

9. Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 1. С. 119–126.

REFERENCES

1. Gorshkov, A. G. & Pozhuev, V. I. (1992). Planes and shells on inertial foundations under action of moving loads. Moscow: Izd-vo MAI.
2. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2015). Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 2, pp. 108-115.
3. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads. *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: zbirnyk naukovykh statey, Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 200-213.
4. Pozhuev, V. I. & Fasoliak, A. V. (2017). Dynamics of cylindrical shells in elastic inertial medium. *Tehnicheskaya mehanika*, No. 3, pp. 90-99.
5. Ufliand, J. S. (1950). Bipolar coordinates in elastic theory. State publishing house *tehniko-teoreticheskoy literatury*. Leningrad: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
6. Novatskiy, V. (1975). Elastic theory. Moscow: Mir.
7. Filippov, A. P. (1970). Vibrations of deformable systems. Moscow: Mashynostroenie.
8. Erofeenko, V. T. (1989). Additions theorems., Minsk: Nauka i tehnika.
9. Pozhuev, V. I., Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Nonstationary deformation of the cylindrical shell in elastic half-space with free surface. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 1, pp. 119-126.

УДК 517.988 : 519.633

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12

МЕТОД РОТЕ У КОМБІНАЦІЇ З МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

*Харківський національний університет радіоелектроніки,
просп. Науки, 14, Харків, 61000*

maxim.sidorov@nure.ua

У роботі розглядається перша початково-крайова задача для напівлінійного рівняння теплопровідності. Задачі такого типу (з пошуком додатного розв'язку) часто виникають при математичному моделюванні процесів у хімічній кінетиці, теорії горіння, біології тощо. На основі модифікованого методу Роте вихідна нестационарна задача замінюється на кожному часовому шарі нелінійною крайовою задачею для рівняння з еліптичним оператором. Далі для знаходження додатного розв'язку цієї нелінійної крайової задачі будується метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Для побудови такого методу дослідження крайової задачі використовуються методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. За допомогою методу функцій Гріна від нелінійної крайової задачі для еліптичного рівняння здійснюється перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке розглядається як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Досліджуються властивості нелінійного інтегрального оператора, що входить у рівняння. Далі будуються сильно інваріантний конусний відрізок та дві ітераційні послідовності, які стартують з відповідних

кінців сильно інваріантного конусного відрізка. Перша з цих послідовностей є монотонно зростаючою і наближає шуканий розв'язок знизу, а друга є монотонно спадною і наближає шуканий розв'язок зверху. Наведено умови існування спільної границі цих послідовностей, тобто умови єдиності розв'язку нелінійних крайових задач методу Роте на кожному часовому шарі. Отримано апріорну й апостеріорну оцінки похибки наближеного розв'язку задачі. Обчислювальний експеримент проведено для задачі з гетеротонною степеневою нелінійністю. Отримано наближений розв'язок нестационарної задачі у момент часу 0,1 двома способами: з кроком 0,1 та з кроком 0,05, що дало можливість підвищити порядок апроксимації методу на одиницю і уточнити наближений розв'язок за правилом Рунге. Результати обчислювального експерименту подано у вигляді рисунків та таблиць з числовими даними.

Ключові слова: напівлінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, двобічні наближення, функція Гріна.

ROTHER METHOD IN COMBINATION WITH TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD FOR SOLVING THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SEMI-LINEAR HEAT EQUATION

Sidorov M. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

*Kharkov National University of Radio Electronics,
Nauky Ave. 14, Kharkiv, 61000*

maxim.sidorov@nure.ua

In this paper, we consider the first initial-boundary problem for the semi-linear heat equation. Problems of this type (with the search for a positive solution) often arise in the mathematical modeling of processes in chemical kinetics, combustion theory, biology, and others. Based on the modified Rothe method, the original non-stationary problem is replaced at each time layer by a nonlinear boundary-value problem for an equation with an elliptic operator. Next, for finding a positive solution of this nonlinear boundary value problem, a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed. To construct such a method and study the boundary value problem, methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces are used. Using the Green's functions method of nonlinear boundary value problems for an elliptic equation, a transition to an equivalent Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semi-ordered by a cone of non-negative functions. The properties of a nonlinear integral operator included in the equation are studied. Next, a strongly invariant cone segment and two iterative sequences are constructed which start from the corresponding ends of a strongly invariant cone segment. The first of these sequences is monotonically increasing and approximates the desired solution from below, and the second is monotonically decreasing and brings the desired solution from above. Conditions for the existence of a common limit of these sequences are given, that is, the conditions for uniqueness of the solution of nonlinear boundary value problems of the Rothe method on each time layer. A priori and a posteriori estimation of the error of the approximate solution of the problem was obtained. A computational experiment was carried out for a heterotone power nonlinearity problem. An approximate solution of a non-stationary problem at time moment 0.1 was obtained in two ways: with a step of 0.1 and a step of 0.05, which made it possible to increase the order of approximation of the method per unit and to clarify the approximate solution according to the Runge rule. The results of the computational experiment are presented in the form of figures and tables with numerical data.

Key words: semilinear heat equation, positive solution, strongly invariant cone segment, heterotone operator, two-sided approximations, Green's function.

ВСТУП

Задачі математичного моделювання у теплофізиці, хімії, біології тощо призводять до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для квазілінійного рівняння вигляду $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad} u) + f(\mathbf{x}, t, u)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ [2, 8, 10, 13]. Дослідженню задач для цього рівняння присвячено багато праць, зокрема роботи [1-3, 8, 10, 13]. Серед методів його чисельного аналізу можна виділити скінченно-різницеві методи (метод сіток) та напівдискретні методи (метод прямих, або метод Роте) [11, 14]. Ця робота продовжує дослідження, розпочаті у [4, 12], і розповсюджує їх на нестационарні задачі на прикладі квазілінійного рівняння теплопровідності.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою роботи є розробка напівдискретних методів у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

де Ω – обмежена вимірна за Жорданом область з \mathbf{R}^2 чи \mathbf{R}^3 з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Позначимо $\bar{Q}_{T_0} = \{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, t \in [0, T_0]\}$. Вважатимемо, що

$$f(\mathbf{x}, t, u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad u > 0, \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) \text{ неперервна і додатна, якщо } \mathbf{x} \in \Omega, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

2. ПОБУДОВА НАПІВДИСКРЕТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ЗАДАЧІ (1)-(4) МЕТОДОМ РОТЕ

На відрізку $[0, T_0]$ введемо сітку з кроком τ , яка складається з точок $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $m\tau = T_0$, і позначимо

$$U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) в рівнянні (1) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$.

Тоді з похибкою $O(\tau)$ рівняння (1) на прямій $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ замінюється нелінійним еліптичним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - a^2 \Delta U_j = f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (7)$$

Рівняння (7) є певною модифікацією класичного методу Роте [14], бо на j -му часовому шарі використовує поточне значення U_j при апроксимації нелінійності $f(\mathbf{x}, t, u)$, а не попереднє значення U_{j-1} .

Відповідно до початкової умови (4) на нульовому часовому шарі $t_0 = 0$ матимемо

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Використовуючи крайову умову (3), отримаємо крайову умову на функцію $U_j(\mathbf{x})$:

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отже, розв'язання початково-крайової задачі (1)-(4) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних еліптичних крайових задач

$$-\Delta U_j + \frac{1}{a^2 \tau} U_j = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1} + \frac{1}{a^2} f(\mathbf{x}, t_j, U_j), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad (11)$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Зауважимо, що умова (6) означає, що $U_0(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega$.

Збіжність методу Роте при $\tau \rightarrow 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (1) [6, 14].

Крайові задачі (9)-(11) розв'язуються послідовно, а отже, при розв'язанні задачі для $U_j(\mathbf{x})$ функція $U_{j-1}(\mathbf{x})$ буде вже відомою. Тому праву частину рівняння (9) позначимо через $F(\mathbf{x}, U_j)$:

$$F_j(\mathbf{x}, U_j) = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1} + \frac{1}{a^2} f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (12)$$

Застосуємо для розв'язання кожної з задач (9)-(11) метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [4, 12].

3. РОЗВ'ЯЗАННЯ АПРОКСИМУЮЧИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Розглянемо задачу (9)-(11) для деякого фіксованого j . Якщо $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{a^2 \tau}$ в області Ω , то задача (9)-(11) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (13)$$

Рівняння (13) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|U\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |U(\mathbf{x})|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $K_+ = \{U \in C(\bar{\Omega}) : U(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ невід'ємних функцій. Конус K_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим) [5, 9]. За допомогою конуса K_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } U, V \in C(\bar{\Omega}) \quad U \leq V, \text{ якщо } V - U \in K_+,$$

тобто

$$U \leq V, \text{ якщо } U(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Шукатимемо узагальнений розв'язок $U_j(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (13).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T_j , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T_j(U)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (14)$$

Нехай функція $f(\mathbf{x}, t, u)$, що задовольняє умовам (5), дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , t , v , w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$. Тоді функція $F_j(\mathbf{x}, U_j)$ вигляду (12) теж дозволить діагональне подання, тобто $F_j(\mathbf{x}, U_j) = \hat{F}_j(\mathbf{x}, U_j, U_j)$, де функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ задаватиметься рівністю

$$\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w). \quad (15)$$

Завдяки неперервності і невід'ємності у Ω функції $U_{j-1}(\mathbf{x})$ функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ буде неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , v , w невід'ємною функцією, що монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$.

Отже, оператор T_j вигляду (14) буде гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (16)$$

Оператори T_j і \hat{T}_j є цілком неперервними.

Оператор T_j вигляду (14) матиме такі властивості:

а) є додатним оператором, тобто залишає інваріантним конус K_+ : якщо $U \in K_+$, то і $T(U) \in K_+$;

б) є u_0 -додатним оператором з функцією $u_0(\mathbf{x})$, яка задається формулою

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \quad (17)$$

тобто для будь-якого $U \in K_+$ існують такі числа $\alpha = \alpha(U) > 0$, $\beta = \beta(U) > 0$, що $\alpha u_0, T(U), \beta u_0$;

в) є гетеротонним оператором із супровідним оператором вигляду (16), якщо функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , t , v , w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$;

г) є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим оператором функцією $u_0(\mathbf{x})$, яка має вигляд (17), якщо виконується умова: для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, v, \frac{1}{v} w\right) > v \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0]. \quad (18)$$

Позначимо через $K(u_0)$ підмножину функцій $U \in K_+$, для яких існують числа $\alpha, \beta > 0$ такі, що $\alpha u_0, U, \beta u_0$. Тоді гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим [9], якщо для

будь-яких ненульових елементів $V, W \in K_+$ маємо, що $\hat{T}(V, W) \in K(u_0)$, і для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $v \in (0; 1)$ виконується нерівність $\hat{T}\left(vV, \frac{1}{v}W\right) > v\hat{T}(V, W)$. Умова u_0 -псевдоувігнутості для псевдоувігнутого оператора є більш жорсткою, ніж умова просто псевдоувігнутості [9]: для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $v \in (0; 1)$ існує $\eta = \eta(V, W, v) > 0$ таке, що має місце нерівність $\hat{T}\left(vV, \frac{1}{v}W\right) > v(1 + \eta)\hat{T}(V, W)$.

Далі вважатимемо, що оператор T_j вигляду (14) є гетеротонним із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (13) (а отже, і крайової задачі (9)-(11)).

Виділимо умовами $\hat{T}_j(v_j^0, w_j^0) \geq v_j^0$, $\hat{T}_j(w_j^0, v_j^0) \leq w_j^0$ у конусі K_+ сильно інваріантний для гетеротонного оператора T_j конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$. Це призводить до того, що для функцій $v_j^0(\mathbf{x})$ і $w_j^0(\mathbf{x})$ виконуватимуться нерівності

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

або (з урахуванням (15))

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (19)$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (20)$$

де позначено

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^2 \tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds. \quad (21)$$

Очевидно, що $\varphi_j(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ і $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$.

Тепер за схемою $v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, починаючи з кінців відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$, сформуємо ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}).$$

З урахуванням (15) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}). \quad (24)$$

З формул (22), (23) випливає, що $v^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$, $w^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, незалежно від того $v_j^0|_{\partial\Omega} = 0$ та/або $w_j^0|_{\partial\Omega} = 0$ чи $v_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$ та/або $w_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$.

Послідовність функцій $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є неспадною за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є незростаючою за конусом K_+ . Тоді з нормальності конуса K_+ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей.

Застосовуючи різні умови збіжності двобічних наближень до розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі [9], отримаємо наступні умови збіжності наближень (22)-(24) до розв'язку задачі (9)-(11).

Теорема 1. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16) і система рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (25)$$

$$w(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds \quad (26)$$

не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (22)-(24) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \gg v^{(1)} \gg \dots \gg v^{(k)} \gg \dots \gg U_j^* \gg \dots \gg w^{(k)} \gg \dots \gg w^{(1)} \gg w^{(0)} = w^0. \quad (27)$$

Теорему 1 можна уточнити за рахунок накладання додаткових умов на функцію $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$, за виконання яких система рівнянь (25), (26) не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$ [9]. Мають місце такі твердження.

Теорема 2. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j = 1, \dots, m$, і для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$ має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t, v+u, w-u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) + uM^{-1},$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$.

Тоді при кожному j , $j = 1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

Теорема 3. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j=1, \dots, m$, і існує така неперервна на $(0, T_0]$ функція $L(t) > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_j^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, t, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)| \leq L(t)|w - v|.$$

Якщо $\gamma = ML < 1$, де $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0^j(\mathbf{x})$, $L = \max_{j=1, \dots, m} L(t_j)$, то при кожному $j, j=1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11). При цьому для j -ї задачі матиме місце оцінка

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (L_j M)^{k+1} \|w_j^0 - v_j^0\|,$$

де $L_j = L(t_j)$, $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$.

Використання умови (18) u_0 -псевдоувігнутості гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16) призводить до такого результату.

Теорема 4. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle \succ K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) з супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j=1, \dots, m$, і для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, v, \frac{1}{v}w\right) > v\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0]. \quad (28)$$

Тоді при кожному $j, j=1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

При реалізації розглянутого методу двобічних наближень за наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (1)-(4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (29)$$

На кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (29):

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

що є перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес розв'язання j -ї задачі, $j=1, \dots, m$, слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x}).$$

Тоді, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \dots, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}). \quad (30)$$

Відповідно до загальних теорем збіжності метода Рунге [6, 14] з теорем 2-4 випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (1)-(4) при $\tau \rightarrow 0$.

Використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [7], за набором функцій (30) можна побудувати наближений розв'язок задач (1)-(4) у вигляді функції $u_m(\mathbf{x}, t)$, визначеної при всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T_0]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t).$$

При чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (9)-(11) для побудови сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$, що виділяється умовами (19)-(20), можуть бути корисні наступні загальні рекомендації.

Якщо функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ визначена при $u = 0$, то незалежно від того $f(\mathbf{x}, t, 0) > 0$ чи $f(\mathbf{x}, t, 0) = 0$, конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ можна шукати у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = 0$, $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j$. Це призводить до нерівностей

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, 0, \beta) ds &\geq 0 \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta, 0) ds &\leq \beta \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Перша з цих нерівностей завжди виконуватиметься, а друга нерівність набуває вигляду

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{M}{a^2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, \beta, 0) \leq \beta,$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$.

Оскільки шуканий розв'язок задачі (9)-(11) задовольняє однорідну крайову умову, то у загальному випадку незалежно від того, визначена функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ при $u = 0$ чи ні, конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ можна шукати у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x})$, $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x})$.

Тоді для визначення чисел α_j, β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad \beta_j \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad (31)$$

де

$$h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})} + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \alpha_j u_0(\mathbf{s}), \beta_j u_0(\mathbf{s})) ds,$$

$$h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})} + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta_j u_0(\mathbf{s}), \alpha_j u_0(\mathbf{s})) ds.$$

4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо задачу (1)-(4) в одиничному квадраті $\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ з

$$f(\mathbf{x}, t, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \tag{32}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2),$$

де $p, q > 0, \lambda, \mu > 0$.

Для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (32) обираємо $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$. Умова u_0 -псевдо-увігнутості (28), записана для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (32), призводить до нерівності

$$\lambda v(\tau^{p-1} - 1)v^p + \mu v(\tau^{q-1} - 1)w^{-q} > 0,$$

яка виконуватиметься для всіх $v \in (0, 1), v, w > 0$ і для будь-яких $\lambda, \mu > 0$, якщо $0 < p < 1, 0 < q < 1$.

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{a^2\tau}$ в одиничному квадраті Ω має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi n s_1 \sin \pi m s_2}{\pi^2 (n^2 + m^2) + \kappa^2},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{s} = (s_1, s_2), \kappa^2 = \frac{1}{a^2\tau}$.

Шукаючи на j -му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x}), w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x})$, відповідно до (31) для визначення чисел α_j, β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq m_0^j + \frac{\lambda m_1^j}{a^2} \alpha_j^p + \frac{\mu m_2^j}{a^2} \beta_j^{-q}, \quad \beta_j \geq M_0^j + \frac{\lambda M_1^j}{a^2} \alpha_j^p + \frac{\mu M_2^j}{a^2} \beta_j^{-q}, \tag{33}$$

де

$$m_0^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})}, \quad M_0^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})},$$

$$m_1^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) ds, \quad M_1^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) ds,$$

$$m_2^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) ds, \quad M_2^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) ds.$$

Отже, для $\lambda, \mu > 0$ і $0 < p < 1, 0 < q < 1$ згідно з теоремою 4 на кожному часовому шарі $j, j = 1, \dots, m$, ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \right\} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [w^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [v^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \right\} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x}), \quad (36)$$

де α_j, β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) є розв'язком системи нерівностей (33), двобічно збігається до функції $U_j^*(\mathbf{x})$, яка є наближенням за модифікованим методом Роте для $u(\mathbf{x}, t_j)$.

Застосуємо розроблений метод двобічних наближень до знаходження наближення $U_1(\mathbf{x})$ до функції $u(\mathbf{x}, t)$ на першому часовому шарі для $\tau_1 = 0,1$, якщо $a = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$.

Знаходимо

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 10 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1-s_1)(1-s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,1241, \quad M_0^1 = 0,4682, \quad m_1^1 = 0,0921, \quad M_1^1 = 0,1908, \quad m_2^1 = 5,4310, \quad M_2^1 = 17,1891.$$

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 1.

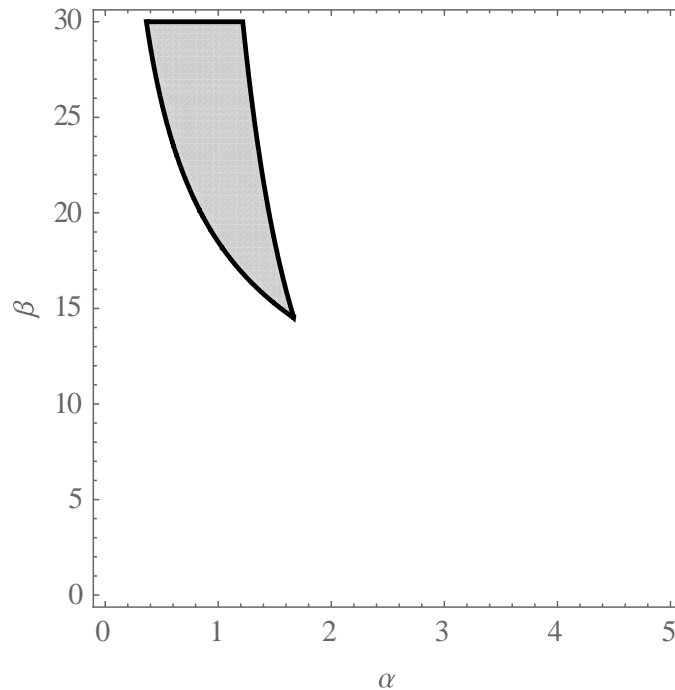


Рис. 1. Розв'язок системи нерівностей (33) для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_1 = 1,6693$, $\beta_1 = 14,4990$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено десять ітерацій. На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 3 наведено поверхню, а на рис. 4 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$, а у табл. 1 наведено значення $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$,

$k = 0, 1, \dots, 9$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,452$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з таким показником.

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

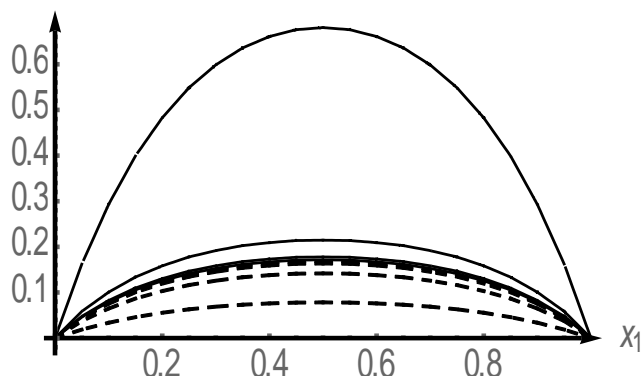


Рис. 2. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Таблиця 1 – Значення функції $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ у точках вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$ ($\tau = 0,1$)

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0458	0,0641	0,0730	0,0773	0,0786	0,0773	0,0730	0,0641	0,0458	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0641	0,0961	0,1132	0,1218	0,1244	0,1218	0,1132	0,0961	0,0641	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0730	0,1132	0,1360	0,1477	0,1513	0,1477	0,1360	0,1132	0,0730	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0773	0,1218	0,1477	0,1613	0,1656	0,1613	0,1477	0,1218	0,0773	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0786	0,1244	0,1513	0,1656	0,1700	0,1656	0,1513	0,1244	0,0786	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0773	0,1218	0,1477	0,1613	0,1656	0,1613	0,1477	0,1218	0,0773	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0730	0,1132	0,1360	0,1477	0,1513	0,1477	0,1360	0,1132	0,0730	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0641	0,0961	0,1132	0,1218	0,1244	0,1218	0,1132	0,0961	0,0641	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0458	0,0641	0,0730	0,0773	0,0786	0,0773	0,0730	0,0641	0,0458	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Знайдемо тепер розробленим методом наближення $U_1(\mathbf{x})$ і $U_2(\mathbf{x})$ до функції $u(\mathbf{x}, t)$ на першому та другому часових шарах для $\tau_1 = 0,05$, якщо $a = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$. Для першого часового шару з $\tau_2 = 0,05$ знаходимо

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1-s_1)(1-s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,2083, \quad M_0^1 = 0,9649, \quad m_1^1 = 0,0770, \quad M_1^1 = 0,1666, \quad m_2^1 = 6,1659, \quad M_2^1 = 19,5828.$$

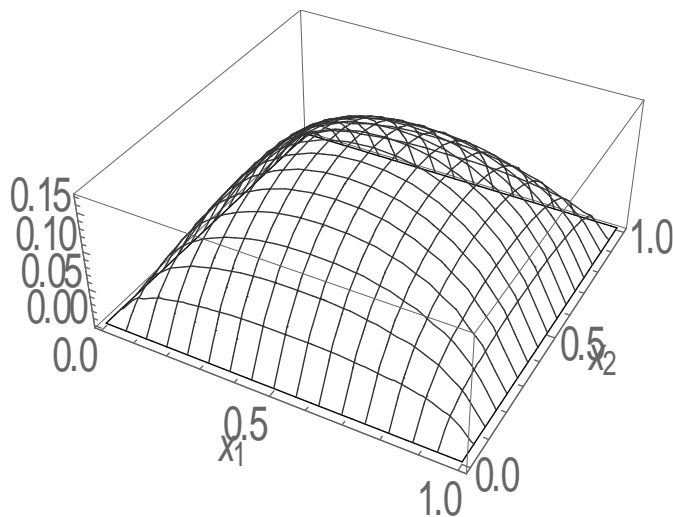


Рис. 3. Поверхня наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

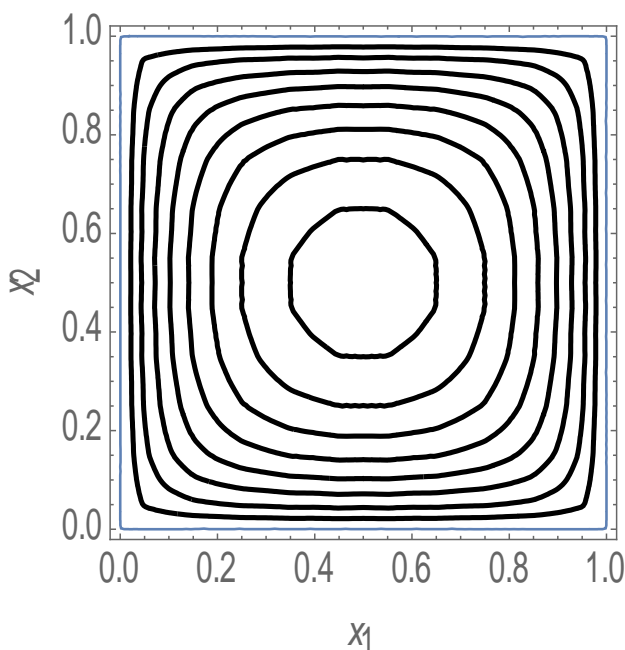


Рис. 4. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 5.

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_1 = 1,8539$, $\beta_1 = 16,0138$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено дев'ять ітерацій. На рис. 6 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 7 наведено поверхню, а на рис. 8 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$, а у табл. 2 наведено значення $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами

$(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, \dots, 8$, похибок

$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,419$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

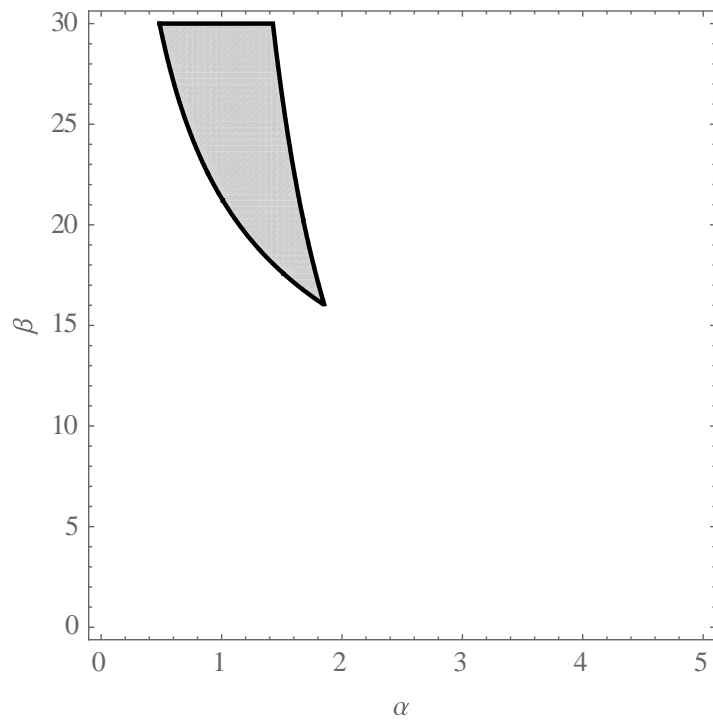


Рис. 5. Розв'язок системи нерівностей (33) для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

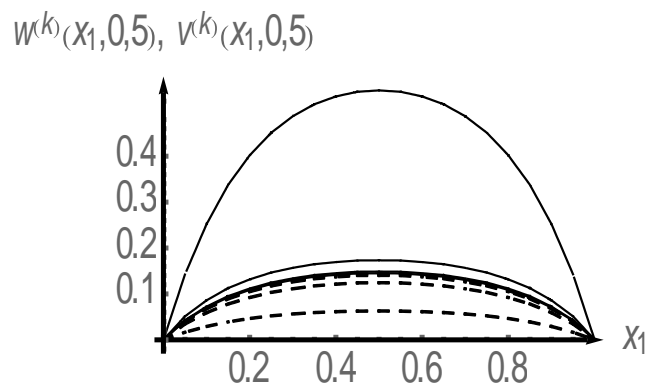


Рис. 6. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

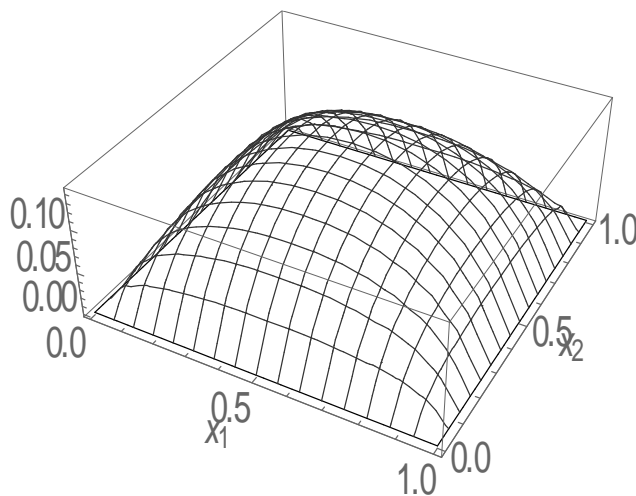


Рис. 7. Поверхня наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

Таблиця 2 – Значення функції $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ у точках вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0, 1r; 0, 1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$ ($\tau = 0,05$)

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0427	0,0583	0,0656	0,0689	0,0699	0,0689	0,0656	0,0583	0,0427	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0583	0,0856	0,0994	0,1061	0,1081	0,1061	0,0994	0,0856	0,0583	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0656	0,0994	0,1178	0,1269	0,1297	0,1269	0,1178	0,0994	0,0656	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0689	0,1061	0,1269	0,1376	0,1409	0,1376	0,1269	0,1061	0,0689	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0699	0,1081	0,1297	0,1409	0,1443	0,1409	0,1297	0,1081	0,0699	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0689	0,1061	0,1269	0,1376	0,1409	0,1376	0,1269	0,1061	0,0689	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0656	0,0994	0,1178	0,1269	0,1297	0,1269	0,1178	0,0994	0,0656	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0583	0,0856	0,0994	0,1061	0,1081	0,1061	0,0994	0,0856	0,0583	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0427	0,0583	0,0656	0,0689	0,0699	0,0689	0,0656	0,0583	0,0427	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Аналогічно для другого часового шару з $\tau_2 = 0,05$ знаходимо

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_1^{(9)}(s_1, s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^2 = 0,4303, \quad M_0^2 = 1,1886, \quad m_1^2 = 0,0921, \quad M_1^2 = 0,1908, \quad m_2^2 = 5,4310, \quad M_2^2 = 17,1891.$$

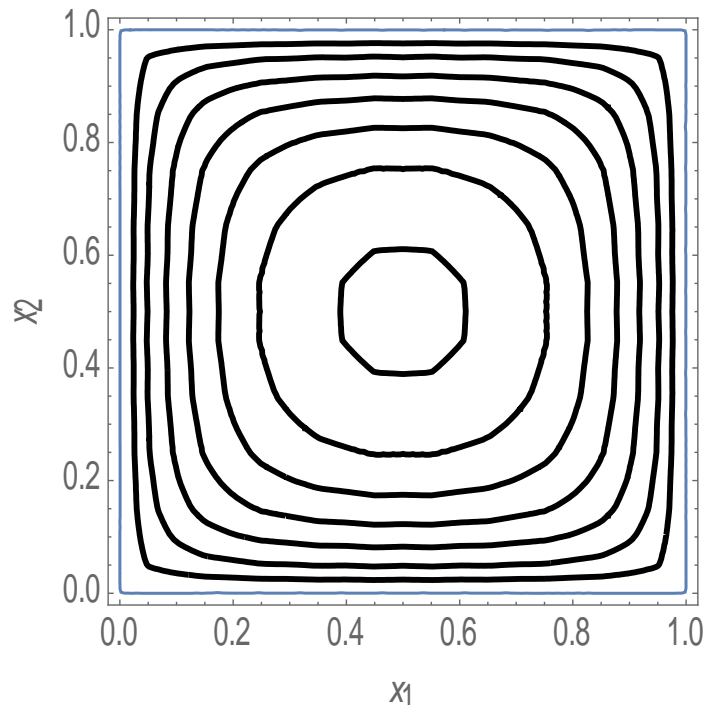


Рис. 8. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 9.

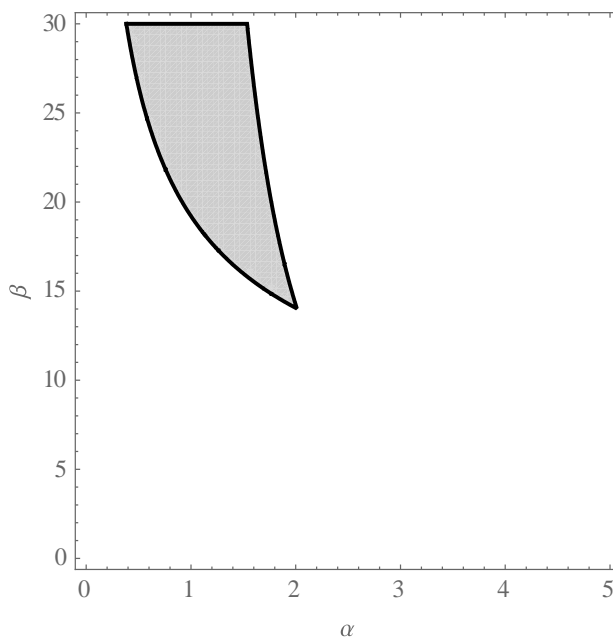


Рис. 9. Розв’язок системи нерівностей (33) для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_2 = 2,0111$, $\beta_2 = 14,0242$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено вісім ітерацій. На рис. 10 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_2^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 11 наведено поверхню, а на рис. 12 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв’язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$, а у табл. 3 наведено значення $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, \dots, 7$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,385$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

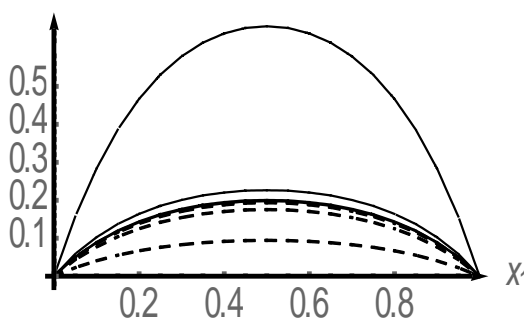


Рис. 10. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_2^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Отримані функції $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$, $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ і $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ є розв’язками з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ крайових задач вигляду (9)-(11) і наближають $u(\mathbf{x}, 0,1)$, $u(\mathbf{x}, 0,05)$ і $u(\mathbf{x}, 0,1)$ відповідно, але їх точність відносно кроку за часом становить лише $O(\tau)$. На основі правила Рунге уточнене до $O(\tau^2)$ значення $u(\mathbf{x}, 0,1)$ розрахуємо за формулою

$$u(\mathbf{x}, 0,1) = 2U_2^{(8)}(\mathbf{x}) - U_1^{(10)}(\mathbf{x}).$$

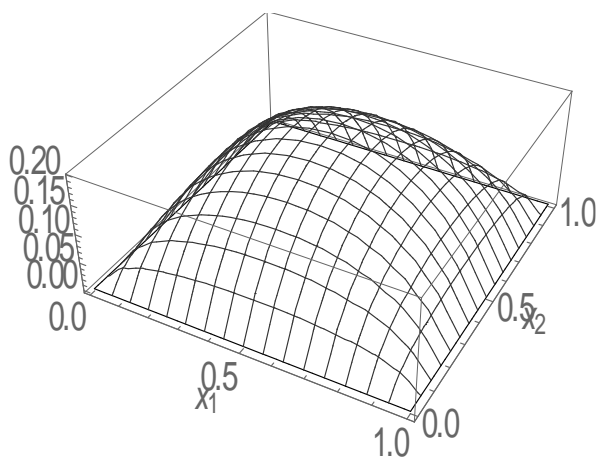


Рис. 11. Поверхня наближеного розв'язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Таблиця 3 – Значення функції $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0491	0,0701	0,0808	0,0861	0,0877	0,0861	0,0808	0,0701	0,0491	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0701	0,1072	0,1277	0,1382	0,1414	0,1382	0,1277	0,1072	0,0701	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0808	0,1277	0,1551	0,1695	0,1739	0,1695	0,1551	0,1277	0,0808	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0861	0,1382	0,1695	0,1862	0,1914	0,1862	0,1695	0,1382	0,0861	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0877	0,1414	0,1739	0,1914	0,1969	0,1914	0,1739	0,1414	0,0877	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0861	0,1382	0,1695	0,1862	0,1914	0,1862	0,1695	0,1382	0,0861	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0808	0,1277	0,1551	0,1695	0,1739	0,1695	0,1551	0,1277	0,0808	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0701	0,1072	0,1277	0,1382	0,1414	0,1382	0,1277	0,1072	0,0701	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0491	0,0701	0,0808	0,0861	0,0877	0,0861	0,0808	0,0701	0,0491	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

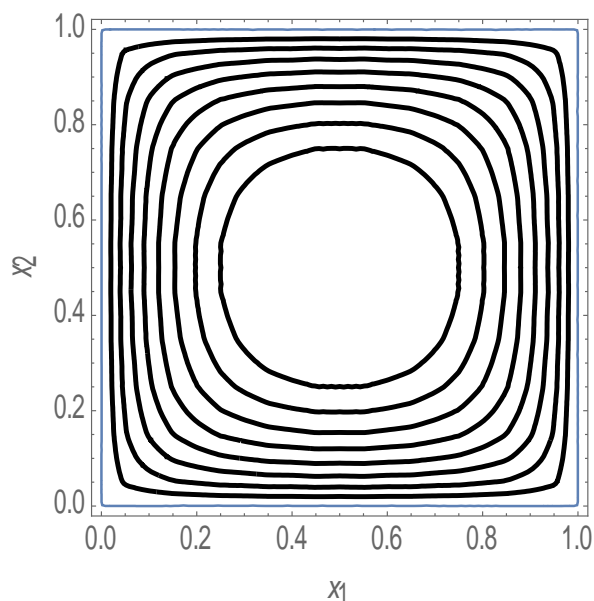


Рис. 12. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

На рис. 13 наведено поверхню, а на рис. 14 лінії рівня (з кроком 0,02) наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$, а у табл. 4 наведено значення цієї функції у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$.

Таблиця 4 – Значення наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$ у точках області $\bar{\Omega}$ вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0524	0,0761	0,0886	0,0949	0,0968	0,0949	0,0886	0,0761	0,0524	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0761	0,1182	0,1422	0,1546	0,1584	0,1546	0,1422	0,1182	0,0761	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0886	0,1422	0,1742	0,1912	0,1965	0,1912	0,1742	0,1422	0,0886	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0949	0,1546	0,1912	0,2110	0,2172	0,2110	0,1912	0,1546	0,0949	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0968	0,1584	0,1965	0,2172	0,2237	0,2172	0,1965	0,1584	0,0968	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0949	0,1546	0,1912	0,2110	0,2172	0,2110	0,1912	0,1546	0,0949	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0886	0,1422	0,1742	0,1912	0,1965	0,1912	0,1742	0,1422	0,0886	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0761	0,1182	0,1422	0,1546	0,1584	0,1546	0,1422	0,1182	0,0761	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0524	0,0761	0,0886	0,0949	0,0968	0,0949	0,0886	0,0761	0,0524	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

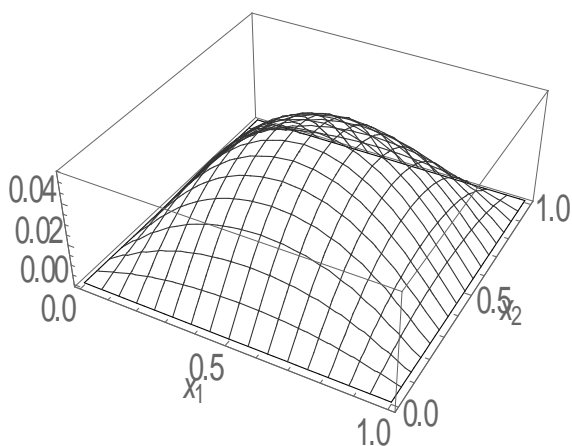


Рис. 13. Поверхня наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$

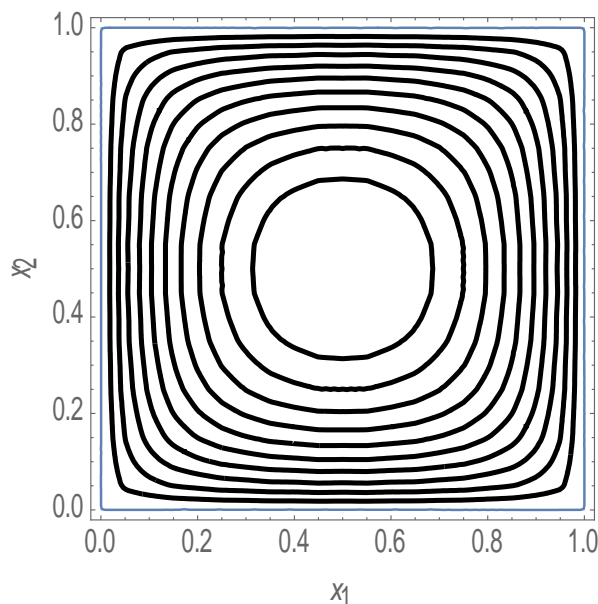


Рис. 14. Лінії рівня наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$

ВИСНОВКИ

Для розв’язання першої початково-крайової задачі для квазілінійного рівняння теплопровідності у роботі вперше запропоновано комбінація модифікованого методу Рунге і методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості

та ефективність методу. Запропонований метод може бути використаний при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є початково-крайові задачі вигляду (1)-(4), і розповсюджений на задачі для квазілінійних гіперболічних рівнянь. Також за рахунок використання замість точної функції Гріна відповідної квазіфункції Гріна-Рвачова метод двобічних наближень можна буде використати для розв'язання відповідних задач в областях складної геометрії. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1973. Т. 13, № 5. С. 1351–1356.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений: 2-е изд., доп. Москва: Наука, 1966. 686 с.
3. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1974. Т. 14, № 4. С. 891–905.
4. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107–120.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
6. Ладыженская О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. *Тр. ММО*. 1958. Т. 7. С. 149–177.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
8. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов теплопереноса. Эволюция диссипативных структур. Москва: Наука, 1987. 352 с.
9. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987. 478 с.
11. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики: 2-е изд. Москва: Научный мир, 2003. 316 с.
12. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 250–259.
13. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Москва: Интеллект, 2008. 408 с.
14. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*. 1930. Vol. 102, № 1. P. 650–670.

REFERENCES

1. Golaido, S. I., Martinson, L. K. & Pavlov, K. B. (1973). Non-stationary problems of non-linear heat conduction with volume heat absorption. *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, Vol. 13, No. 5, pp. 1351-1356.
2. Zel'dovich, Ya. B. & Raizer, Yu. P. (1966). *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Moscow: Nauka (in Russian).

3. Kalashnikov, A. S. (1974). The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption. *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 4, pp. 891-905 (in Russian).
4. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2015). On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 3, pp. 107-120 (in Russian).
5. Krasnosel'skij, M. A. (1962). *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Ladyženskaya, O. A. (1958). Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva*, No. 7, pp. 149-177 (in Russian).
7. Lytvyn, O. M. (2002). *Interlineation of functions and some its applications*. Kharkiv: Osnova (in Ukrainian).
8. Maslov, V. P., Danilov, V. G. & Volosov, K. A. (1987). *Mathematical modeling of heat and mass transfer processes. Evolution of dissipative structures*. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Opojtsjev, V. I. & Khurodze, T. A. (1984). *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta (in Russian).
10. Samarskii, A. A., Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P. & Mikhailov, A. P. (1987). *Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations*. Moscow: Nauka (in Russian).
11. Samarskii, A. A. & Gulin, A. V. (2003). *Numerical methods of mathematical physics*. Moscow: Nauchnyj mir (in Russian).
12. Sidorov, M. V. (2017). Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 2, pp. 250-259 (in Ukrainian).
13. Frank-Kamenetskii, D. A. (2008). *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Moscow: Intellekt (in Russian).
14. Rothe, E. (1930). Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*, Vol. 102, No. 1, pp. 650-670 (in German).

УДК 004.942

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-13

К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАДНИМ ХОДОМ

Татиевский Д. Н., аспирант

*Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, г. Запорожье, 69006, Украина*

dtdissert@gmail.com

В исследовании проведено изучение состояния и решения проблемы, связанной с реверсным движением автопоезда, состоящего из тягача и двух полуприцепов со сцепными устройствами точно над задней осью тягача и полуприцепов («on-axle hitching» модель). На основе анализа подходов к синтезу законов управления таким автопоездом принято решение синтезировать требуемые законы управления (контроллеры) с использованием метода функций А. М. Ляпунова. Прямой метод А. М. Ляпунова для синтеза такого управления был уже применен для автопоезда с одним полуприцепом, но вследствие усложнения модели было решено использовать метод