах [1–5]. Найбільш використовуваними є теорії типу Тимошенка–Рейснера [1–3]. Ці теоріїураховують у першому наближенні внутрішній НДС і вихровий крайовий ефект. Потенціальний напружений стан вони не враховують. А в областях дії на елементи конструкцій локальних поперечних і розривних навантажень виникає просторовий НДС, який характеризується високим градієнтом змінення як у тангенціальному, так і в поперечному напрямках. І з фізичної точки зору потрібноураховувати з високою точністю внутрішній і потенціальний напружені стани.

Огляд теорій розрахунку пластин та оболонок і їх аналіз надається в [6, 7].

Дослідження НДС пластин та оболонок на основі рівнянь тривимірної теорії пружності є занадто складною проблемою математичної фізики, яка спряжена з суттєвими математичними труднощами, пов’язаними із знаходженням розв’язків систем диференціальних рівнянь (**СДР**) із частинними похідними відносно шуканих функцій, що залежать від трьох незалежних змінних і, крім цього, необхідністю задовольнити граничним умовам на всій поверхні розглядуваних елементів. Аналітичні розв’язки вдається отримати тільки для вузького кола розглядуваних задач, а саме для тих випадків граничних умов і форми границі, які дають можливість розділити змінні в СДР [8, 9]. Крім того, на прикінцевих етапах розв’язування задач в більшості випадків необхідно використовувати чисельні методи, що пов’язано не тільки із складністю отриманих СДР, але й із труднощами при задоволенні граничним умовам на лицевих площинах (поверхнях).

Послідовний огляд робіт по просторовим задачам теорії пружності виконано в [10].

Один із напрямків розвитку досліджень по уточненню розрахунків НДС елементів конструкцій полягає у використанні суто математичного підходу до розв’язування граничних задач для пластин та оболонок. Математичні методи відрізняються між собою як певними перевагами, так і певними недоліками. До них можна віднести процес зведення тривимірних залач до двовимірних, точність задоволення граничних умов, складність отримуваних диференціальних рівнянь рівноваги і основних співвідношень задачі і т. п. Вказані факти впливають в кінцевому результаті на точність розв’язку граничних задач. Серед математичних підходів виділяється підхід, який використовує для описання НДС по товщині поліноми Лежандра [11–16].

При цьому тривимірні задачі зводились до двовимірних характерними методами, які відрізнялись між собою точністю і методикою. В основному використовувались проекційні [11, 12] і різні варіаційні [13–16] методи. В [15, 16] редукція тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної здійснювалась з використанням варіаційного принципу Рейснера [17].

Розвитку теорій розрахунку нетонких пластин і оболонок присвячена робота [6].

Підхід, започаткований у [16], розвинено в [18–20] для пластин довільної сталої товщини, які зазнають дії будь-якого поперечного навантаження. Отримані системи диференціальних рівнянь рівноваги, основні співвідношення, форми загальних розв’язків, в тому числі і у вищих наближеннях [19, 20], розв’язані граничні задачі, з’ясовані межі використання теорій типу Тимошенка–Рейснера. Слід зазначити ефективність варіанта математичної теорії [16, 18–20] нетонких пластин, який полягає у можливості визначати НДС по суті з будь-якою високою точністю, в тому числі і при дії поперечних навантажень з високим градієнтом змінюваності. В [21] тривимірна задача зводиться до одновимірної чисельно-аналітичним способом.

Аналітичному дослідженню НДС тонких оболонок при дії зосереджених навантажень присвячені, зокрема, роботи [22–26].

У [22–24] були отримані фундаментальні розв’язки за допомогою методу інтегрального перетворення Фур’є; воно було застосовано безпосередньо до СДР рівноваги, отриманої на основі уточнюючих теорій, які базувались на певних припущеннях. Використовувались рівняння пограничної зони [22, 23] і рівняння, які враховують поперечний зсув [24].

З урахуванням вищесказаного очевидно, що більш точні результати в дослідженні фундаментальних розв'язків для пластин і оболонок дають теорії, які виходять з позиції розглядання НДС як просторового, без будь-яких обмежувальних припущень. І тому надалі для побудови фундаментальних розв'язків для пластин довільної сталої товщини використовуватиметься варіант математичної теорії [19, 20], який ураховує з високою точністю внутрішній і потенціальний НДС з урахуванням перших двох і трьох наближень у рядах Фур'є-Лежандра за поперечною координатою для компонент переміщень.

Зазначимо, що при кососиметричному навантаженні відносно серединної площини в другому (третьому) наближенні тангенціальні переміщення $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$ містять поліноми P_1, P_3 (P_1, P_3, P_5), поперечні $W(x,y,z)$ – P_0, P_2 (P_0, P_2, P_4), напруження σ_{xz} і σ_{yz} – P_0, P_2, P_4 (P_0, P_2, P_4, P_6), σ_x, σ_y, σ_z – P_1, P_3, P_5 (P_1, P_3, P_5, P_7), σ_{xy} – P_1, P_3 (P_1, P_3, P_5). Точність визначення НДС зростає із збільшенням порядку врахованих поліномів Лежандра, які в свою чергу характеризують степінь нелінійності НДС по товщині.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

СДР рівноваги варіанта математичної теорії трансверсально-ізотропних пластин [18–20] послідовними перетвореннями зведена до визначальної СДР, яка складається у другому наближенні з однорідної системи четвертого порядку і неоднорідної системи восьмого порядку відносно складових функцій $w_1(x,y)$ і $w_3(x,y)$ поперечних переміщень $W(x,y,z)$, які зображуються рядом Фур'є-Лежандра

$$W(x,y,z)=\sum_{k=1,3}^{\infty}P_{k-1}(2z/h)\,w_k(x,y),$$

де P_{k-1} – поліноми Лежандра.

У третьому наближенні визначальна однорідна система має шостий порядок, а неоднорідна – дванадцятий відносно складових функцій $w_1(x,y)$, $w_3(x,y)$ і $w_5(x,y)$ поперечних переміщень.

Наведемо неоднорідні визначальні СДР у другому ($k=1,3$) [18, 20] і третьому ($k=1,3,5$) [20] наближеннях для трансверсально-ізотропної пластини.

У наближенні $k=1,3$ (другому наближенні):

$$\Pi_{11}w_1+\Pi_{13}w_3=\Pi_{1q}q(x,y);$$

$$\Pi_{31}w_1+\Pi_{33}w_3=\Pi_{3q}q(x,y), \qquad (1)$$

де $\Pi_{11},\ldots,\Pi_{3q}$ – диференціальні оператори:

$$\Pi_{11}=\mu_{114}\nabla^4;\quad \Pi_{13}=\mu_{114}\nabla^4+\mu_{132}\nabla^2;\quad \Pi_{1q}=\mu_{12}\nabla^2-\mu_{10};\quad \Pi_{31}=\mu_{314}\nabla^4+\mu_{312}\nabla^2;$$

$$\Pi_{33}=\mu_{334}\nabla^4+\mu_{332}\nabla^2+\mu_{330};\quad \Pi_{3q}=\mu_{32}\nabla^2-\mu_{30}, \qquad (2)$$

$\beta_{112},\ldots,\beta_{333},\ldots,\mu_{114},\ldots,\mu_{30}$ – механіко-геометричні параметри пластини (МГП); $q(x,y)$ – довільне зовнішнє поперечне навантаження, кососиметричне відносно серединної площини, ∇^2 – оператор Лапласа; $w_1(x,y)$, $w_3(x,y)$ – шукані складові поперечних переміщень $W(x,y,z)$.

У наближенні $k = 1, 3, 5$ (третьому наближенні):

$$\varPi_{11} w_1 + \varPi_{13} w_3 + \varPi_{15} w_5 = \varPi_{1q}\, q(x, y);$$

$$\varPi_{31} w_1 + \varPi_{33} w_3 + \varPi_{35} w_5 = \varPi_{3q}\, q(x, y);$$

$$\varPi_{51} w_1 + \varPi_{53} w_3 + \varPi_{55} w_5 = \varPi_{5q}\, q(x, y), \tag{3}$$

де $\varPi_{ij}$ – диференціальні оператори четвертого порядку, $\varPi_{iq}$ – другого порядку. Наведемо тут ці оператори:

$$\varPi_{11} = \mu_{114}\nabla^4 + \mu_{112}\nabla^2; \quad \varPi_{13} = \mu_{134}\nabla^4 + \mu_{132}\nabla^2 + \mu_{130};$$

$$\varPi_{15} = \mu_{154}\nabla^4 + \mu_{152}\nabla^2 + \mu_{150}; \quad \varPi_{1q} = \mu_{12}\nabla^2 + \mu_{10}; \quad \varPi_{31} = \mu_{314}\nabla^4 + \mu_{312}\nabla^2;$$

$$\varPi_{33} = \mu_{334}\nabla^4 + \mu_{332}\nabla^2 + \mu_{330}; \quad \varPi_{35} = \mu_{354}\nabla^4 + \mu_{352}\nabla^2 + \mu_{350}; \quad \varPi_{3q} = \mu_{32}\nabla^2 + \mu_{30};$$

$$\varPi_{51} = \mu_{514}\nabla^4 + \mu_{512}\nabla^2; \quad \varPi_{53} = \mu_{534}\nabla^4 + \mu_{532}\nabla^2 + \mu_{530};$$

$$\varPi_{55} = \mu_{554}\nabla^4 + \mu_{552}\nabla^2 + \mu_{550}; \quad \varPi_{5q} = \mu_{52}\nabla^2 + \mu_{50}, \tag{4}$$

де μ з індексами – МГП. СДР (3) має дванадцятий порядок.

Відзначимо, що праві частини неоднорідних визначальних рівнянь згідно з (2) і (4) залежать від поперечного навантаження.

Однорідні СДР [18, 20] описують вихровий НДС, який виникає від дії на бічній поверхні пластини тангенціальних дотичних напружень і нерівномірностей у розподіленні по контуру бічної поверхні поперечних дотичних напружень.

Неоднорідні визначальні СДР (1) і (3) описують НДС, який спричиняється дією на бічній поверхні нормальних і поперечних дотичних напружень. Він складається із внутрішнього НДС (основного (за термінологією [15]) – визначається функцією $w_1(x, y)$ та основного потенціального – визначається повільнозмінювальними складовими функцій $w_k(x, y)$ $(k \ge 3)$) і НДС потенціального пограншару – визначається швидкозмінювальними складовими функцій $w_k(x, y)$ $(k \ge 3)$. Внутрішній НДС розповсюджується на всю область, потенціальний пограничний шар має характер крайового ефекту біля країв і в локалізованих областях біля місць прикладення зосереджених навантажень. Вихрові і потенціальні крайові ефекти затихають по мірі віддалення від місця їх виникнення [27].

Приймаючи до уваги, що досліджень по побудові фундаментальних розв’язків диференціальних рівнянь теорії пластин обмежена кількість, особливо для рівнянь високого порядку, і враховуючи важливість дослідження цієї проблеми, приходимо до мети, яка ставиться в даній роботі. Завдання полягає в тому, щоб побудувати фундаментальні розв’язки визначальних СДР високого порядку у другому і третьому наближеннях. Оскільки з фізичної точки зору фундаментальні розв’язки рівнянь – це частинні розв’язки диференціальних рівнянь, які описують НДС від дії зосереджених поперечних навантажень, то фундаментальні розв’язки потрібно побудувати для неоднорідних визначальних СДР (восьмого і дванадцятого порядків), тобто для систем (1) і (3).

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ В НАБЛИЖЕННІ $k = 1, 3$

Знаходження фундаментальних розв’язків неоднорідних визначальних СДР восьмого порядку (1) зводиться до знаходження частинних розв’язків цих рівнянь за умови, що поперечне навантаження $q(x, y)$ представляє собою зосереджену поперечну силу F, прикладену в точці ($x=0,\ y=0$), кососиметрично відносно серединної площини. Отже, задача полягає в тому, щоб знайти частинні розв'язки такої СДР:

$$\Pi_{11} w_1 + \Pi_{13} w_3 = \Pi_{1q} F\,\delta(x,y);$$

$$\Pi_{31} w_1 + \Pi_{33} w_3 = \Pi_{3q} F\,\delta(x,y), \tag{5}$$

де (x,y) – координати довільної точки, $\delta(x,y)$ – двовимірна функція Дірака.

Для спрощення розв'язування системи (5) зведемо її операторним методом з урахувавнням (2) до знаходження фундаментальних розв'язків $E_k(x,y)$ $(k=1,3)$ двох розв'язувальних неоднорідних рівнянь восьмого порядку. Після зображення операторів лівих частин цих рівнянь у вигляді добутку одержимо такі рівняння:

$$D_0\, D_0\, D_1\, D_2\, \Phi_k(x,y) = a_{k0}\, D_{k\,0}\, F\,\delta(x,y) \quad (k=1,3), \tag{6}$$

де $D_0,\ D_i,\ D_{k0}$ – диференціальні оператори:

$$D_0 = \nabla^2, \quad D_i = \nabla^2 - s_i, \quad D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}. \tag{7}$$

В (6) і (7) a і s з індексами залежать від МГП пластини, причому s_i, як показують чисельні дослідження для транстропних пластин (при $E' = E$), приймають додатні значення або ж комплексні значення з додатною дійсною частиною.

Із системи (5) фундаментальні розв'язки $w_{1E}(x,y)$ і $w_{3E}(x,y)$ знайдуться із залежностей:

$$w_{1E}(x,y) = \Pi_{33}\, E_1(x,y) - \Pi_{13}\, E_3(x,y),$$

$$w_{3E}(x,y) = -\Pi_{31}\, E_1(x,y) - \Pi_{11}\, E_3(x,y). \tag{8}$$

Використовуючи операторний метод інтегрування [28], який також випливає з методу зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь [29, 30], розв'язування рівнянь (6) восьмого порядку зведеться до інтегрування неоднорідних рівнянь другого і четвертого порядків, а фундаментальні розв'язки (6) зобразяться у вигляді оператора D_{k0} від лінійної комбінації їх фундаментальних розв'язків:

$$E_k(x,y) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2}\left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}}\left(E_{1r} - E_{0r}\right) + \frac{s_1}{s_2 s_{21}}\left(E_{2r} - E_{0r}\right) + E_{00r} \right) \quad (s_{ij} = s_i - s_j), \tag{9}$$

де $E_{0r}(x,y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Пуассона

$$D_0\ f_0(x,y) = F\delta(x,y); \tag{10}$$

$E_{00r}(x,y)$ – фундаментальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння четвертого порядку

$$D_0 D_0\, f_{00}(x,y) = F\delta(x,y); \tag{11}$$

$E_{ir}(x,y)$ – фундаментальні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь Гельмгольца

$$D_i\, f_i(x,y) = F\delta(x,y) \quad (i=1,2). \tag{12}$$

Зазначимо, що операторний метод інтегрування неоднорідного рівняння вигляду $\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\Phi^0(r) = a\left(\nabla^2 + q\right)\theta(r)$ ($k_{1,2},\ a,\ q$ – сталі) використовувався у [31, с. 125].

Фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь (10) і (11) відомі [32, с. 237, 238]:

$$E_{0r}(x,y)=\frac{F}{2\pi}\ln r,\quad E_{00r}(x,y)=\frac{F}{8\pi}r^2\ln r\quad (r^2=x^2+y^2). \tag{13}$$

У [25] доволі складним чином визначався фундаментальний розв'язок $\sum_q$ диференціального рівняння $\nabla^2\nabla^2\sum+i\mu^2\sum=\delta(\rho)/N$, де $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, $i=\sqrt{-1}$, (x_0,y_0) – координати полюса (точки прикладення одиничної зосередженої сили), μ, N – сталі. Для знаходження фундаментального розв'язку рівняння $\nabla^2\sum+i\mu^2\sum=\delta(\rho)/N$ застосовувався метод розкладання оператора зсуву $(\nabla^2+i\mu^2)^{-1}$ за степенями ∇^2 з використанням залежності $\nabla^{-2}\delta(\rho)=\ln\rho^2/(4\pi)$. У [33, с. 70] наведено елементарний розв'язок диференціальних рівнянь Гельмгольца в інтегральному вигляді.

Ми вчинимо в цій роботі інакше, на наш погляд простіше.

Розглянемо навантаження пластини рівномірно розподіленим навантаженням q_0 по колу радіуса r_0, тобто навантаження $q(r)$ зобразиться у вигляді:

$$q(r)=q_0\,\delta(r-r_0).$$

Знайдемо для такого навантаження частинні розв'язки неоднорідних рівнянь:

$$D_i f_i(x,y)=q_0\delta(r-r_0)\quad (i=1,2). \tag{14}$$

Використаємо метод інтегрального перетворення Ханкеля [34, с. 67]. При оберненому перетворенні потрібно буде визначити інтеграл

$$\int_0^\infty\frac{x\,J_\nu(ax)\,J_\nu(bx)}{(x^2+c^2)}dx,$$

який на основі [35, с. 693] має вигляд:

$$\int_0^\infty\frac{xJ_\nu(ax)\,J_\nu(bx)}{(x^2+c^2)}dx=\begin{cases}I_\nu(bc)K_\nu(ac) & (0<b<a,\ \mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1);\\ I_\nu(ac)K_\nu(bc) & (0<a<b,\ \mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1),\end{cases}$$

де $I_\nu(bc)$, $K_\nu(ac)$ – модифікована функція Бесселя і функція Макдональда відповідно.

Не зупиняючись на проміжних викладках, наведемо частинні розв'язки $f_{ir}(x,y)$ рівнянь (14) з урахуванням вищесказаного:

$$f_{ir}(x,y)=\begin{cases}-q_0\,r_0\,I_0\left(r\sqrt{s_i}\right)K_0\left(r_0\sqrt{s_i}\right) & (0<r<r_0);\\ -q_0\,r_0\,I_0\left(r_0\sqrt{s_i}\right)K_0\left(r\sqrt{s_i}\right) & (r>r_0).\end{cases} \tag{15}$$

Спрямовуючи r_0 до нуля та ураховуючи при цьому, що $I_0\left(r_0\sqrt{s_i}\right)\to 1$, а $2\pi r_0\,q_0\to F$, де F – зосереджена сила, прикладена на початку координат у точці $O(0,0)$, із (15) (при $r>0$), отримаємо фундаментальні розв'язки $E_{ir}(x,y)$ рівнянь (12).

$$E_{ir}(x,y)=-\frac{F}{2\pi}K_0\left(r\sqrt{s_i}\right). \tag{16}$$

Приймаючи до уваги (9), (13) та (16), одержимо фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь (6) через оператор D_{k0}:

$$E_k\left(x,y\right)=\frac{a_{k0}F_0D_{k0}}{2\pi s_1s_2}\left(c_{1r}K_0\left(r\sqrt{s_1}\right)+c_{2r}K_0\left(r\sqrt{s_2}\right)+c_{0r}\ln r+c_{00r}r^2\ln r\right), \tag{17}$$

де

$$c_{1r}=-\frac{s_2}{s_1s_{12}};\quad c_{2r}=-\frac{s_1}{s_2s_{21}};\quad c_{0r}=-\left(\frac{s_2}{s_1s_{12}}+\frac{s_1}{s_2s_{21}}\right);\quad c_{00r}=\frac{1}{4}.$$

Ураховуючи (17), співвідношення (7) і залежність

$$\nabla^{2n}K_0\left(r\sqrt{s_i}\right)=s_i^nK_0\left(r\sqrt{s_i}\right)\quad (n=1,2,...),$$

дістанемо фундаментальні розв'язки рівнянь (6) в остаточному вигляді:

$$E_k\left(x,y\right)=\frac{a_{k0}\,F}{2\pi\,s_1s_2}\Big(c_{1r}\left(s_1-s_{k0}\right)K_0\left(r\sqrt{s_1}\right)+c_{2r}\left(s_2-s_{k0}\right)K_0\left(r\sqrt{s_2}\right)-$$

$$-s_{k0}\,c_{0r}\ln r+c_{00r}\left(4+4\ln r-s_{k0}\,r^2\ln r\right)\Big)\;. \tag{18}$$

Приймаючи до уваги (18), вирази (2) для операторів $\Pi_{11},...,\Pi_{33}$ та залежності (8), знайдемо фундаментальні розв'язки w_{1E} і w_{3E} визначальної СДР (5):

$$w_{1E}\left(x,y\right)=\frac{F}{2\pi}\left(\gamma_{11}K_0\left(r\sqrt{s_1}\right)+\gamma_{12}K_0\left(r\sqrt{s_2}\right)+\gamma_{13}\left(\ln r+1\right)-\gamma_{14}\left(c_{0r}\ln r+\frac{1}{4}r^2\ln r\right)\right);$$

$$w_{3E}\left(x,y\right)=\frac{F}{2\pi}\left(\gamma_{31}K_0\left(r\sqrt{s_1}\right)+\gamma_{32}K_0\left(r\sqrt{s_2}\right)+\gamma_{33}\left(1+\ln r\right)\right), \tag{19}$$

де

$$\gamma_{11}=\frac{1}{s_1s_2}\left(-a_{10}\alpha_{11s}+a_{30}\alpha_{13s}\right);\quad \gamma_{12}=\frac{1}{s_1s_2}\left(-a_{10}\alpha_{12s}+a_{30}\alpha_{14s}\right);$$

$$\gamma_{13}=\frac{1}{s_1s_2}\left(-a_{10}\left(\mu_{332}\,s_{10}-\mu_{330}\right)+a_{30}\mu_{132}\,s_{30}\right);\quad \gamma_{14}=\frac{-1}{s_1s_2}a_{10}\mu_{330}\,s_{10};$$

$$\gamma_{31}=\frac{1}{s_1s_2}\left(a_{10}\alpha_{31s}-a_{30}\alpha_{33s}\right);\quad \gamma_{32}=\frac{1}{s_1s_2}\left(a_{10}\alpha_{32s}-a_{30}\alpha_{34s}\right);\quad \gamma_{33}=\frac{1}{s_1s_2}a_{10}\mu_{312}s_{10}:$$

$$\alpha_{11s}=\frac{s_2}{s_1s_{12}}\left(s_1-s_{10}\right)\left(\mu_{334}s_1^2+\mu_{332}s_1+\mu_{330}\right);$$

$$\alpha_{12s}=\frac{s_1}{s_2s_{21}}\left(s_2-s_{10}\right)\left(\mu_{334}s_2^2+\mu_{332}s_2+\mu_{330}\right);$$

$$\alpha_{13s}=\frac{s_2}{s_{12}}\left(s_1-s_{30}\right)\left(\mu_{134}s_1+\mu_{132}\right);\quad \alpha_{14s}=\frac{s_1}{s_{21}}\left(s_2-s_{30}\right)\left(\mu_{134}s_2+\mu_{132}\right);$$

$$\alpha_{31s}=\frac{s_2}{s_{12}}\left(s_1-s_{10}\right)\left(\mu_{314}s_1+\mu_{312}\right);\quad \alpha_{32s}=\frac{s_1}{s_{21}}\left(s_2-s_{10}\right)\left(\mu_{314}s_2+\mu_{312}\right);$$

$$\alpha_{33s} = \frac{s_1 s_2}{s_{12}} \mu_{114} \left(s_1 - s_{30} \right); \quad \alpha_{34s} = \frac{s_1 s_2}{s_{21}} \mu_{114} \left(s_2 - s_{30} \right).$$

Оскільки при $r \to 0$ функція Макдональда $K_0\left(r\sqrt{s_i}\right) \to \ln 2 \Big/ \left(r\sqrt{s_i}\right)$, то із (19) випливає, що при $r \to 0$

$$w_{1E}\left(x,y\right) \to \frac{F}{2\pi}\left(\gamma_{13} - \gamma_{11} - \gamma_{12} - \gamma_{14} c_{0r}\right) \ln r; \quad w_{3E}\left(x,y\right) \to \frac{F}{2\pi}\left(\gamma_{33} - \gamma_{31} - \gamma_{32}\right) \ln r,$$

тобто обидва фундаментальні розв’язки при $r = 0$ мають логарифмічну особливість.

Зауважимо, що в [26] застосовувався метод інтегрального перетворення Ханкеля безпосередньо до диференціального рівняння вигляду $\nabla^2 \nabla^2 \sigma + i\mu^2 \sigma = q_0\, \delta\left(r - r_0\right) \big/ D$, ($r_0$, μ, D – сталі, $\sigma = \sigma\left(r\right)$).

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ В НАБЛИЖЕННІ $k = 1,3,5$

У цьому наближенні, приймаючи до уваги неоднорідну визначальну СДР (3), фундаментальні розв’язки визначатимуться з наступної системи дванадцятого порядку:

$$\begin{aligned} &\Pi_{11} w_1 + \Pi_{13} w_3 + \Pi_{15} w_5 = \Pi_{1q} F \delta\left(x,y\right); \\ &\Pi_{31} w_1 + \Pi_{33} w_3 + \Pi_{35} w_5 = \Pi_{3q} F \delta\left(x,y\right); \\ &\Pi_{51} w_1 + \Pi_{53} w_3 + \Pi_{55} w_5 = \Pi_{5q} F \delta\left(x,y\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Систему (20) з урахуванням (4) зведемо до трьох неоднорідних рівнянь дванадцятого порядку для знаходження фундаментальних розв’язків:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \Phi_k\left(x,y\right) = a_{k0} D_{k0} F \delta\left(x,y\right) \quad (k = 1,3,5), \tag{21}$$

де

$$D_i = \nabla^2 - s_i, \quad D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0},$$

a і s з індексами – МГП пластини (інші, ніж у (7)).

Із системи (20) фундаментальні розв’язки $w_{1E}\left(x,y\right)$, $w_{3E}\left(x,y\right)$ і $w_{5E}\left(x,y\right)$ знайдуться з залежностей:

$$w_{kE}\left(x,y\right) = \Pi^0_{1k} E_1 + \Pi^0_{3k} E_3 + \Pi^0_{5k} E_5, \tag{22}$$

де Π^0_{ij} – ад’юнкти (восьмого порядку) диференціального визначника системи (20); $E_1\left(x,y\right)$, $E_3\left(x,y\right)$, $E_5\left(x,y\right)$ – фундаментальні розв’язки рівнянь (21), які виражаються через фундаментальні розв’язки E_{0r}, E_{00r}, E_{ir} $(i = 1,2,3,4)$ рівнянь (10)–(12) за формулами (13) і (16).

Показано, що $E_k\left(x,y\right)$ $(k = 1,3,5)$ знаходяться із залежностей:

$$\begin{aligned} E_k\left(x,y\right) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2 s_3 s_4} \Bigg(&\frac{s_2 s_3 s_4}{s_1 s_{12} s_{13} s_{14}}\left(E_{1r} - E_{0r}\right) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_2 s_{21} s_{23} s_{24}}\left(E_{2r} - E_{0r}\right) + \\ + &\frac{s_1 s_2 s_4}{s_3 s_{31} s_{32} s_{34}}\left(E_{3r} - E_{0r}\right) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_4 s_{41} s_{42} s_{43}}\left(E_{4r} - E_{0r}\right) + E_{00r} \Bigg). \end{aligned} \tag{23}$$

З урахуванням виразів для фундаментальних розв’язків, що входять до (23), дістанемо

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}\,F}{2\pi\,s_1s_2s_3s_4}\left(\sum_{i=1}^{4}b_iK_0\left(r\sqrt{s_i}\right)+b_5\ln r+b_6\,r^2\ln r+b_7\right), \tag{24}$$

де b з індексами – МГП.

Ураховуючи (22) і (24), знаходимо фундаментальні розв'язки $w_{kE}(x,y)$ системи рівнянь (20) у вигляді:

$$w_{1E}(x,y)=\frac{F}{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}K_0\left(r\sqrt{s_i}\right)+a_{15}+a_{16}\ln r+a_{17}r^2\ln r\right);$$

$$w_{iE}(x,y)=\frac{F}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\,K_0\left(r\sqrt{s_j}\right)+a_{i5}+a_{i6}\ln r\right)\quad (i=3,\,5), \tag{25}$$

де a з індексами – МГП пластини.

Як бачимо, фундаментальні розв'язки $w_{kE}(x,y)$ при $r=0$ також мають логарифмічну особливість.

Якщо зосереджене навантаження F прикладене не в початку координат – точці $O(0,0)$, а в полюсі $O_1(x_0,y_0)$, то у формулах (18), (19), (24), (25) потрібно замінити r на ρ.

Тут $\rho=\left(r_0^2+r^2-2\,r\,r_0\cos\varphi\right)^{1/2}=CO_1$, $r_0=\left(x_0^2+y_0^2\right)^{1/2}=OO_1$, $r=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=OC$; (x,y) – координати довільної точки C, $\varphi=\angle COO_1$.

Інші компоненти переміщень і всіх напружень виражаються остаточно через поліноми Лежандра і складові $w_k(x,y)$ поперечного переміщення $W(x,y,z)$ [18–20].

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

1. Поперечне навантаження пластини по дузі кола.

Побудуємо частинні розв'язки рівнянь

$$D_0D_0D_1D_2\varPhi_k(x,y)=a_{k0}D_{k0}q(x,y)\quad (k=1{,}3), \tag{26}$$

де $q(x,y)$ рівномірно розподілене навантаження ($q(x,y)=q_0$) діє на пластину по дузі AB кола радіуса r_0, яка стягує центральний кут α ($\alpha=\angle AOB$). Введемо полярну систему координат $r,\ \theta$ з початком у точці O і віссю Ox, яка співпадає з напрямком OA. У цій системі точки $A,\ B$ і довільна точка C мають такі координати: $A(r_0,0)$, $B(r_0,\alpha)$, $C(r,\beta)$. Навантаження по елементарній дузі $q_0r_0d\theta$ з серединою в точці $O_1(r_0,\theta)$, де $0\le\theta\le\alpha$, буде $q_0r_0d\theta$. Частинні розв'язки рівнянь (26) від елементарного навантаження, які залежать від координат (x,y) (координат довільної точки C), знайдуться на основі (18) при заміні F на $q_0r_0d\theta$ і r на ρ:

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}q_0r_0d\theta}{2\pi s_1s_2}\left(a_1K_0\left(\rho\sqrt{s_1}\right)+a_2K_0\left(\rho\sqrt{s_2}\right)+a_3\ln\rho+a_4\rho^2\ln\rho+1\right),$$

де $a_1,\dots,a_4$ – відповідні сталі.

Запишемо останню рівність по-іншому, використавши теорему додавання для функції Макдональда [36, с. 42] і проінтегрувавши по θ від 0 до α.

Дістанемо

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2}\int_0^{\alpha}\Bigg(a_1\sum_{m=-\infty}^{+\infty}K_m\left(r_0\sqrt{s_1}\right)I_m\left(r\sqrt{s_1}\right)\cos m\varphi+$$

$$+a_2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}K_m\left(r_0\sqrt{s_2}\right)I_m\left(r\sqrt{s_2}\right)\cos m\varphi+a_3\ln\rho+a_4\rho^2\ln\rho+1\Bigg)d\theta \quad (r<r_0);$$

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2}\int_0^{\alpha}\Bigg(a_1\sum_{m=-\infty}^{+\infty}K_m\left(r\sqrt{s_1}\right)I_m\left(r_0\sqrt{s_1}\right)\cos m\varphi+$$

$$+a_2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}K_m\left(r\sqrt{s_2}\right)I_m\left(r_0\sqrt{s_2}\right)\cos m\varphi+a_3\ln\rho+a_4\rho^2\ln\rho+1\Bigg)d\theta \quad (r>r_0),$$

де $\varphi=\angle COO_1$.

Прийнявши до уваги, що $\theta=\beta-\varphi$, матимемо наступні залежності.

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2}\Bigg(2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{m(2\beta-\alpha)}{2}\left(a_1K_m\left(r_0\sqrt{s_1}\right)I_m\left(r\sqrt{s_1}\right)+\right.$$

$$\left.+a_2K_m\left(r_0\sqrt{s_2}\right)I_m\left(r\sqrt{s_2}\right)\right)+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\left(a_3\ln\rho+a_4\,\rho^2\ln\rho\right)d\varphi+\alpha\Bigg) \quad (r<r_0); \tag{27}$$

$$E_k(x,y)=\frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2}\Bigg(2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{m(2\beta-\alpha)}{2}\left(a_1K_m\left(r\sqrt{s_1}\right)I_m\left(r_0\sqrt{s_1}\right)+\right.$$

$$\left.+a_2K_m\left(r\sqrt{s_2}\right)I_m\left(r_0\sqrt{s_2}\right)\right)+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\left(a_3\ln\rho+a_4\rho^2\ln\rho\right)d\varphi+\alpha\Bigg) \quad (r>r_0)\ , \tag{28}$$

де в (27) і (28) при $m=0$ множник $\frac{1}{m}\sin\frac{m\alpha}{2}$ замінюється на $\frac{\alpha}{2}$.

Як бачимо, частинні розв’язки рівнянь (26) при $r=r_0$ співпадають і не мають особливостей. Якщо в (27) і (28) покласти $\alpha=2\pi$, то отримаємо частинні розв’язки (26) при дії на пластину рівномірно розподіленого навантаження q_0 по колу радіуса r_0:

$$E_k(x,y)=\frac{-a_{k0}q_0r_0}{s_1s_2}\Bigg(\frac{s_2}{s_1s_{12}}(s_1-s_{k0})K_0\left(r_0\sqrt{s_1}\right)I_0\left(r\sqrt{s_1}\right)+\frac{s_1}{s_1s_{21}}(s_2-s_{k0})K_0\left(r_0\sqrt{s_2}\right)I_0\left(r\sqrt{s_2}\right)-$$

$$-\left(1-s_{k0}c_{0r}\right)\ln r_0+\frac{s_{k0}}{4}\left(\left(r^2+r_0^2\right)\ln r_0+r^2\right)-1\Bigg) \quad (r<r_0);$$

$$E_k(x,y)=\frac{-a_{k0}q_0r_0}{s_1s_2}\Bigg(\frac{s_2}{s_1s_{12}}(s_1-s_{k0})K_0\left(r\sqrt{s_1}\right)I_0\left(r_0\sqrt{s_1}\right)+\frac{s_1}{s_1s_{21}}(s_2-s_{k0})K_0\left(r\sqrt{s_2}\right)I_0\left(r_0\sqrt{s_2}\right)-$$

$$-\left(1-s_{k0}\,c_{0r}\right)\ln r+\frac{s_{k0}}{4}\left(\left(r^2+r_0^2\right)\ln r+r_0^2\right)-1\Bigg) \quad (r>r_0).$$

Цей результат співпадає з частинними розв’язками рівнянь

$$D_0D_0D_1D_2\Phi_k(x,y)=a_{k0}D_{k0}F\delta(r-r_0) \quad (k=1,3)\ ,$$

які отримуються операторним методом інтегрування з подальшим використанням методу інтегрального перетворення Ханкеля до рівнянь (10)–(12) з правими частинами $q_0\delta(r-r_0)$.

2. Поперечне навантаження пластини по довільній області.

Нехай пластина, яка займає область $D\ \ (x, y \in D)$, навантажена по довільній своїй підобласті $D_0\ \ (x_0, y_0 \in D_0,\ \ D_0 \subseteq D)$ поперечним навантаженням $q = q_0\left(x_0, y_0\right)$. Тоді частинні розв'язки $w_{k\,r}\left(x, y\right)$ системи визначальних рівнянь (1) $(k=1,3)$ і (3) $(k=1,3,5)$ зобразяться в інтегральному вигляді наступним чином:

$$w_{k\,r}\left(x, y\right) = \iint_{D_0} q_0\left(x_0, y_0\right) w_{kE}^{0}\left(x, y, x_0, y_0\right) dx_0 dy_0 \,. \tag{29}$$

Тут $w_{kE}^{0}\left(x, y, x_0, y_0\right)$ – фундаментальні розв'язки, які відповідають одиничній зосередженій силі $(F=1)$, прикладеній у точці (x_0, y_0) пластини, тобто

$$w_{kE}^{0}\left(x, y, x_0, y_0\right) = w_{kE}\left(\ F = 1, r \to \rho = \left(\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2\right)^{1/2}\right),$$

де w_{kE} виражаються за формулами (19), (25).

Якщо ж на пластину у точках $\left(x_i, y_i\right)$ діють ще й зосереджені сили F_i, то до розв'язків (29) потрібно додати фундаментальні розв'язки $w_{kE,i}\left(x, y\right)$, де

$$w_{k\,E,i}\left(x, y\right) = w_{k\,E}\left(F = F_i, r \to \rho_i = \left(\left(x - x_i\right)^2 + \left(y - y_i\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

ВИСНОВКИ

1. Розроблена методика знаходження фундаментальних розв'язків систем диференціальних рівнянь високого порядку математичної теорії пластин довільної сталої товщини.
2. Побудовані фундаментальні розв'язки визначальних систем рівнянь восьмого і дванадцятого порядків (в другому і третьому наближеннях у рядах Фур'є-Лежандра для переміщень).
3. Фундаментальні розв'язки мають логарифмічну особливість у точках прикладення зосереджених сил.
4. На лініях дії розподіленого навантаження частинні розв'язки особливостей не мають.
5. Отримані аналітичні вирази для фундаментальних розв'язків можна в перспективі використовувати для знаходження частинних розв'язків у граничних задачах для товстих пластин при дії довільних поперечних навантажень на довільних площинках. При цьому рекомендується застосовувати чисельно-аналітичні методи для визначення відповідних інтегралів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Phys*. 1944. 33. P. 184–191.
2. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. Львів: «Інтелект–Захід», 2007. 240 с.
3. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrow A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-function method combined with spline-approximation. *Journal of applied mathematics and mechanics*. 2011. Vol. 91, Is. 6. P. 458–467.
4. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells. *Journal of applied mathematics and mechanics*. 2012. Vol. 92, Is. 11-12. P. 910–920.

5. Altenbach H., Eremeyew V. A. On the linear theory of micropolar plates. *Journal of applied mathematics and mechanics*. 2009. Vol. 89, Is. 4. P. 4242–250.

6. Немиш Ю. Н., Хома И. Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор. *Прикл. механіка*. 1991. 29, №11. С. 3–27.

7. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 2. С. 22–57.

8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища школа, 1985. 190 с.

9. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке. *Прикл. механика*. 1990. 26, № 2. С. 49–56.

10. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел. *Прикл. механіка*. 2000. Т. 36, № 2. С. 3–38.

11. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. *Тр. Тбилисского матем. ин-та*. 1955. Т. 21. С. 191–293.

12. Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1978. 192 с.

13. Cicala P. Sulla teria elastica della plate sottile. *Giorn genio Civile*. 1959. 97, № 4. P. 238–256.

14. Хома І. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1986. 170 с.

15. Плеханов А. В., Прусаков А. П. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины. *Механика твердого тела*. 1976. № 3. С. 84–90.

16. Прусаков А. П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины. *Прикл. механика*. 1993. Т. 29, № 12. С. 51–58.

17. Reissner E. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. and Phys*. 1950. V. 29, № 2. P. 90–95.

18. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь некласичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Зб. наукових праць. Дніпропетровськ : ДНУ, 2003. Вип. 5. С. 70–79.

19. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії транстропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2007. № 2/2. С. 84–94.

20. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Т. 17, № 5. 2009. *Механіка*. В. 13, Т. 2. С. 54–62.

21. Григоренко А. Я., Бергулев А. С., Яремченко С. Н. О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин. *Доп. НАН України*. 2011. № 9. С. 49–55.

22. Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках. *Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек* (Днепропетровск, 1969). Москва: Наука, 1969. С. 142–145.

23. Величко П. М., Шевченко В. П. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1969. № 2. С. 147–151.

24. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропных оболочек при сосредоточенных воздействиях. *Прикл. механика*. 1972. Т. 8, Вып. 11. С. 21–27.

25. Ван Фо Фи. До задачі рівноваги пологої сферичної оболонки. *Доповіді АН Української РСР*. 1960. № 5. С. 609–611.

26. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Розв'язок задачі згину пологих сферичних оболонок. *Прикл. механіка*. 1964. Т. 10, Вип. 4. С. 382–391.

27. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2005. № 10/1. Вип. 9, Т. 2. С. 51–58.

28. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.

29. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Т. 20, № 5. 2012. *Механіка*. В. 16, Т. 2/1. С. 60–66.

30. Зеленський А. Г. Про розв'язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 2. С. 79–86.

31. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир, 1970. 256 с.

32. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Москва: Мир, 1978. 520 с.

33. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва–Ленинград: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-технической лит., 1948. 296 с.

34. Трантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. Москва: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-технической лит., 1956. 204 с.

35. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.

36. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. Москва: Наука, 1971. 288 с.

REFERENCES

1. Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. J. of Math and Phys, 33, pp. 184-191.

2. Burak, Ya. Y., Rudavskiy, Yu. K. & Suhorolskiy, M. A. (2007). Analytical mechanics of locally loaded shells. LvIv: "Intelekt–ZahId".

3. Awrejcewicz, J., Kurpa, L. & Osetrow, A. (2011). Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-function method combined with spline-approximation. Journal of applied mathematics and mechanics, Vol. 91, Is. 6, pp. 458-467.

4. Kulikov, G. M. & Plotnikova, S. V. (2012). On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells. Journal of applied mathematics and mechanics, Vol. 92, Is. 11-12, pp. 910-920.

5. Altenbach, H. & Eremeyew, V. A. (2009). On the linear theory of micropolar plates. Journal of applied mathematics and mechanics, Vol. 89, Is. 4, pp. 4242-250.

6. Nemish, Yu. N. & Homa, I. Yu. (1991). The stressed and deformed state of non-thin plates and shells. Generalized theory. Review. Prikl. mehanIka, 29, No. 11, pp. 3-27.

7. Piskunov, V. G. & Rasskazov, A. O. (2002). Development of the theory of layered plates and shells. Prikl. mehanika, 38, No. 2, pp. 22–57.

8. Grigorenko, Ya. M., Vasilenko, A. T. & Pankratova, N. D. (1985). Static state of anisotropic thick-walled shells. Kiev: Vischa shkola.

9. Pankratova, N. D. & Mukoed, A. A. (1990). To the calculation of the stress state of inhomogeneous plates in the spatial formulation. Prikl. mehanika, 26, No. 2, pp. 49-56.

10. Nemish, Yu. N. (2000). Development of analytical methods in three-dimensional static problems of anisotropic bodies. Prikl. mehanIka, Vol. 36, No. 2, pp. 3-38.

11. Vekua, I. N. (1955). On a method of calculating prismatic shells. Tr. Tbilisskogo matem. in-ta, Vol. 21, pp. 191-293.

12. Gulyaev, V. I., Bazhenov, V. A. & Lizunov, P. P. (1978). Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems. Lvov: Izd-vo Lvovskogo un-ta.
13. Cicala, P. (1959). Sulla teria elastica della plate sottile. Giorn genio Civile, 97, No. 4, pp. 238-256.
14. Homa, I. Yu. (1986). Generalized Theory of Anisotropic Shells. Kiyv: Naukova dumka.
15. Plehanov, A. V. & Prusakov, A. P. (1976). On an asymptotic method for constructing a theory of bending of plates of average thickness. Mehanika tverdogo tela, No. 3, pp. 84-90.
16. Prusakov, A. P. (1993). On the construction of twelve-order bend equations for a transversely isotropic plate. Prikl. mehanika, Vol. 29, No. 12, pp. 51-58.
17. Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. J. Math. and Phys, Vol. 29, No. 2, pp. 90-95.
18. Zelenskiy, A. G. (2003). On solving a system of differential equations of a nonclassical plate theory. Metodi rozv'yazuvannya prikladnih za-dach mehanIki deformIvnogo tverdogo tIla. Zb. naukovih prats. DnIpropetrovsk: DNU, Vol. 5, pp. 70-79.
19. Zelenskiy, A. G. & Serebryanska, P. A. (2007). The method of interrelated equations in the analytical theory of transversally isotropic plates, taking into account higher approximations. VIsnik DnIpropetr. un-tu. MehanIka, №2/2, pp. 84-94.
20. Zelenskiy, A. G. (2009). Models of analytical theory of transversally isotropic plates. VIsnik DnIpropetr. un-tu, Vol. 17, No. 5. MehanIka. Issue 13, Vol. 2, pp. 54-62.
21. Grigorenko, A. Ya., Bergulev, A. S. & Yaremchenko, S. N. (2011). On the stress-strain state of orthotropic thick-walled rectangular plates. Dop. NAN UkraYini, No. 9, pp. 49-55.
22. Velichko, P. M., Shevlyakov, Yu. A. & Shevchenko, V. P. (1969). Stresses and deformations of plates and shells under local loads. Proceeding of the 7th All-Union Conference on the Theory of Plates and Shells, (pp. 142-145), (Dnepropetrovsk, 1969), Moscow: Nauka.
23. Velichko, P. M. & Shevchenko, V. P. (1969). On the effect of concentrated forces and moments on the shell of positive curvature. Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela, No. 2, pp. 147-151.
24. Hizhnyak, V. K. & Shevchenko, V. P. (1972). Stresses and strains in transversely isotropic shells from local loads. Prikl. Mehanika, Vol. 8, Issue 11, pp. 21-27.
25. Van Fo, Fi (1960). To the equilibrium problem of a flattened spherical shell. DopovIdI AN UkraYinskoYi RSR, No. 5, pp. 609-611.
26. Shevlyakov, Yu. A. & Shevchenko, V. P. (1964). Solving the problem of bending oblate spherical shells. Prikl. mehanIka, Vol. 10, Issue 4, pp. 382-391.
27. Zelenskiy, A. G. (2005). Edge effects in non-thin plates. VIsnik DnIpropetr. un-tu. MehanIka, No. 10/1, Issue 9, Vol. 2, pp. 51-58.
28. Elsgolts, L. E. (1969). Differential equations and calculus of variations. Moscow: Nauka.
29. Zelenskiy, A. G. (2012). The method of reducing the order of inhomogeneous differential equations with partial derivatives in the theory of medium thickness plates. VIsnik DnIpropetr. un-tu, Vol. 20, No. 5. MehanIka, Issue 16, Vol. 2/1, pp. 60-66.
30. Zelenskiy, A. G. (2015). On the solution of the basic equations of flexion of a variant of the mathematical theory of non-thin plates. VIsnik ZaporIzkogo natsIonalnogo unIversi-tetu. FIziko-matematichnI nauki, No. 2, pp. 79-86.
31. Novatskiy, V. (1970). Dynamic problems of thermoelasticity. Moscow: Mir.
32. Kech, V. & Teodoresku, P. (1978). Introduction to the theory of generalized functions with applications in engineering. Moscow: Mir.
33. Vekua, I. N. (1948). New methods for solving elliptic equations. Moscow–Leningrad: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit.

34. Tranter, K. D. (1956). Integral transformations in mathematical physics. Moscow: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit.

35. Gradshteyn, I. S. & Ryizhik, I. M. (1971). Tables of integrals, series, sums. Moscow: Nauka.

36. Korenev, B. G. (1971). Introduction to the theory of Bessel functions. Moscow: Nauka.

УДК 519.8 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-03

АЛГОРИТМИ НА ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА ДВІ ЧАСТИНИ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Сардак В. І., аспірант, Терешко Я. В., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

Досліджується проблема розбиття мультимножини чисел на дві частини у такий спосіб, щоб різниця між сумою чисел у двох частинах розбиття була мінімальною по модулю. Уже згадана задача належить до класу NP-важких задач, для неї невідомі алгоритми поліноміальної трудомісткості. Отже, для задачі виправдане застосування метаевристик різних типів. Показано, що задача має природну фрагментарну структуру, в якій елементарними фрагментами є одноелементні підмножини. Наявність фрагментарної структури дозволяє звести цю задачу до задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок. Множина перестановок розглядається при цьому як метричний простір з метрикою Кендалла. Причому будь-якому допустимому розв’язку вихідної задачі відповідає одна або кілька перестановок. Такий підхід дає можливість застосувати для пошуку наближених рішень задачі ряд алгоритмів пошуку оптимуму на множині перестановок. Найбільш простим і відомим алгоритмом пошуку оптимуму в метричному просторі є алгоритм локального пошуку в ε-околиці випадково обраної точки. Для забезпечення пошуку глобального оптимуму цей алгоритм застосовується кілька разів з різним вибором початкової точки. Фрагментарна структура задачі дозволяє побудувати універсальні алгоритми, що імітують природні процеси. У цій роботі розглянуті два алгоритми подібного виду. Це еволюційний алгоритм на множині перестановок і алгоритм мурашиної колонії. Для оцінки якості запропонованих метаевристик розроблений генератор випадкових задач розглянутого типу. Згенеровано кілька серій задач. Кожна із задач серії розв’язувалася шляхом використання трьох різних алгоритмів. Причому параметри алгоритмів підібрані у такий спосіб, щоб кількість обчислень значення цільової функції була приблизно однаковою в кожному випадку. На основі множини згенерованих задач проведено порівняння локального, еволюційного і мурашиного алгоритмів.

Ключові слова: задача про розбиття множини, фрагментарна структура, еволюційний алгоритм, алгоритм мурашиної колонії.

ALGORITHMS BASED ON FRAGMENTARY STRUCTURES FOR THE PROBLEM OF DIVIDING A SET INTO TWO-PART

Kozin I., Sardak V., Tereshko I.

Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

The partitioning a multiset of numbers into two parts problem is investigated in article. The partitioning muxst be such, that the difference of sums of numbers in two parts of the partition is minimal modulo. The problem under consideration belongs to the class of NP-difficult problems, for it algorithms of polynomial complexity are unknown. Thus, the application of metaheuristics of various types is justified for the problem. It is shown that the problem has a natural fragmentary structure, in which the elementary fragments are singleton subsets. The presence of a fragmentary structure allows us to reduce this problem to the problem of combinatorial optimization on the set of permutations. The set of