

6. Tolok, A. V., Myl'tsev, A. M. & Korohod, V. L. (2006). Analytical modeling based on graphic transformations in the RANOK system. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 124-133.
7. Korohod, V. L., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2003). Mathematical model for refining a three-dimensional data array using spatial interpolation. *Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky. Biologichni nauky*, No. 1, pp. 42-48.
8. Morozov, D. N., Gnezdovskiy, A. V., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2010). Cognitive computer graphics in the process of solving optimization problems of mathematical modeling. *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*, Issue 86, pp. 112-117.

УДК 539.312

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-11

ЗАСТОСУВАННЯ БІПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДВОХ КООКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

¹Пожуєв В. І., ²Пожуєв А. В., ³Фасоляк А. В.

^{1,3}*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

²*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна*

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

У роботі розглянуто динаміку двох коаксіальних циліндричних оболонок у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному середовищі. вивчається випадок, коли імпульсивне навантаження діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї оболонки, а інша оболонка вільна від напружень. Контакт між оболонками та середовищем припускається ковзним. Досліджується взаємний вплив оболонок на динамічний напружено-деформований стан даної механічної системи.

У цій статті припускається, що навантаження рівномірно розподілене вздовж осьової координати, тобто не залежить від неї, тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також робиться припущення, що навантаження діє симетрично відносно лінії, яка сполучає центри порожнин, що підкріплені оболонками. Тому вздовж цієї лінії можна зробити розріз, який потім буде враховано за допомогою граничних умов. Для розв'язання задачі використовується біполярна система координат (БСК), застосування якої дало можливість відобразити півпростір з порожниною, який моделює задачу, у прямокутник скінчених розмірів. Оскільки БСК є ортогональною системою координат, тому в ній справедливі рівняння руху, співвідношення Коші, закон Гука. Тому для отримання виразів для напружень через переміщення у БСК співвідношення Коші було підставлено у закон Гука. Після підстановки отриманих виразів у рівняння руху було отримано динамічні рівняння теорії пружності в БСК у переміщеннях, які використано для опису руху середовища. Для опису руху оболонки використані класичні рівняння теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява, які отримано в БСК.

Оскільки динамічні рівняння теорії пружності містять досить складні змінні коефіцієнти, тому в роботі запропоновано чисельний підхід до розв'язання задачі. Цей підхід ґрунтується на методи скінчених різниць за просторовими змінними. Розв'язок динамічної задачі отримано за допомогою ітераційного θ -метода Вілсона, який дозволяє звести початкову задачу до послідовності квазістатичних задач.

На основі отриманих результатів встановлено, що для випадку, коли відстань між оболонками понад їх п'ять радіусів, величина їх взаємного впливу на динамічний напружено-деформований стан розглянутої системи є незначним.

Отримані результати та розроблені методи можуть бути застосовані при розрахунках підземних споруд, зокрема тунелів метрополітену та підземних трубопроводів.

Ключові слова: коаксіальні циліндричні оболонки, біполярна система координат, пружне середовище, динамічне навантаження.

APPLICATION OF THE BIPOLAR COORDINATE SYSTEM TO MODELING OF TWO COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS DYNAMICS IN ELASTIC MEDIUM

¹Pozhuev V. I., ²Pozhuev A. V., ¹Fasoliak A. V.

¹Zaporizhzhya national technical university,
Zhykovskago str, 64, Zaporizhzhia, 69063, Ukraine

²Zaporizhzhya state engineering academy,
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhia, 69000, Ukraine

²scorpio1@mail.ru, ¹antonfasolyak@mail.ru

The present paper considers the dynamics of two coaxial cylindrical shells in a linearly elastic homogeneous inertial medium. In this work studies case, when normal impulsive loads act on inner surface of one of the shell and other shell is stresses free. The contact between the shells and the medium was supposed to be gliding. The mutual influence of the shells on the dynamic stress-strain state of the media is under research and it's scientific novelty of this work.

In present paper, it is assumed that loads are evenly distributed on the axial coordinate, i.e. they don't depend on axial coordinate, so the problem, which is considered, is reduced to plane elasticity theory problem. It's also accepted, that loads are applied symmetrically to line, which passes the centers of the cavities, so we can cut the area along this line. This incision will be taken into account in boundary conditions. Then the bipolar coordinate system (BCS) is used to solve this problem. The used BCS gives the opportunity to display a half-space with two cavities, which models the medium in the finite rectangle.

As the BCS is an orthogonally coordinate system, the motion equation of elasticity theory, Cauchy's equations and Hooke's law are in force. So, we substitute deformations expressions by displacements (Cauchy's equations) for the deformations in Hooke's law and obtain the expressions for stresses by displacements in the BCS. Then we substitute the expressions for stresses by displacements (in the BCS) in the motion equation of elastic theory, and we obtain motion equations of elastic theory by displacements in the BCS. These equations are used to modeling media motions. The shell motions are described by classic thin shells theory equations, which satisfy Kirchhoff-Love theory.

As motion equations of elastic theory by displacements in the BCS have sufficiently difficult coefficients, which depend on space variables, so we use finite differences method on space variables for solution of the problem to be obtained. Dynamic problem can be reduced to iterative sequences of quasi-static problems using Wilson's θ -method. So, the approach of solving dynamic problem in BCS, based on finite differences method and Wilson's θ -method has been developed

It was established that in cases, when the distance between the shells is more than five times its radii, the influence of the mutual influence of the shells on the stress-strain state of considered mechanical system, is insignificant.

The obtained results, and the methods, developed in present work, can be applied in calculations of underground structures, in particular, subway tunnels and pipelines.

Key words: coaxial cylindrical shells, bipolar coordinate system, elastic medium, dynamic loads.

ВСТУП

На сьогодні досить важливе значення для практики має розрахунок динамічного напружено-деформованого стану для механічних систем, що складаються з пружного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, підкріплені тонкими пружними оболонками. Зокрема, до такої розрахункової схеми приводять задачі моделювання тунелів метрополітену та трубопроводів.

Досить добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному середовищі (при відстані між оболонками понад 5 її діаметрів). Таким задачам присвячені роботи [1-3], причому в монографії [1] розглянуто випадок рухомих навантажень, а в роботах [2, 3] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці.

У випадках, коли відстань між оболонками є невеликою, потрібно враховувати взаємний вплив двох коаксіальних оболонок на динамічний напружено-деформований стан розглянутої механічної системи. Така динамічна задача розглянута в роботі [4] із застосуванням методу скінченних елементів.

Ця робота присвячена динамічним задачам для двох коаксіальних оболонок у пружному інерційному середовищі. Розглядаються випадки, коли відстань між оболонками не перевищує трьох їх радіусів. Для розв'язання задачі застосовується біполярна система координат. Розглядаються випадки, коли навантаження діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, а інша оболонка вільна від напружень. Також досліджується питання впливу відстані між оболонками на динамічний напружено-деформований стан системи оболонка-середовище.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нестационарна деформація лінійно-пружного, однорідного та ізотропного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені оболонками. Припускаємо, що нормальні навантаження, що діють на внутрішню поверхню однієї з оболонок, залежать від часу як одинична функція Хевісайда. Інша оболонка вільна від напружень. Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня однієї з оболонок задається рівнянням $x^2 + (y+l)^2 = b^2$, а іншої – $x^2 + (y-l)^2 = b^2$. Поверхні контакту між півсередовищем та оболонками – $x^2 + (y+l)^2 = r^2$ та $x^2 + (y-l)^2 = r^2$ відповідно ($h = r - b$ – товщина оболонок). Осі оболонок та вісь z паралельні. Контакт між оболонками та середовищем вважаємо ковзним. У момент часу $t < 0$ оболонки та середовище знаходяться у стані спокою та вільні від напружень. Потім у момент часу $t = 0$ прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок.

Варто зазначити, що в цій роботі приймається, що навантаження рівномірно розподілене за осью координатою, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також будемо припускати, що навантаження прикладені симетрично відносно осі y .

Для розв'язання задачі одразу перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{r} \{x, y\}; \quad \{U_x, U_y\} = \frac{1}{r} \{u_x, u_y\}; \quad \{V, W\} = \frac{1}{r} \{v, w\}; \\ \{\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \kappa = \frac{h}{r}; \\ R = \frac{r}{r} &= 1; \quad L = \frac{l}{r}; \quad \tau = \frac{c_s}{r} t; \quad c_s = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \end{aligned}$$

де ρ_2, G_2 – густина та модуль зсуву середовища, ρ_1, G_1 – густина та модуль зсуву оболонок.

Надалі всі рівняння одразу випишуватимемо у безрозмірному вигляді.

Введемо біполярну систему координат, яка задається співвідношеннями [5]:

$$x_* = \frac{a_0 \sin \beta}{ch\alpha + \cos \beta}, \quad y_* = -\frac{a_0 sh\alpha}{ch\alpha + \cos \beta}, \quad a_0 = \sqrt{L^2 - R^2}. \quad (1)$$

Оскільки припускається, що задані навантаження діють симетрично відносно y_* , тому можна зробити розріз по осі $O y_*$, який буде враховано за допомогою граничних умов. Введена біполярна система координат дозволяє перевести нескінченну область AD_1C_1BCD у скінченну область $-\bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0; 0 \leq \beta \leq \beta_0$; $(A'D_1'C_1'B'C'D')$, де $\bar{\alpha}_0 = \ln\left(\frac{R+L+a_0}{R+L-a_0}\right)$,

$\beta_0 = \pi$ (рис. 1).

Біполярна система координат, задана співвідношеннями (1) має наступні геометричні характеристики:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{a_0}{ch\alpha + \cos\beta}, \quad g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = h_\alpha^2,$$

де h_α, h_β – коефіцієнти Ламе, $g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}$ – компоненти метричного тензора.

Оскільки біполярна система координат є ортогональною [5], тому в ній справедливі рівняння руху, які в довільній ортогональній системі координат (при відсутності масових сил) мають вигляд [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\sigma_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{g\sigma_{kk}}{h_{x_k}^2} \frac{\partial h_{x_k}^2}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g\sigma_{ik} h_{x_i}}{h_{x_k}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3, \quad (2)$$

де h_{x_i} ($i=1,2,3$) – коефіцієнти Ламе, $g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = h_{x_1} h_{x_2} h_{x_3}$.

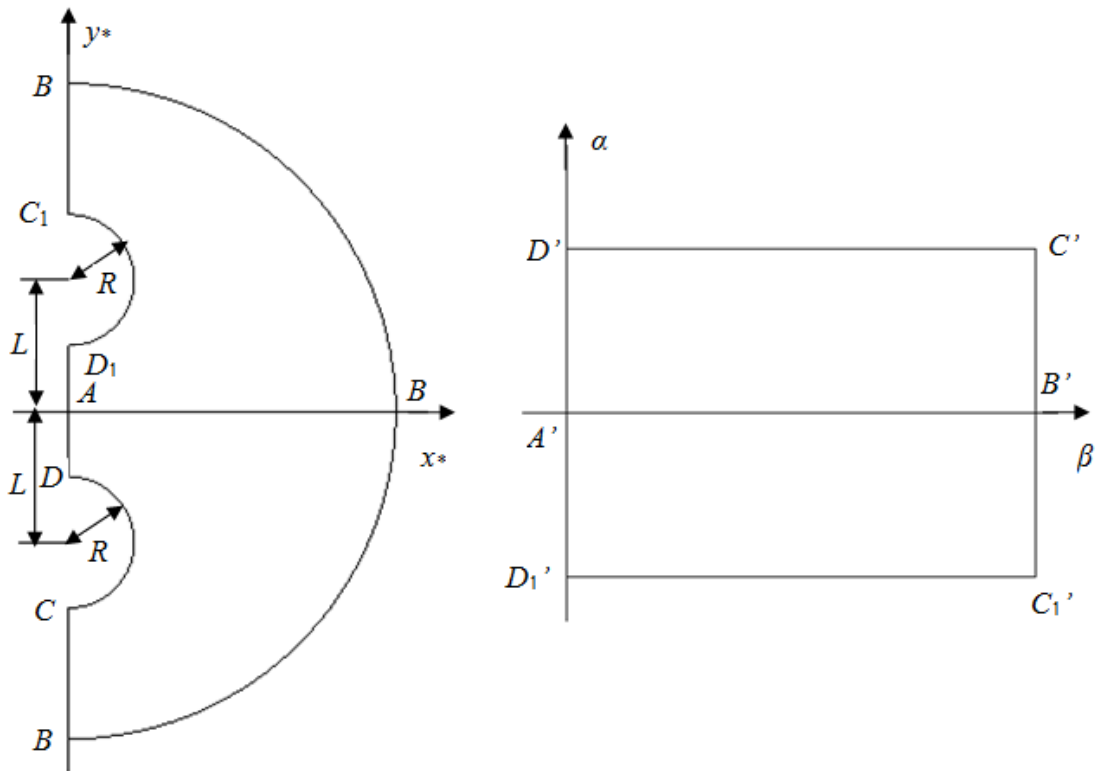


Рис. 1. Перетворення області

Оскільки для біполярної системи координат $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = z$, $h_{x_1} = h_\alpha$, $h_{x_2} = h_\beta$, $h_{x_3} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, $g_{33} = 1$, $g = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, тоді рівняння (2) матимуть вигляд (у безрозмірних величинах):

$$\begin{cases} \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2} \end{cases} \quad (3)$$

або після спрощення:

$$\begin{cases} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} (2\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \bar{\sigma}_{\beta\beta}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} (2\bar{\sigma}_{\beta\beta} - \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Також у довільній ортогональній системі координат справедливі співвідношення Коші, які мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial x_k} \frac{u_k}{h_k}, \quad i=1,2,3, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2h_i h_j} \left(h_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right), \quad i, j=1,2,3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

У біполярній системі координат вирази (5) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Тепер отримаємо вирази для напружень через переміщення у біполярній системі координат. Для цього використаємо закон Гука [5]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\beta\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

де $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$, $\mu = G$ – параметри Ламе, ν – коефіцієнт Пуасона, $\vartheta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}$. Тепер підставляємо вирази (6) у співвідношення (7), будемо мати для безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Після спрощення вирази (8) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тепер отримаємо рівняння руху середовища у переміщеннях у біполярній системі координат. Для цього у виразах (9) замість v підставимо v_2 , а потім отриманий результат підставимо у (4). Після спрощення отримаємо рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} & h_\alpha \left(\frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \\ & + \left(\frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 \right) U_\alpha + \left(\frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ & h_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \\ & + \left(\frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\alpha + \left(\frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Рух оболонки будемо описувати наближеними рівняннями теорії оболонок, що задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява та в ортогональній системі координат мають вигляд [7]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{12} g_1)}{\partial x_2} + N_{23} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_1}{R_1} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_1 - f_1); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_{12} g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_2 g_1)}{\partial x_2} + N_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_{12} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_2}{R_2} = \rho_1 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_2 - f_2); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(Q_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Q_2 g_1)}{\partial x_2} + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_3 - f_3); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_2 g_1)}{\partial x_2} + M_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + Q_2 = 0; \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{12} g_1)}{\partial x_2} - M_{12} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - M_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - Q_1 = 0, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

де u, v, w – компоненти переміщень середньої поверхні оболонки у напрямках осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 відповідно; (f_1, f_2, f_3) – відповідні компоненти навантаження; (q_1, q_2, q_3) – відповідні реакції з боку середовища; R_1, R_2 – радіуси кривизни ліній $x_1 = const, x_2 = const$ відповідно; ρ_1, h, G_1, ν_1 – густина, товщина, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона оболонки; g_1, g_2 – відповідні компоненти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки. Інші величини системи (11), враховуючи технічну моментну теорію оболонок, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1}; \quad \eta_2 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{u}{g_1 g_2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{w}{R_2}; \\ \xi &= \frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{g_2} \right) + \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u}{g_1} \right); \quad N_1 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_1 + \nu_1 \eta_2); \\ N_2 &= \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_2 + \nu_1 \eta_1); \quad N_{12} = hG_1 \xi; \quad M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Як видно на рисунку 1, при введенні біполярних координат виразами (1) середні поверхні оболонок будуть задаватись рівняннями $\alpha = \bar{\alpha}_0$ та $\alpha = -\bar{\alpha}_0$, тому у виразах (11), (12) потрібно прийняти, що $Ox_1 = Oz$, $Ox_2 = O\beta$, $Ox_3 = O\alpha$. Тоді $g_1 = 1$, $g_2 = h_\alpha$, $\frac{1}{R_1} = 0$, $\frac{1}{R_2} = 1$. Також, відповідно до припущення, що навантаження рівномірно діє вздовж осьової координати, потрібно зазначити, що $u = 0$, $q_1 = 0$, $f_1 = 0$ та похідні від усіх величин за змінною z дорівнюють нулю. Тоді вирази (12) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 = 0; \eta_2 = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r}; \xi = 0; N_1 = \frac{2hG_1\nu_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); \\ N_2 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); N_{12} = 0; M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

З урахуванням (13) перше рівняння системи (11) перетвориться у тотожність $0 = 0$, а четверте та п'яте у вирази:

$$Q_1 = 0; Q_2 = 0. \tag{14}$$

Враховуючи (13) та (14), система (11) у біполярній системі координат (у безрозмірних величинах) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V^k}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial W^k}{\partial \beta} = \frac{\rho}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\beta^k + q_\beta^k); \\ \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial V^k}{\partial \beta} + \frac{W^k}{h_\alpha} = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{d^2 W^k}{d\tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\alpha^k + q_\alpha^k), \end{cases} \tag{15}$$

де V^k, W^k – безрозмірні переміщення оболонки у напрямку осей $O\beta$ та $O\alpha$, причому $k = 1$ відповідає навантаженій оболонці, а $k = 2$ – оболонці, яка вільна від напруг; ν_1 – коефіцієнт Пуассона оболонок. Зауважимо, що в системі (15) величини h_α та $g_{\alpha\alpha}$ беруться при $\alpha = \bar{\alpha}_0$ або $\alpha = -\bar{\alpha}_0$ (залежно від оболонки).

У випадку, коли контакт між оболонками та середовищем ковзний, граничні умови для навантаженої оболонки матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} U_\alpha(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = W^1(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha^1(\beta, \tau); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = \bar{q}_\beta^1(\beta, \tau) = f_\beta^1(\beta, \tau) = 0, f_\alpha^1(\beta, \tau) = F(\beta)H(\tau), \end{aligned} \tag{16}$$

а для оболонки, яка вільна від напружень:

$$\begin{aligned} U_\alpha(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = W^2(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha^2(\beta, \tau); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = \bar{q}_\beta^2(\beta, \tau) = f_\beta^2(\beta, \tau) = f_\alpha^2(\beta, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Розріз, який було зроблено по осі y_* , враховується такими умовами:

$$U_\beta(\alpha, 0, \tau) = U_\beta(\alpha, \beta_0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, 0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta_0, \tau) = 0.$$

Також припускаємо, що всі невідомі величини на нескінченності обертаються в нуль, тому в точці $(0, \pi)$ всі величини дорівнюють нулю. Початкові умови приймаємо нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

Оскільки рівняння (9, 10, 15) мають достатньо складні коефіцієнти, які залежать від просторових змінних, тому для розв'язання задачі за просторовими змінними застосуємо метод скінченних різниць. Для цього розіб'ємо область $-\bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0$, $0 \leq \beta \leq \beta_0$ (рис. 1) на сітку таким чином, що за змінною α на N_α частин, а за змінною β на N_β частин

відповідно. Нехай $h_1 = \frac{\bar{\alpha}_0}{N_\alpha}$ – довжина відрізка розбиття за змінною α , а $h_2 = \frac{\pi}{N_\beta}$ – за змінною

β . Отже, ми отримали сітку з точок (α_i, β_j) , де $\alpha_i = \frac{ih_1}{N_\alpha} (i = \overline{0, N_\alpha})$, $\beta_j = \frac{jh_2}{N_\beta} (j = \overline{0, N_\beta})$. Далі

апроксимуємо похідні скінченними різницями другого порядку точності.

Далі у внутрішніх точках області $(\alpha_i, \beta_j), i = \overline{1, N_\alpha - 1}, j = \overline{1, N_\beta - 1}$ записуємо різницеві рівняння для системи (10). Відповідно до граничних умов:

$$U_{\beta i, 0} = U_{\beta i, N_\beta} = 0 (i = \overline{0, N_\alpha}); U_{\alpha 0, N_\beta/2} = 0; V_0^k = V_{N_\beta}^k = 0, k = 1, 2.$$

На границях $\beta = 0, \beta = \pi$ записуємо різницеві рівняння для (9) для величин, які входять до відповідних граничних умов.

На границі $\alpha = \bar{\alpha}_0$ та $\alpha = -\bar{\alpha}_0$ записуємо різницеві рівняння для системи (15) з урахуванням відповідних граничних умов.

У результаті отримаємо систему з $2N_\beta(N_\alpha + 2) - 3$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних $U_{\beta i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{1, N_\beta - 1}), U_{\alpha i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{0, N_\beta}), V_j^k (j = \overline{1, N_\beta - 1}, k = 1, 2)$.

Після розв'язання описаної вище СЛАР отримаємо розв'язок задачі в біполярній системі координат. Тепер опишемо процес отримання відповідних величин у декартовій системі координат.

Поле переміщень (як і будь-яке векторне поле) в декартовій системі координат $\{U_x, U_y\}$ виражається через відповідні компоненти поля переміщень в ортогональній системі координат $\{U_{x_1}, U_{x_2}\}$ за наступними співвідношеннями [8]:

$$U_x = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} U_{x_i}; \quad U_y = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} U_{x_i}, \quad (17)$$

де $x = \psi_1(\alpha, \beta)$, $y = \psi_2(\alpha, \beta)$ – формули зв'язку між декартовою та довільною ортогональною системами координат. Для випадку біполярної системи координати, які задаються співвідношеннями (1), формула (17) матиме вигляд:

$$U_x = \frac{-U_\alpha \operatorname{sh} \alpha \sin \beta + U_\beta (1 + ch \alpha \cos \beta)}{ch \alpha + \cos \beta}; \quad U_y = \frac{-U_\alpha (1 + ch \alpha \cos \beta) - U_\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{ch \alpha + \cos \beta}. \quad (18)$$

Відповідні компоненти тензора напружень знаходяться по отриманим у формулах (18) переміщеннях за виразами, аналогічними виразам (9).

РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ

Після застосування скінченно-різницевої схеми за біполярними координатами до рівнянь (9), (10), (15) за методом, описаним вище, отримаємо динамічне матричне рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$[A]\{U\} + [B]\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \{U\} = \{F\}H(\tau), \tag{19}$$

де $\{U\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень, $[A], [B]$ – матриці коефіцієнтів скінченно-різноцевої схеми та коефіцієнтів при других похідних за змінною безрозмірного часу відповідно, $\{F\}$ – вектор вузлових навантажень, $H(\tau)$ – одинична сходящкова функція Хевісайду. Отримане динамічне матричне рівняння (19) розв’язується за допомогою θ -метода Вілсона, алгоритм якого наведено в роботі [9]. Цей метод дозволяє звести динамічне рівняння (19) до ітераційної послідовності квазістатичних задач, які зі свого боку є звичайними системами лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що розв’язуються методом Гауса.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Наведемо результати чисельного аналізу вищеописаного алгоритму. При розрахунках використовувались наступні значення безрозмірних величин:

$$\gamma = 30; \rho = 4; \kappa = 0,02.$$

Величини L, τ змінювались.

Розглянемо випадок, коли імпульсивне нормальне навантаження діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок ($k = 1$), а поверхня іншої ($k = 2$) вільна від напруг. Функція $F(\beta)$, яка входить у граничні умови (16), задається у вигляді:

$$F(\beta) = -\frac{1}{g_{\alpha\alpha}(\alpha_0, \beta)}.$$

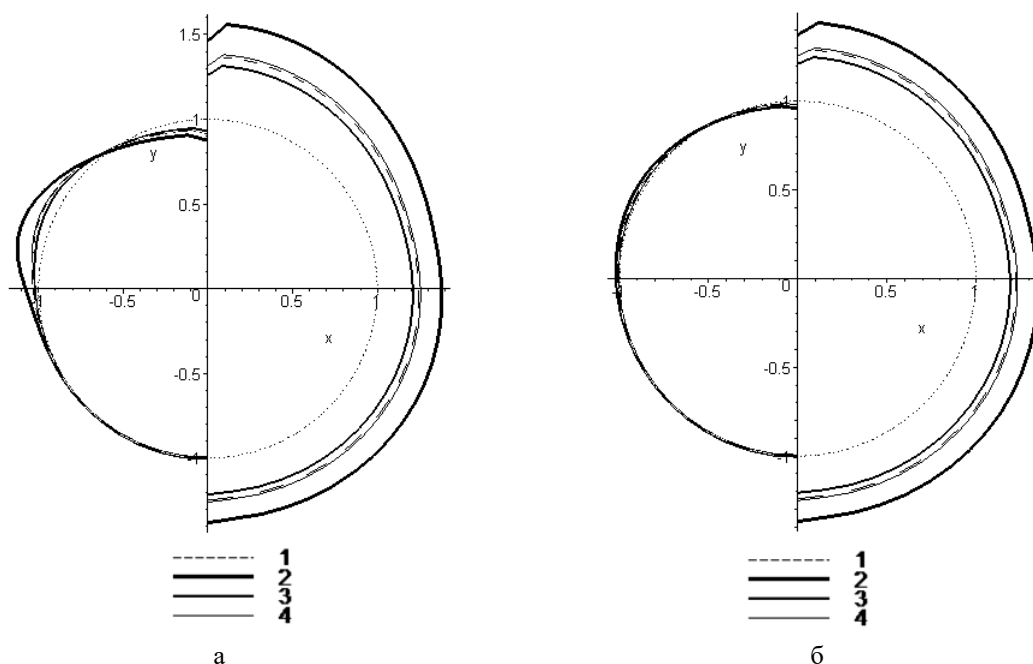


Рис. 2. Переміщення границі контакту оболонки та середовища

Далі на всіх графіках крива 1 відповідає статичному розв’язку, крива 2 моменту безрозмірної змінної часу $\tau = 2$, крива 3 – $\tau = 4$, крива 4 – $\tau = 6$.

На рисунку 2 (а, б) зображено переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу у порівнянні із статичним розв’язком, причому на рисунку 2а – $L = 1$, на рисунку 2б – $L = 1,5$. Точковим пунктиром позначено положення границі контакту до застосування навантаження. Причому на обох рисунках зліва показані переміщення для оболонки, яка вільна від напружень, а справа – навантажена оболонка.

На рисунку 3 наведено переміщення середовища по осі Oy_* між оболонками, причому на рис. 3а $L = 1$, а на рис. 3б $L = 1,5$.

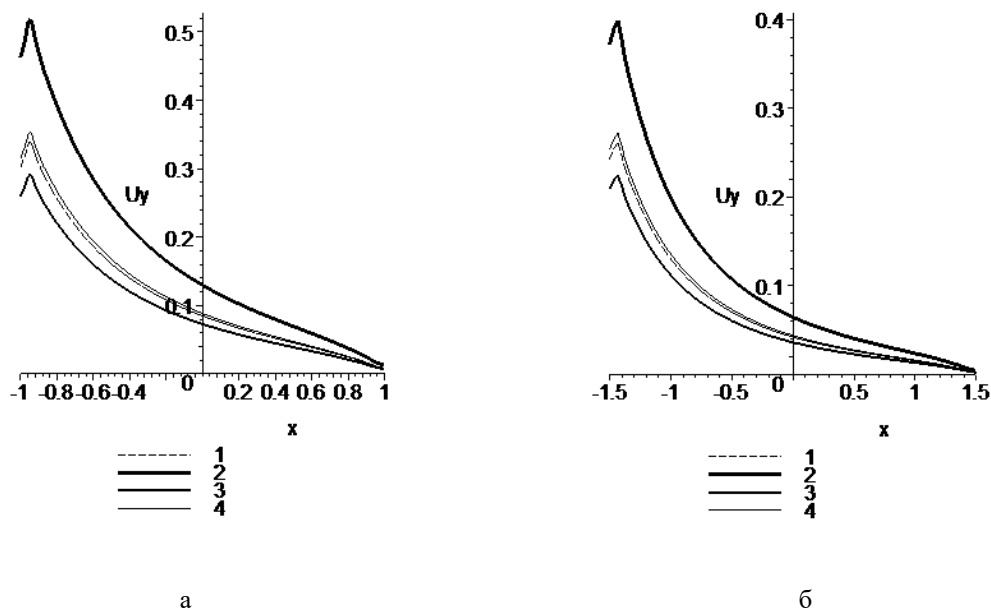


Рис. 3. Переміщення поверхні середовища по осі Oy_* між оболонками

На рисунках 4, 5 наведені напруження на границі контакту навантаженої оболонки та середовища у різні моменти часу. Причому на рис. 4 $L = 1$, а на рис. 5 $L = 1,5$.

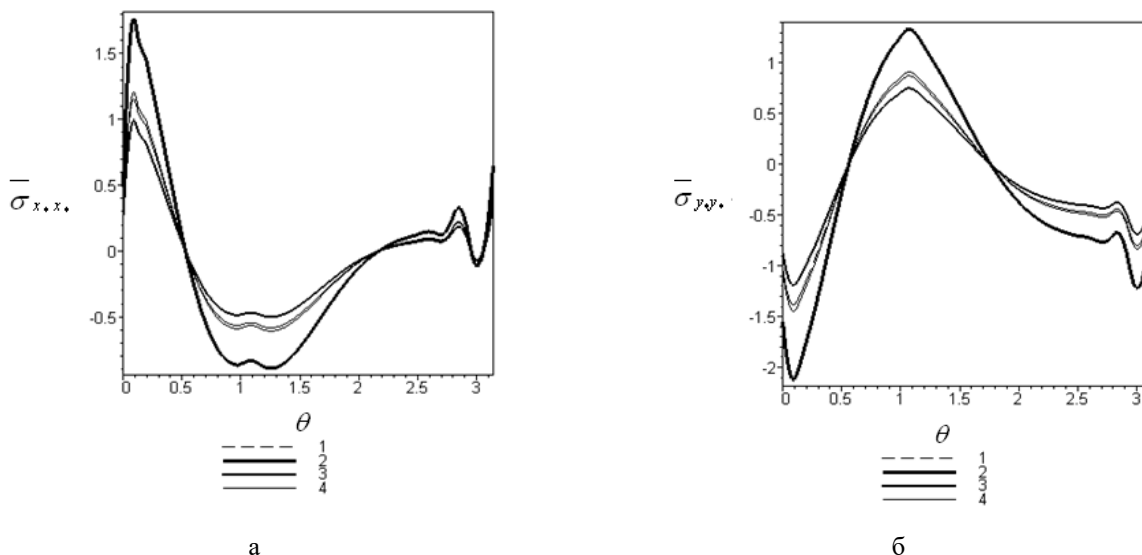


Рис. 4. Напруження на границі контакту між навантаженою оболонкою та середовищем при $L = 1$

На основі порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами у роботі [4] можна зробити висновок, що максимальна величина відхилення не перевищує 15%.

На основі отриманих результатів можна встановити, що для оболонок, які розташовані на відстані понад 5 їх радіусів можна, без суттєвої втрати точності, розглядати задачу для середовища з однією порожниною, що підкріплена оболонкою.

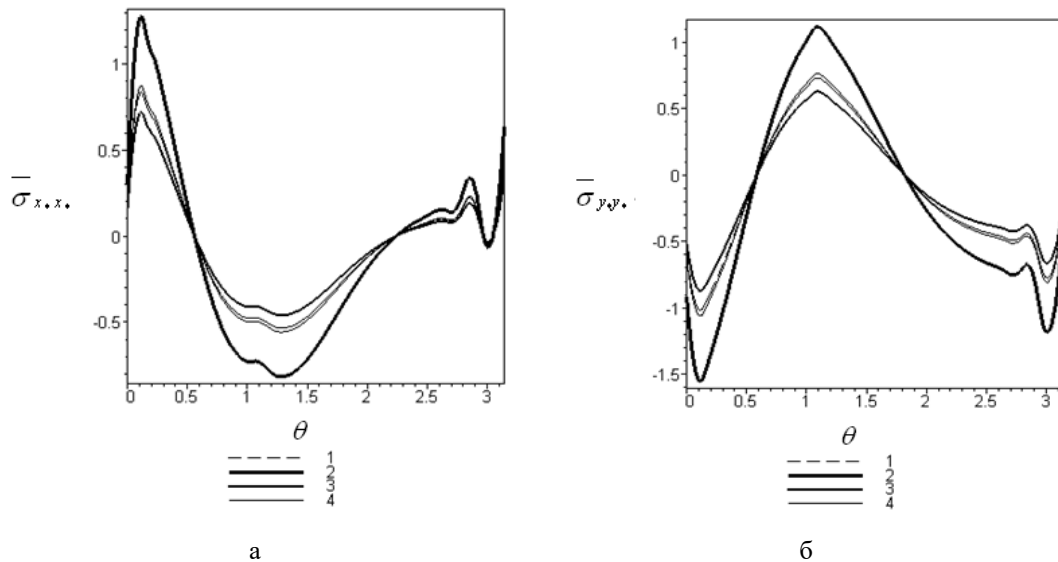


Рис. 5. Напруження на границі контакту між навантаженою оболонкою та середовищем при $L = 1,5$

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано динамічну задачу для лінійно-пружного однорідного та ізотропного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими оболонками. Розглянуто випадок, коли на внутрішній поверхні однієї оболонки діє динамічне імпульсивне нормальне навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

Задача розв'язана за допомогою використання біполярної системи координат. Розроблено підхід до розв'язання динамічної задачі, який ґрунтується на методі скінченних різниць та θ -методі Вілсона.

Показано збіжність динамічних результатів до відповідного статичного розв'язку. Встановлено, що при відстані між порожнини понад 5 її радіусів, взаємний вплив порожнин на компоненти напружено-деформованого стану розглянутої системи є незначним.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути застосовані при розрахунку підземних конструкцій, зокрема тунелів метрополітену.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. Москва: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 2. С. 108–114.
3. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 200–213.
4. Пожуев В. І., Фасоляк А. В. Динаміка коаксіальних циліндричних оболонок у пружному інерційному середовищі. *Техническая механика*. 2017. № 3. С. 90–99.
5. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 232 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 736 с.
8. Ерофеенко В. Т. Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989. 256 с.

9. Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 1. С. 119–126.

REFERENCES

1. Gorshkov, A. G. & Pozhuev, V. I. (1992). Planes and shells on inertial foundations under action of moving loads. Moscow: Izd-vo MAI.
2. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2015). Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 2, pp. 108-115.
3. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads. *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: zbirnyk naukovykh statey, Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 200-213.
4. Pozhuev, V. I. & Fasoliak, A. V. (2017). Dynamics of cylindrical shells in elastic inertial medium. *Tehnicheskaya mehanika*, No. 3, pp. 90-99.
5. Ufliand, J. S. (1950). Bipolar coordinates in elastic theory. State publishing house *tehniko-teoreticheskoy literatury*. Leningrad: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
6. Novatskiy, V. (1975). Elastic theory. Moscow: Mir.
7. Filippov, A. P. (1970). Vibrations of deformable systems. Moscow: Mashynostroenie.
8. Erofeenko, V. T. (1989). Additions theorems., Minsk: Nauka i tehnika.
9. Pozhuev, V. I., Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Nonstationary deformation of the cylindrical shell in elastic half-space with free surface. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 1, pp. 119-126.

УДК 517.988 : 519.633

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12

МЕТОД РОТЕ У КОМБІНАЦІЇ З МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

*Харківський національний університет радіоелектроніки,
просп. Науки, 14, Харків, 61000*

maxim.sidorov@nure.ua

У роботі розглядається перша початково-крайова задача для напівлінійного рівняння теплопровідності. Задачі такого типу (з пошуком додатного розв'язку) часто виникають при математичному моделюванні процесів у хімічній кінетиці, теорії горіння, біології тощо. На основі модифікованого методу Роте вихідна нестационарна задача замінюється на кожному часовому шарі нелінійною крайовою задачею для рівняння з еліптичним оператором. Далі для знаходження додатного розв'язку цієї нелінійної крайової задачі будується метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Для побудови такого методу дослідження крайової задачі використовуються методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. За допомогою методу функцій Гріна від нелінійної крайової задачі для еліптичного рівняння здійснюється перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке розглядається як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Досліджуються властивості нелінійного інтегрального оператора, що входить у рівняння. Далі будуються сильно інваріантний конусний відрізок та дві ітераційні послідовності, які стартують з відповідних