УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-08

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент,
Пожуева И. С., к.т.н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

tigr_lev@ukr.net

Опираясь на соотношения, связывающие производные перемещений и потенциала электрического поля, как обобщенные функции, с обычными производными, получена система линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Правые части уравнений содержат обобщенные функции, зависящие от скачков перемещений, напряжений, потенциала электрического поля, электрической индукции. Решение системы получено в виде свертки матрицы фундаментальных решений со столбцом правых частей системы. Полученное интегральное представление может быть использовано для сведения соответствующих краевых задач к сильносингулярным интегральным уравнениям.

Ключевые слова: пластина, регулярные обобщенные функции, электроупругость, пьезоэлектрическое напряжение, диэлектрическая проницаемость, вектор электрической индукции.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗРИВНОГО РОЗВ`ЯЗКУ ЗАДАЧІ, ЩО ОПИСУЄ УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПЛОСКИЙ ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНИ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент,
Пожуєва І. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

tigr_lev@ukr.net

Представлена робота є безпосереднім продовженням робіт [1, 2]. Дослідження напружено-деформованого стану твердих тіл, що деформуються та які містять дефекти, є важливою проблемою, тим більше в застосуванні до п’єзоелектричних тіл, які знаходять широке застосування в різних галузях науки і техніки. Водночас розв’язання відповідних крайових задач викликає серйозні математичні труднощі. В [1, 2] отримано інтегральні представлення розв’язків таких задач для анізотропних середовищ. До цього ж використовувався зв’язок між звичайними й узагальненими похідними регулярних узагальнених функцій. Ця методика застосовується і в цій роботі. Для розв’язання задач, пов’язаних із розрахунком подібних тіл, Г. Я. Поповим було запропоновано узагальнений метод інтегральних перетворень. Цей метод отримав розвиток у роботах Г. А. Моряря та інших дослідників. С. Краучем був запропонований метод розривних зсувів як варіант методу граничних елементів (МГЕ). Відповідні граничні елементи для анізотропних середовищ було отримано у попередніх роботах. При цьому використовувався зв’язок між звичайними й узагальненими похідними регулярних узагальнених функцій.

Спираючись на співвідношення, що пов’язують похідні переміщень і потенціалу електричного поля, як узагальнені функції, зі звичайними похідними, було отримано систему лінійних диференційних рівнянь у частинних похідних. Праві частини рівнянь містять узагальнені функції, що залежать від стрибків переміщень, напружень, потенціалу електричного поля, електричної індукції. Розв’язок системи отримано у вигляді згортки матриці фундаментальних рішень зі стовпцем правих частин системи. Отримане інтегральне представлення може бути використано для зведення відповідних крайових задач до сильносингулярних інтегральних рівнянь, які можуть бути розв’язані методом граничних елементів.

Ключові слова: пластина, регулярні узагальнені функції, електропружність, п’єзоелектричні навантаження, діелектрична проникність, вектор електричної індукції.

INTEGRAL REPRESENTATION OF THE DISCONTINUOUS SOLUTION OF THE PROBLEM DESCRIBING THE GENERALIZED PLANE ELECTROELASTIC CONDITION OF THE PIEZOELECTRIC PLATE

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Pozhueva I. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Proffessor,
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Proffessor

Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine

tigr_lev@ukr.net

The study of the stress-strain state of solid deformable bodies containing defects is an important problem, especially when applied to piezoelectric bodies that are widely used in various fields of science and technology. At the same time, the solution of the corresponding boundary value problems causes serious mathematical difficulties. To solve these problems G.Ya. Popov proposed a generalized method of integral transformations. This method was developed in the works of G.A. Morar and other researchers. Crouch proposed the method of discontinuous displacements as a variant of the method of boundary elements (MBE). The corresponding boundary elements for anisotropic media were obtained earlier. In the works [1, 2] integral representations of solutions of such problems for anisotropic media were obtained. In this connection, the connection between the ordinary and generalized derivatives of regular generalized functions was used. This technique is also used in this work. The present paper is a direct continuation of the works [1, 2].

Relying on the relationships connecting the derivatives of displacements and the potential of the electric field as generalized functions, with ordinary derivatives, a system of linear partial differential equations is obtained. The right-hand sides of the equations contain generalized functions that depend on jumps: displacements, voltages, electric field potential, electric induction. The solution of the system is obtained as a convolution of the matrix of fundamental solutions with a column of right-hand sides of the system. The resulting integral representation can be used to reduce the corresponding boundary value problems to strongly singular integral equations.

Key words: plate, regular generalized functions, electroelasticity, piezoelectric voltage, dielectric constant, electric induction vector.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1, 2]. Исследование напряженно-деформированного состояния твердых деформируемых тел, содержащих дефекты, является важной проблемой, тем более в применении к пьезоэлектрическим телам, которые находят широкое применение в различных областях науки и техники. В тоже время решение соответствующих краевых задач вызывает серьезные математические затруднения.

В [1, 2] получены интегральные представления решений таких задач для анизотропных сред. При этом использовалась связь между обычными и обобщенными производными регулярных обобщенных функций. Эта методика применяется и в данной работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где

$$L_{11} = c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{12} = L_{21} = c_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(c_{12} + c_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{13}=L_{31}=b_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(b_{12}+b_{31}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad L_{22}=c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2c_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2};\qquad (2)$$

$$L_{23}=L_{32}=b_{31}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(b_{32}+b_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad L_{33}=-a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь: c_{ij} – коэффициенты упругости; b_{ij} – коэффициенты пьезоэлектричности; a_{ij} – коэффициенты диэлектрической проницаемости.

Зависимость между компонентами тензора напряжений, тензора деформаций, вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции выражается следующим равенством:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ D_x\\ D_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{16} & -b_{11} & -b_{12}\\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & -b_{21} & -b_{22}\\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & -b_{31} & -b_{32}\\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & a_{11} & a_{12}\\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ E_x\\ E_y\end{bmatrix},\qquad (3)$$

где (E_x, $E_y =$) – напряженность электрического поля; (D_x, D_y) – вектор электрической индукции.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial u}{\partial y};\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x};\quad E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

где φ – потенциал электрического поля; u, v – перемещения в направлениях $0x$ и $0y$.

Рассматривается обобщенное плоское электроупругое состояние. $(x,y)\in B\subset R^2$, B – ограниченная область, ℓ_0 – кусочно-гладкая граница области B, $\ell_i = A_iB_i$ $(i=\overline{1,k})$ – гладкие кривые, лежащие в B. На ℓ_0 задается три граничных условия. Также по три условия задаются на ℓ_i. Кривые ℓ_i моделируют трещины или тонкие включения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$n^{(0)}=\left(n_x^{(0)},n_y^{(0)}\right)$ – единичный внешний нормальный вектор к ℓ_0;

$n^{(i)}=\left(n_x^{(i)},n_y^{(i)}\right)$ – произвольно направленный единичный вектор к ℓ_i $(i=\overline{1,k})$.

Если γ – кривая, лежащая в B, то на γ определяются:

вектор напряжений –

$$\sigma_x^n=\sigma_x\cos\left(\angle n,x\right)+\tau_{xy}\cos\left(\angle n,y\right),$$

$$\sigma_y^n=\tau_{xy}\cos\left(\angle n,x\right)+\sigma_y\cos\left(\angle n,y\right),$$

электрическая индукция –

$$D^n=D_x\cos\left(\angle n,x\right)+D_y\cos\left(\angle n,y\right),$$

где n – нормальный вектор к γ.

Учитывая (3), получаем:

$$\sigma_x^{(n)} = \left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{16}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, x) +$$
$$+\left(c_{16}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{26}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, y); \tag{4}$$

$$\sigma_y^{(n)} = \left(c_{16}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{26}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, x) +$$
$$+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{26}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, y);$$

$$D^{(n)} = \left(b_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + b_{21}\frac{\partial v}{\partial y} + b_{31}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, x) +$$
$$+\left(b_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + b_{32}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cos(\angle n, y).$$

Положим, $u(x,y) \equiv v(x,y) \equiv \varphi(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \notin B \cup \ell_0$. Будем рассматривать u, v и φ как регулярные обобщенные функции, $u \in D'(R^2)$, $v \in D'(R^2)$, $\varphi \in D'(R^2)$ [3]. Обозначим: $D^\alpha f(x,y)$ – производная порядка α регулярной обобщенной функции $f(x,y) \in D'(R^2)$, $\{D^\alpha f(x,y)\}$ – обычная производная порядка α функции $f(x,y)$.

Используя связь между $D^\alpha f(x,y)$ и $\{D^\alpha f(x,y)\}$, где $f(x,y) = u(x,y)$, или $f(x,y) = v(x,y)$, или $f(x,y) = \varphi(x,y)$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + \sum_{i=0}^{k} [f]_i\, n_x^{(i)} \delta(\ell_i); \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + \sum_{i=0}^{k} [f]_i\, n_y^{(i)} \delta(\ell_i);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\} + \sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i n_x^{(i)}\delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x}\left([f]_i\, n_x^{(i)}\delta(\ell_i)\right)\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right\} + \sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_i n_x^{(i)}\delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x}\left([f]_i\, n_y^{(i)}\delta(\ell_i)\right)\right) =$$
$$= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right\} + \sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i n_y^{(i)}\delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial y}\left([f]_i\, n_x^{(i)}\delta(\ell_i)\right)\right).$$

Здесь: $[g(x,y)]_i$ – скачок функции $g(x,y)$ на кривой ℓ_i в направлении нормали $n^{(i)}$; $\delta(\ell_i)$ – дельта-функция, сосредоточенная на ℓ_i ($i = \overline{0,k}$).

Учитывая (4) и (5), получаем:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$g_1=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\left[\sigma_x^{(n_i)}\right]_i\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(c_{11}[u]_i n_x^{(i)}+c_{16}[u]_i n_y^{(i)}+c_{16}[v]_i n_x^{(i)}+$$

$$+c_{12}[v]_i n_y^{(i)}+b_{11}[\varphi]_i n_x^{(i)}+b_{12}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(c_{16}[u]_i n_x^{(i)}+c_{66}[u]_i n_y^{(i)}+$$

$$+c_{66}[v]_i n_x^{(i)}+c_{26}[v]_i n_y^{(i)}+b_{31}[\varphi]_i n_x^{(i)}+b_{32}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)\Bigg);$$

$$g_2=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\left[\sigma_y^{(n_i)}\right]_i\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(c_{16}[u]_i n_x^{(i)}+c_{66}[u]_i n_y^{(i)}+c_{66}[v]_i n_x^{(i)}+c_{26}[v]_i n_y^{(i)}+$$

$$+b_{31}[\varphi]_i n_x^{(i)}+b_{32}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(c_{12}[u]_i n_x^{(i)}+c_{26}[u]_i n_y^{(i)}+$$

$$+c_{26}[v]_i n_x^{(i)}+c_{22}[v]_i n_y^{(i)}+b_{21}[\varphi]_i n_x^{(i)}+b_{22}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)\Bigg);$$

$$g_3=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\left[D^{n_i}\right]_i\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(b_{11}[u]_i n_x^{(i)}+b_{31}[u]_i n_y^{(i)}+b_{31}[v]_i n_x^{(i)}+b_{21}[v]_i n_y^{(i)}-$$

$$-a_{11}[\varphi]_i n_x^{(i)}-a_{12}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(b_{12}[u]_i n_x^{(i)}+b_{32}[u]_i n_y^{(i)}+$$

$$+b_{32}[v]_i n_x^{(i)}+b_{22}[v]_i n_y^{(i)}-a_{12}[\varphi]_i n_x^{(i)}-a_{22}[\varphi]_i n_y^{(i)}\Big)\delta(\ell_i)\Bigg). \tag{7}$$

Решение (6) получаем сверткой матрицы фундаментальных решений $\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{12}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{13}&\Gamma_{23}&\Gamma_{33}\end{bmatrix}$ с матрицей $\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}$. Матрица $\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{12}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{13}&\Gamma_{23}&\Gamma_{33}\end{bmatrix}$ – решение уравнения

$$\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}&L_{13}\\L_{21}&L_{22}&L_{23}\\L_{31}&L_{32}&L_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{12}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{13}&\Gamma_{23}&\Gamma_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\delta(x)\delta(y). \tag{8}$$

Решение (8) получено в [3]. Оно выражено в замкнутом виде через элементарные функции:

$$\begin{bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\\\varphi(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}(x,y)&\Gamma_{12}(x,y)&\Gamma_{13}(x,y)\\\Gamma_{12}(x,y)&\Gamma_{22}(x,y)&\Gamma_{23}(x,y)\\\Gamma_{13}(x,y)&\Gamma_{23}(x,y)&\Gamma_{33}(x,y)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}g_1(x,y)\\g_2(x,y)\\g_3(x,y)\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Выполнив (9) с учетом (4), получаем:

$$u(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\int_{\ell_i}\left[\sigma_\xi^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{11}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}+$$

$$+\int_{\ell_i}\left[\sigma_\eta^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}+\int_{\ell_i}\left[D^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[u(\xi,\eta)\right]_i\sigma_\xi^{n_i}\big(\Gamma_{11}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta)\big)\,ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[v(\xi,\eta)\right]_i \sigma_\eta^{n_i}\left(\Gamma_{11}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[\varphi(\xi,\eta)\right]_i D^{n_i}\left(\Gamma_{11}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}\Big); \tag{10}$$

$$v(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\int_{\ell_i}\left[\sigma_\xi^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}+$$

$$+\int_{\ell_i}\left[\sigma_\eta^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{22}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}++\int_{\ell_i}\left[D^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[u(\xi,\eta)\right]_i \sigma_\xi^{n_i}\left(\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{22}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[v(\xi,\eta)\right]_i \sigma_\eta^{n_i}\left(\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{22}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[\varphi(\xi,\eta)\right]_i D^{n_i}\left(\Gamma_{12}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{22}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}\Big); \tag{11}$$

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\Bigg(\int_{\ell_i}\left[\sigma_\xi^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}+$$

$$+\int_{\ell_i}\left[\sigma_\eta^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}+\int_{\ell_i}\left[D^{n_i}(u,v,\varphi)\right]_{(\xi,\eta)}\Gamma_{33}(x-\xi,y-\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[u(\xi,\eta)\right]_i \sigma_\xi^{n_i}\left(\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{33}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[v(\xi,\eta)\right]_i \sigma_\eta^{n_i}\left(\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{33}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}-$$

$$-\int_{\ell_i}\left[\varphi(\xi,\eta)\right]_i D^{n_i}\left(\Gamma_{13}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{23}(x-\xi,y-\eta),\Gamma_{33}(x-\xi,y-\eta)\right)ds_{(\xi,\eta)}\Big). \tag{12}$$

Устремляя в (10, 11, 12) точку (x,y) к ℓ_i ($i=\overline{0,k}$) и учитывая заданные условия на ℓ_i, получим сильно сингулярную систему граничных интегральных уравнений, которую можно решать МГЭ.

ВЫВОДЫ

Получено интегральное представление разрывного решения задачи, описывающей обобщенное плоское электроупругое состояние пьезоэлектрической пластины, содержащей дефекты (кривые, на которых терпят разрывы: перемещения, напряжения, потенциалы, индукция). Полученное представление позволяет свести краевую задачу к системе интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levada V. S., Khizhniak V. K., Levitskaya T. I. Integral representation discontinuous solution of the problem of bending of anisotropic plates. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 1. С. 107–114.
2. Левада В. С., Левицкая Т. И., Хижняк В. К. Интегральное представление разрывного решения плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 146–152.
3. Левада В. С., Левицкая Т. И., Пожуева И. С., Хижняк В. К. Построение матрицы фундаментальных решений системы уравнений, описывающих обобщенное плоское электроупругое состояние пьезоэлектрической пластиной. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 252–261.

REFERENCES

1. Levada, V. S., Khizhniak, V. K. & Levitskaya, T. I. (2015). Integral representation discontinuous solution of the problem of bending of anisotropic plates. Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhiyi ta mashynobuduvanni, No. 1, pp. 107–114.
2. Levada, V. S., Levitskaya, T. I. & Khizhniak, V. K. (2016). Integral representations of discontinuous solutions of plane problems of theory of elasticity for an anisotropic medium. Vìsnik Zaporìz′kogo nacìonal′nogo unìversitetu. Fìziko-matematičnì nauki, No. 1, pp. 146–152.
3. Levada, V. S., Levitskaya, T. I., Pozhueva, I. S. & Khizhniak, V. K. (2017). Construction of the matrix of fundamental solutions of the system of equations describing the generalized plane electrical elastic state of the piezoelectric plate. Vìsnik Zaporìz′kogo nacìonal′nogo unìversitetu. Fìziko-matematičnì nauki, 2017, No. 1, pp. 252–261.

УДК 519.6 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-09

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН У ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ

Литвин О. М., д. ф.-м. н., професор, Драгун В. В., аспірант

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна

vdragun.94@gmail.com

Міжсвердловинна томографія є важливим інструментом у моніторингу водосховищ, розвідці корисних копалин, будівництві та дослідженнях, пов’язаних з утилізацією радіоактивних відходів.
Проте жоден із відомих методів міжсвердловинної сейсмічної томографії не дає точної картини досліджуваного регіону. У зв’язку із цим виникає необхідність дослідити можливість використання методів комп’ютерної томографії в шахтній сейсмічній томографії для знаходження можливості поліпшення результатів досліджень.
У цій статті ми пропонуємо відновити значення повільності невідомої області в шахтній сейсмічній томографії, використовуючи твердження робіт [1, 2], для частини земної кори, навколо якої з усіх чотирьох сторін є штреки. На сторонах цього регіону ми можемо розмістити сейсмічні приймачі і створювати сейсмічні сигнали на інших сторонах. У результаті ми отримаємо час проходження сейсмічного сигналу через досліджуваний регіон, тобто проекційні дані – інтеграли вздовж ліній, що перетинають досліджуваний об’єкт. Відповідно до методу, описаного в [1], рішення задачі можна отримати як суму Фур’є. Особливістю і перевагою методу, описаного в [1, 2], є явні формули для наближеного розрахунку коефіцієнтів Фур’є функції двох змінних, часів приходу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи приймачів. Це дозволило скоротити вирішення задачі до задачі обчислення коефіцієнтів Фур’є, використовуючи формули, запропоновані в [1, 2], та вибору систем прямих, якими задаються проекційні дані.
Також у цій статті є обчислювальний експеримент для синтетичної функції, яка є розподілом повільності чотирикутної області. Наведені результати обчислювального експерименту показують, що вже при невеликому порядку сум Фур’є та обчислювальних даних результати, отримані за допомогою методу, описаного в роботах [1, 2], близькі до тестових значень функцій, що описує задане зображення рельєфу.
Розглянутий приклад підтверджує ефективність запропонованого методу. Його аналіз дозволяє зробити висновок про те, що запропонований метод може бути використаний при невеликій кількості джерел і приймачів, що є важливим з практичної точки зору. Проте необхідно дослідити можливість поліпшення методу за допомогою тверджень робіт [3], а також провести випробування на реальних даних.
Ключові слова: комп’ютерна томографія, шахтна сейсмічна томографія, сума Фур’є.