

3. Kalashnikov, A. S. (1974). The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption. *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 4, pp. 891-905 (in Russian).
4. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2015). On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 3, pp. 107-120 (in Russian).
5. Krasnosel'skij, M. A. (1962). *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Ladyženskaya, O. A. (1958). Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva*, No. 7, pp. 149-177 (in Russian).
7. Lytvyn, O. M. (2002). *Interlineation of functions and some its applications*. Kharkiv: Osnova (in Ukrainian).
8. Maslov, V. P., Danilov, V. G. & Volosov, K. A. (1987). *Mathematical modeling of heat and mass transfer processes. Evolution of dissipative structures*. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Opojtsjev, V. I. & Khurodze, T. A. (1984). *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta (in Russian).
10. Samarskii, A. A., Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P. & Mikhailov, A. P. (1987). *Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations*. Moscow: Nauka (in Russian).
11. Samarskii, A. A. & Gulin, A. V. (2003). *Numerical methods of mathematical physics*. Moscow: Nauchnyj mir (in Russian).
12. Sidorov, M. V. (2017). Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 2, pp. 250-259 (in Ukrainian).
13. Frank-Kamenetskii, D. A. (2008). *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Moscow: Intellekt (in Russian).
14. Rothe, E. (1930). Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*, Vol. 102, No. 1, pp. 650-670 (in German).

УДК 004.942

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-13

## **К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАДНИМ ХОДОМ**

Татиевский Д. Н., аспирант

*Запорожская государственная инженерная академия,  
просп. Соборный, 226, г. Запорожье, 69006, Украина*

dtdissert@gmail.com

В исследовании проведено изучение состояния и решения проблемы, связанной с реверсным движением автопоезда, состоящего из тягача и двух полуприцепов со сцепными устройствами точно над задней осью тягача и полуприцепов («on-axle hitching» модель). На основе анализа подходов к синтезу законов управления таким автопоездом принято решение синтезировать требуемые законы управления (контроллеры) с использованием метода функций А. М. Ляпунова. Прямой метод А. М. Ляпунова для синтеза такого управления был уже применен для автопоезда с одним полуприцепом, но вследствие усложнения модели было решено использовать метод

бэкстеппинга (backstepping), основанный также на методе функций А. М. Ляпунова и, в силу рекурсивности алгоритма, подходящего для решения этой проблемы при увеличении количества полуприцепов в составе автопоезда. В итоге, законы управления, обеспечивающие стабилизацию автопоезда при реверсном движении и удовлетворяющие ограничениям по управлению, были синтезированы с помощью методов бэкстеппинга и прямого метода А. М. Ляпунова. Синтезированные с помощью этих методов законы проверены с помощью численного моделирования в системе Maple, что позволило добиться высокого качества управления движением автопоезда по круговой траектории с помощью настройки коэффициентов регулятора. При этом закон, синтезированный с помощью метода бэкстеппинга, имеет два регулирующих коэффициента, в отличие от единственного при синтезе, по прямому методу А. М. Ляпунова, и позволяет добиться более тонкой настройки управления. Для сравнения синтезированных законов проводился анализ фазовых портретов траекторий, углов складывания и управления, ориентационных углов, а также выполнялся анализ качества переходных процессов при изменении скорости движения автопоезда.

*Ключевые слова: автопоезд, бэкстеппинг, контроллер, неголономная система, прямой метод А. М. Ляпунова, реверсное движение, робопоезд, синтез закона управления, «on-axle hitching» модель, Maple.*

## ДО СИНТЕЗУ ЗАКОНІВ УПРАВЛІННЯ НЕГОЛОНОМНОЇ МОДЕЛІ ТРИЛАНКОВОГО АВТОПОЇЗДА ПРИ РУСІ ЗАДНІМ ХОДОМ

Татієвський Д. М., аспірант

*Запорізька державна інженерна академія,  
просп. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна*

dtdissert@gmail.com

У дослідженні проведено вивчення стану і вирішення проблеми, пов'язаної з реверсним рухом автопоїзда, що складається з тягача і двох напівприцепів із зчіпними пристроями точно над задньою віссю тягача і напівприцепів («on-axle hitching» модель). На основі аналізу підходів до синтезу законів управління таким автопоїздом прийнято рішення синтезувати необхідні закони управління з використанням методу функцій О. М. Ляпунова. Прямий метод О. М. Ляпунова для синтезу такого управління широко використовується для автопоїзда з одним напівприцепом, але внаслідок ускладнення моделі було вирішено використовувати метод бекстепінга (backstepping), заснований також на методі функцій О. М. Ляпунова і, в силу рекурсивності алгоритму, придатного для вирішення цієї проблеми при збільшенні кількості напівприцепів у складі автопоїзда. У підсумку закони управління, що стабілізують автопоїзд при реверсному русі з урахуванням обмежень з управління, були синтезовані за допомогою методів бекстепінга і прямого методу О. М. Ляпунова. Синтезовані за допомогою цих методів закони перевірені за допомогою чисельного моделювання в системі Maple, що дозволило добитися високої якості управління рухом автопоїзда по круговій траєкторії за допомогою настройки коефіцієнтів регулятора. При цьому закон, синтезований за допомогою методу бекстепінга, має два регулюючих коефіцієнти на відміну від єдиного при синтезі, за прямим методом О. М. Ляпунова, і дозволяє домогтися більш тонкого налаштування управління. Для порівняння синтезованих законів проводився аналіз фазових портретів траєкторій, кутів складання і управління, орієнтаційних кутів, а також виконувався аналіз якості перехідних процесів при зміні швидкості руху автопоїзда.

*Ключові слова: автопоїзд, бекстепінг, контролер, неголономна система, прямий метод О. М. Ляпунова, реверсний рух, робопоезд, синтез закону управління, «on-axle hitching» модель, Maple.*

## REGARDING THREE LINK ROAD TRAIN MODEL MOVING REVERSE NON-HOLONOMIC SYSTEM STEERING LAWS SYNTHESIS

Tatievskiy D. N., postgraduate student

*Zaporizhzhya State Engineering Academy,  
ave. Soborniy, 226, Zaporizhia, 69006, Ukraine,*

dtdissert@gmail.com

The current research contains studying of issue solutions state related to reverse motion of a road train reverse consisting of a tractor truck and two semitrailers with hitching units on the tractor truck rear axle directly (an “on-axle hitching” model). Based on analyzing approaches towards the kind of road train steering laws synthesis it's decided to synthesize the required steering laws (controllers) using

Lyapunov's functions method. Direct Lyapunov's method for synthesizing the kind of controlling has been already applied for a road train with one semitrailer, but due to a model increased complexity and algorithm (suitable for solving this task with growing road train semitrailers number) recursiveness a backstepping method has been used which is also based on Lyapunov's functions method. As a result, steering laws for stabilizing road train reverse motion and matching steering limitations have been synthesized using the backstepping and direct Lyapunov's methods.

Laws synthesized with these methods are checked via computational modeling in the Maple system which has allowed achieving high quality road train motion controlling along a circular trajectory using regulation factors configuration. It's necessary to mind that the law synthesized with the backstepping method has two regulation factors unlike one only when synthesizing according to Lyapunov's direct method and allows better steering fine tuning.

Analyzing of trajectory phase portraits, folding and steering angles, orientation angles as well as transitions quality when changing road train motion speed has been performed for the synthesized laws comparison.

As it's known, two types of automatic steering tracking systems are used: given motion trajectory tracking systems and controlling systems or given curve path following.

In the first case the trajectory sets desired variable conditions changing in the time function and this way the synthesized laws provide an effective solution. In the second case a desired curve path is set (can be set as a combination of straight lines and segments of an R radius circle) in the working space without being a time function.

As system desired folding angles values are definitely related to the hitching point between the tractor truck and the first semitrailer trajectory R radius of curvature value, a law is also synthesized for following a curve path set with its own radius, and here in border-line cases (radius going to infinity or desired folding angle to zero) a straight line motion is received.

*Key words: road train, backstepping, controller, non-holonomic system, A. M. Lyapunov's direct method, reverse motion, robot train, steering law synthesis, an "on-axle hitching" model, Maple.*

## ВВЕДЕНИЕ

Автопоезда, состоящие из тягача и пассивных полуприцепов, относятся к классу нелинейных, неголономных, структурно неустойчивых (при реверсном движении) динамических систем. Задача управления их движением (обратным ходом) является актуальной как с точки зрения теории, так и с точки зрения практической реализации программного движения с заданными ограничениями.

При движении реверсом, без надлежащего управляющего воздействия, звенья автопоезда будут «выдавливать» друг друга, что сопровождается неограниченным ростом углов складывания (явление, известное как *jackknifing*), в то время, как при движении вперед полуприцепы будут «отслеживать» курсовой угол тягача. Поэтому в настоящее время автономные системы грузоперевозок являются объектом многочисленных исследовательских проектов, среди которых можно выделить работы по синтезу законов управления для реверсного движения таких систем.

Задача об управлении движением автопоезда с несколькими полуприцепами в предположении реализации неголономных связей (отсутствии бокового проскальзывания опорных колес) имеет большое теоретическое и прикладное значение. Исследования в этой области стимулируются многочисленными прикладными задачами.

Необходимо отметить, что работы в этом направлении активно ведутся за рубежом, особенно в последние годы. При этом для синтеза законов управления используется разнообразный математический аппарат: предлагаются методы управления и планирования движения такой системы, обусловленные исключительно геометрическими особенностями ее кинематики, сформулированными в каскадной форме [2], применение аппарата алгебр Ли [3, 4], нечеткой логики (*fuzzy logic*) [5], использование каскадной стратегии управления (VFO) [6], применение линейно-квадратичных контроллеров [7], нильпотентной аппроксимации [8] и прочее. Выполнен качественный анализ таких систем [9]. При этом, как правило, рассматриваются не только общие случаи решения проблемы управления, но и частные – для системы из одного и двух полуприцепов.

Главной целью исследования является синтез законов управления колесным модулем автопоезда при движении реверсом, обеспечивающих движение автопоезда в заданном коридоре. Последнее достигается наложением ограничений на величины углов складывания между звеньями автопоезда.

В исследовании синтез закона управления проведен на основе метода функций А. М. Ляпунова (Ляпунова) и метода бэкстеппинга [10, 11]. При выборе функции Ляпунова были использованы результаты, полученные в процессе бэкстеппинга. Заметим, что прямой метод Ляпунова уже был успешно применен для синтеза закона управления с одним полуприцепом [1], однако метод бэкстеппинга, в силу рекурсивной природы алгоритма, очевидно, более эффективен при синтезе управления в случае наличия нескольких полуприцепов.

## 1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В основе математической модели управляемого движения сочлененного автопоезда реверсом лежат классические положения механики системы твердых тел (с учетом наличия неголономных связей). Задача синтеза программного управляемого движения решалась на основе строго обоснованных подходов теории автоматического управления и контроля динамических систем; корректность полученных результатов проверялась на основе независимого численного моделирования системы, а именно:

- рассматривается кинематическая модель трехзвенного автопоезда с неголономными связями (отсутствие поперечных проскальзываний колесной системы);
- для стабилизации движения реверсом такой системы используются методы функций Ляпунова (второй метод Ляпунова) в сочетании с методом бэкстеппинга, который также опирается на метод функций Ляпунова;
- свойство устойчивости рассмотрено с точки зрения определения устойчивости по А. М. Ляпунову [13];
- при реализации метода бэкстеппинга необходимые символьные вычисления были проведены в среде Maple;
- численное моделирование (интегрирование) уравнений управляемого движения модели автопоезда также проведено в среде Maple.

Эмпирическое исследование заключалось в реализации управляемого движения масштабной физической модели, регистрации углов складывания и управляющего воздействия, что позволило выполнить оптимальную настройку регуляторов для обоих законов управления.

## 2. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Кинематическая модель системы

Рассмотрим систему, состоящую из тягача с двумя пассивными полуприцепами, соединенными по модели «on-axle hitching», кинематическая схема которой изображена на рис. 1 [7].

Здесь  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  – ориентационные углы объектов системы,  $L_1, L_2, L_3$  – их линейные размеры,  $\varphi$  – управление (угол поворота рулевых колес тягача). Введем обозначения:  $\gamma_1 = \theta_1 - \theta_2$  – угол складывания между тягачом и первым полуприцепом,  $\gamma_2 = \theta_2 - \theta_3$  – угол складывания между полуприцепами. На эти углы накладываются ограничения  $|\gamma_i| < \pi/2$ , ограничения на угол  $\varphi$  определяются техническими возможностями управления.

Согласно этой схеме, дополним использованную для системы тягач-полуприцеп систему дифференциальных уравнений [1] последним уравнением (производная угловой скорости второго полуприцепа):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \cdot \cos(\theta_1), \\ \dot{y}_1 &= v \cdot \sin(\theta_1), \\ \dot{\theta}_1 &= v \cdot \tan(\varphi)/L_1, \\ \dot{\theta}_2 &= v \cdot \sin(\gamma_1)/L_2, \\ \dot{\theta}_3 &= v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2)/L_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $v < 0$  – линейная скорость тягача.

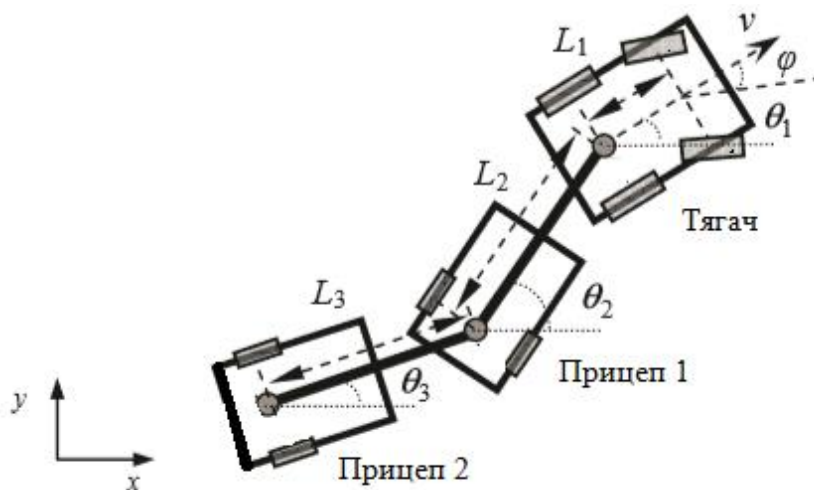


Рис. 1. Кинематическая схема системы

### 2.2. Синтез закона управления по методу бэкстеппинга

Синтезируем сначала закон управления по методу бэкстеппинга – с помощью рекурсивной процедуры, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего закона управления. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по алгоритму [11, 12].

Обозначим желаемый угол складывания между полуприцепами как  $\gamma_{2ref}$ , при этом тот же угол, между тягачом и полуприцепом, может быть вычислен путем следующих рассуждений: при стационарном круговом движении ( $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$ ) все звенья автопоезда имеют одинаковую угловую скорость вращательного движения относительно вертикальной оси. Приравняв правые части двух последних уравнений системы (1), получим  $\gamma_{1ref} = \arctan(L_2 \sin(\gamma_{2ref})/L_3)$ .

Определим ошибку слежения  $e_1 = \sin(\gamma_{2ref}) - \sin(\gamma_2)$  из последнего уравнения (1) и выберем функцию Ляпунова:

$$V_1 = e_1^2/2. \tag{2}$$

Вычислим ее производную, подставив необходимые выражения из системы (1):

$$\dot{V}_1 = -v(\sin(\gamma_{2ref}) - \sin(\gamma_2)) \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot (\tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3). \tag{3}$$

Выберем новую переменную в виде:

$$e_2 = \tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3 + k_1 \cdot e_1 \tag{4}$$

с коэффициентом  $k_1 > 0$  и новую функцию Ляпунова (в соответствии с алгоритмом бэкстеппинга) в виде:

$$V_2 = V_1 + e_2^2/2. \quad (5)$$

Дифференцируя эту функцию и полагая из вышеприведенных соображений:

$$e_2 = v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot (\sin(\gamma_{2\text{ref}}) - \sin(\gamma_2)) - k_2 \cdot e_2, \quad (6)$$

где  $k_2 > 0$ .

Продифференцируем выражение (4) и приравняем его правую часть с правой частью уравнения (6), в результате получим соотношение для определения закона управления углом поворота рулевого колеса:

$$\begin{aligned} \varphi = & -\arctg\left(\left(L_1 \cdot \left(L_2^2 \cdot \left((L_3^2 + L_3 + 1) \cdot \sin(\gamma_2) - \sin(\gamma_{2\text{ref}}) \cdot L_3^2\right) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot v \cdot \cos^3(\gamma_1) - \right.\right.\right. \\ & -L_3 \cdot L_2 \cdot \left(v \cdot \sin(\gamma_1) \cdot (L_3 + 1) \cdot \cos(\gamma_2) + L_2 \cdot k_2 \cdot \left((L_3 \cdot k_1 + 1) \cdot \sin(\gamma_2) - \right.\right. \\ & \left.\left.\left. - \sin(\gamma_{2\text{ref}}) \cdot L_3 \cdot k_1\right) \cdot \cos^2(\gamma_1) + L_2 \cdot L_3^2 k_2\right) \cdot \sin(\gamma_1) \cdot k_2 \cdot \cos(\gamma_1) - \right. \\ & \left. -L_3^2 \cdot \sin(\gamma_1) \cdot v\right) / \left(L_2 \cdot L_3^2 \cdot v\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцирование отдельных выражений и определение закона управления (угла  $\varphi$ ) выполнено с использованием системы Maple.

При этом структура сценария на внутреннем языке системы Maple имеет модульную структуру: синтез закона управления в символьном виде, запись СДУ, ввод данных, численное интегрирование, отображение фазовых портретов.

### 2.3. Синтез закона управления по прямому методу Ляпунова

Для прямого метода Ляпунова параметры его функции выберем, воспользовавшись результатами бэкстеппинга:

$$V = (e_1^2 + e_2^2)/2, \quad (8)$$

где  $e_1$  – собственно, выражение для бекстеппинга и

$$e_2 = \tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3 \quad (9)$$

из выражения (4).

Вычислим соответствующие производные по правилам дифференцирования сложной функции с учетом значений производных ориентационных углов в (1):

$$\dot{e}_1 = -v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2, \quad (10)$$

$$\dot{e}_2 = -v \cdot \left( (1 + \tan^2(\gamma_1)) \cdot \left( \sin(\gamma_1)/L_2 - \tan(\varphi)/L_1 \right) + \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2 \right). \quad (11)$$

При этом в производной (10) можно явно выделить выражение для  $e_2$ . Искомое управление входит в (11).

Подстановка (10) и (11) в производную функции Ляпунова приводит к результату (11):

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_1 \cdot e_2 + \\ & + \left( -v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2/L_3 - \left( 1 + \tan^2(\gamma_1) \cdot v \cdot \left( \sin(\gamma_1)/L_2 - \tan(\varphi)/L_1 \right) \right) / L_2 \right) \cdot e_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Вынося за скобки в (11)  $v \cdot e_2$  и полагая выражение в скобках равным  $k \cdot e_2$ , решим это уравнение относительно искомого управления – угла  $\varphi$ . Синтезированный таким образом закон управления имеет вид:

$$\varphi = \arctg \left( \left( \cos(\gamma_2) \cdot L_2^2 \cdot (L_3 \cdot e_1 + e_2) \cdot \cos^3(\gamma_1) + L_2^2 \cdot L_3 \cdot k \cdot e_2 \cdot \cos^2(\gamma_1) + \sin(\gamma_1) \cdot L_3 \right) \cdot L_1 / (L_2 \cdot L_3) \right). \quad (13)$$

Синтезированный по этому методу закон управления содержит один регулирующий коэффициент  $k > 0$  для выполнения условия отрицательной полуопределенности производной функции Ляпунова:

$$\dot{V} = k \cdot v \cdot e_2^2 \leq 0, \quad (14)$$

$k \cdot v \cdot e_2^2 \leq 0$ , поскольку скорость отрицательна.

#### 2.4. Синтез закона для реализации движения автопоезда по заданной маршрутной кривой

Как известно, для управления транспортными средствами находят применение два типа следящих систем автоматического управления: системы слежения за заданной траекторией движения («trajectory tracking») и системы управления для следования по заданной маршрутной кривой («path following»).

В первом случае траектория задает желаемое изменение переменных состояний в функции времени и, таким образом, синтезированные законы успешно ее решают. Во втором случае задается желаемая маршрутная кривая (может задаваться в виде комбинации прямых и дуг окружности радиуса  $R$ ) в рабочем пространстве, не являющаяся функцией времени.

Значения  $\gamma_{1ref}$ ,  $\gamma_{2ref}$  однозначно связаны с величиной  $R_1$  – радиусом кривизны траектории точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом ( $1/R_1 = \operatorname{tg}(\varphi_{ref})/L_1$ ):  $\sin(\gamma_{1ref}) = L_2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi_{ref})/L_1$ ;  $\sin(\gamma_{2ref}) = L_3 \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{1ref})/L_2$ . Радиус окружности, по которой будет двигаться центр каждой опорной оси полуприцепа, определяется соотношением  $1/R_i = \operatorname{tg}(\gamma_{iref})/L_i$  ( $i = 2, 3$ ).

Результаты численного моделирования подтверждают справедливость приведенных выше формул: вычисленные по этим формулам соответствующие радиусы и их значения, полученные из фазовых траекторий, совпадают с точностью до десятых долей процента.

Таким образом, задавая радиус кривизны  $R_1$  траектории движения точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом, можно вычислить значение необходимого угла складывания для любого из синтезированных выше законов по формуле  $\gamma_{2ref} = \arcsin(L_3/\sqrt{R_1^2 - L_2^2})$ . Если задать радиус окружности, по которой будет двигаться центр опорной оси второго полуприцепа, получим выражение  $\gamma_{2ref} = \arctg(L_3/R_3)$ .

Примеры реализации предлагаемого закона управления для различных значений  $R_1$  и  $R_3$  представлены ниже (рис. 2, 3).

На представленных рисунках 2 и 3  $R_1$  – заданный радиус,  $R_c$  – вычисленный радиус,  $\gamma_{2ref}$  – вычисленный угол складывания между полуприцепами.

Хотя параметры установившегося движения неголономной модели автопоезда формально не зависят от величины продольной составляющей скорости тягача (особенность неголономной

постановки), на практике эта скорость должна быть порядка 1 м/с, чтобы не нарушались условия отсутствия поперечного проскальзывания опорных колес.

При этом следует иметь в виду, что при  $R \rightarrow \infty$  или  $\gamma_{2ref} \rightarrow 0$  движение автопоезда будет стремиться к прямолинейному.

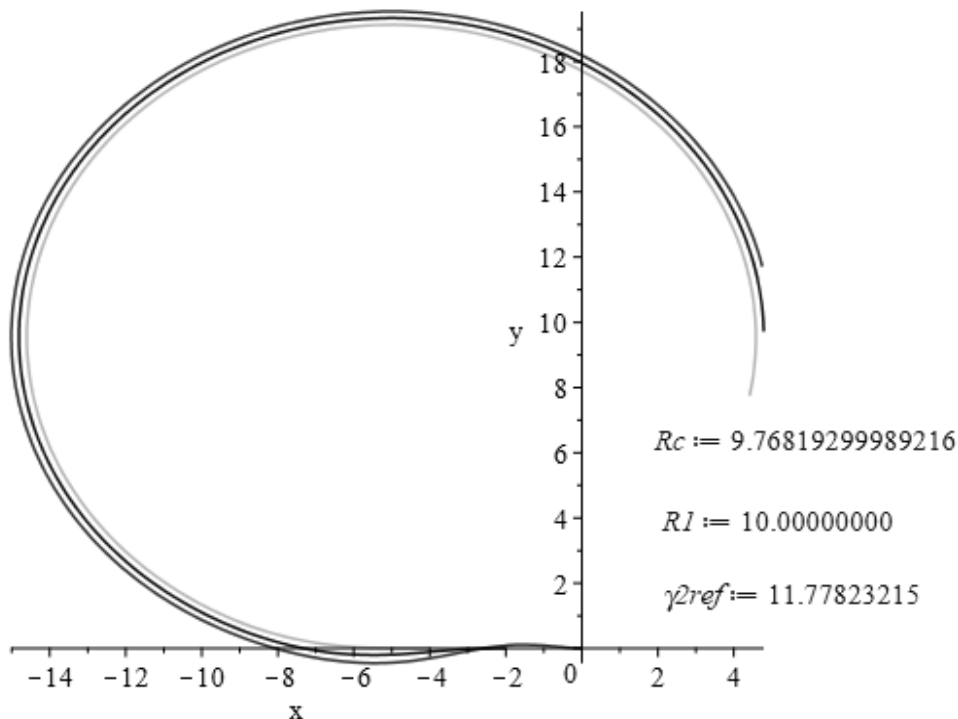


Рис. 2. Траектория движения автопоезда при заданном радиусе кривизны траектории точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом

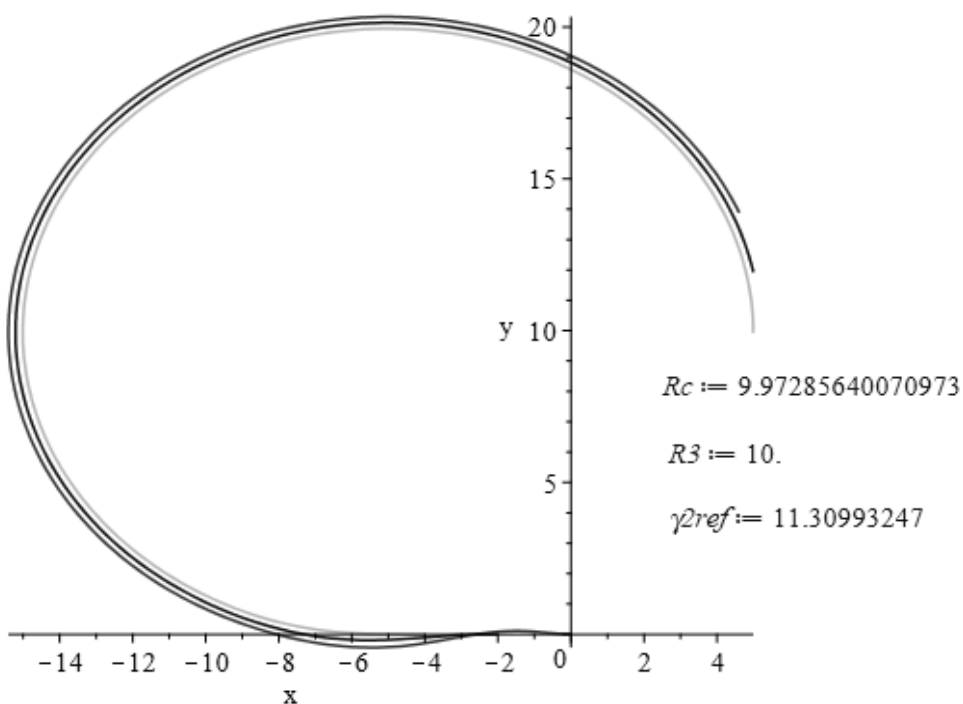


Рис. 3. Траектория движения автопоезда при заданном радиусе окружности, по которой будет двигаться центр опорной оси второго полуприцепа



### 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При начальных условиях (условия Коши для СДУ), равных ориентационным углам тягача и полуприцепов, равных соответственно  $0, \pi/10$  и  $-\pi/5 - \pi/5$ , получены фазовые портреты их траекторий движения (рис. 4).

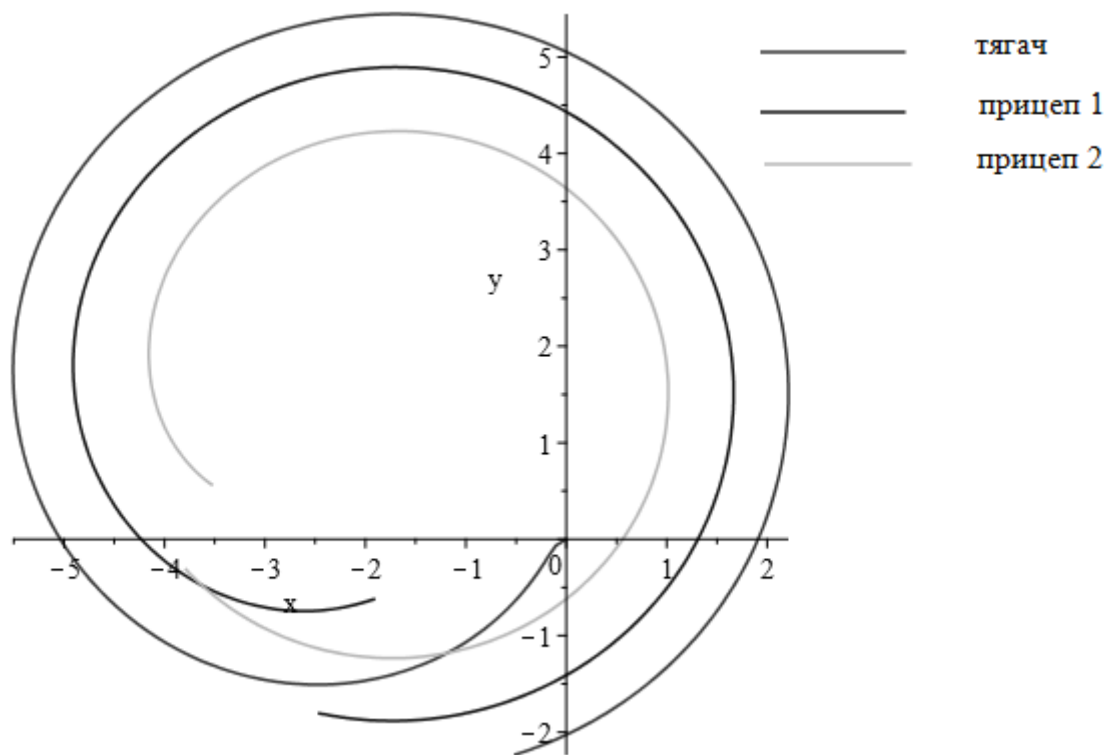


Рис. 4. Траектории движения тягача и прицепов

Траектория тягача получена как результат численного интегрирования (1), а координаты траектории полуприцепов вычислены исходя из голономных связей:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - L_2 \cdot \cos(\theta_2), \\
 y_2 &= y_1 - L_2 \cdot \sin(\theta_2), \\
 x_3 &= x_1 - L_2 \cdot \cos(\theta_2) - L_3 \cdot \cos(\theta_3), \\
 y_3 &= y_1 - L_2 \cdot \sin(\theta_2) - L_3 \cdot \sin(\theta_3).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

При этом углы складывания асимптотически сходятся к требуемым (желаемый –  $36^\circ$ , вычисленный –  $\sim 30.45^\circ$ ), что изображено на рис. 5 и 6.

Для численного моделирования желаемый угол складывания для второго прицепа задан значением  $\pi/5$ , длины тягача и полуприцепов, соответственно – 1, 2 и 2 м при скорости –1 м/с. Коэффициенты для бэкстеппинга  $k_1 = 0,4$ ,  $k_2 = 10$ , для Ляпунова –  $k = 2$ . С этими параметрами достигается приемлемое практически одинаковое управление, показанное на рис. 7.

При этом уравнение асимптоты  $\varphi_{ref} = \arctg(L_1 \sin(\gamma_{1ref})/L_2)$  (рис. 7) получено из условия равенства производных по ориентационным углам тягача и первого прицепа из уравнения (1).

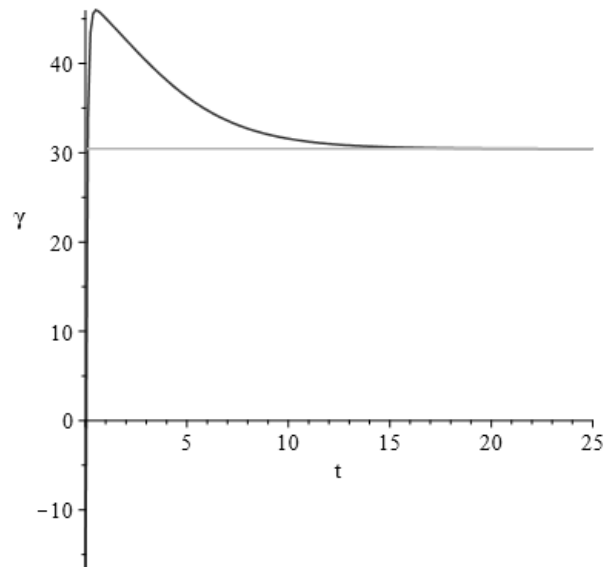


Рис. 5. Стабилизация угла складывания между тягачом и полуприцепом

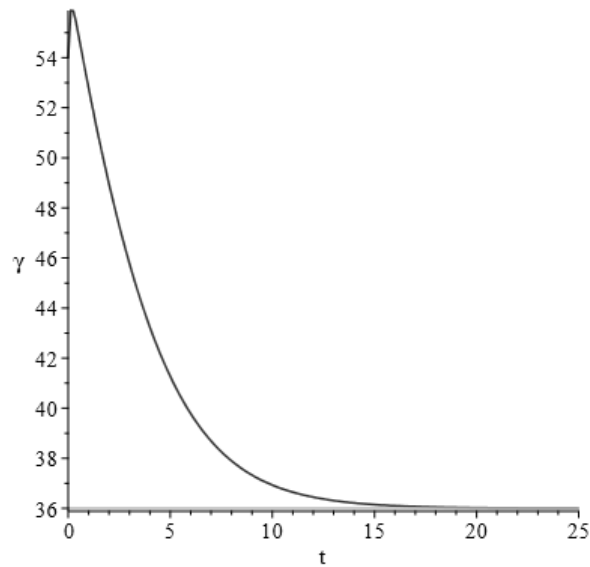


Рис. 6. Стабилизация угла складывания между полуприцепами

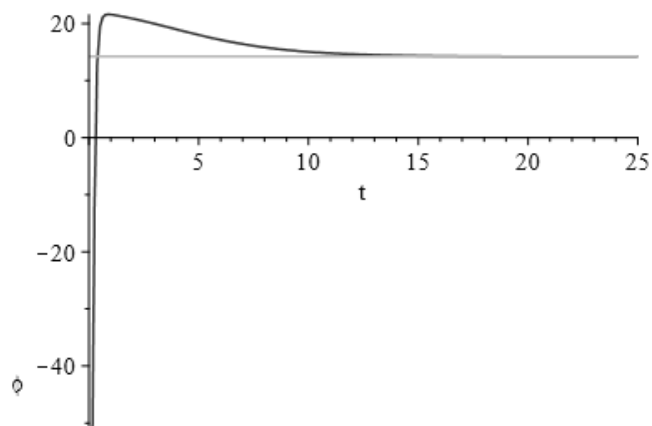


Рис. 7. Динамика изменения управления автопоездом

Исследование переходных процессов при различных скоростях показало, что с увеличением модуля скорости они носят характер затухающих колебаний. На рис. 8 изображен такой процесс для угла складывания между прицепом и тягачом при скоростях  $v = -1$  м/с и  $v = -15$  м/с.

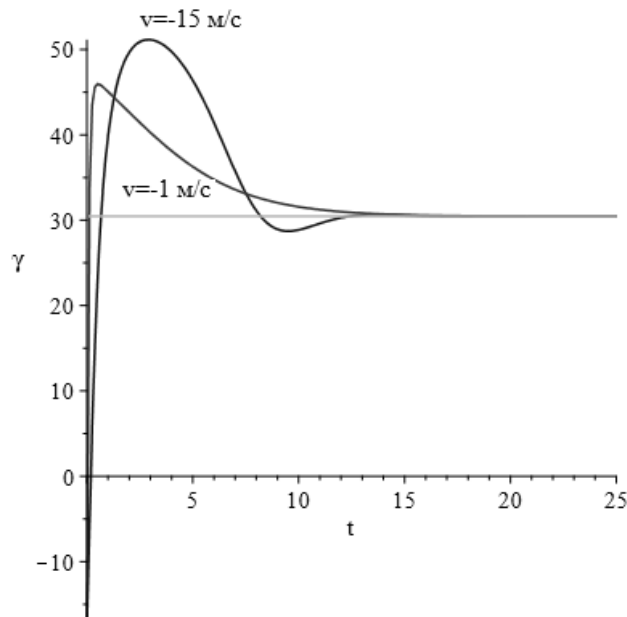


Рис. 8. Динамика изменения угла складывания между прицепом и тягачом при различных скоростях

### ВЫВОДЫ

1. Выполнен обзор существующих комплексов теоретических и эмпирических методов, сочетание которых дает возможность с наибольшей достоверностью исследовать изучаемый объект с целью выбора оптимального математического аппарата, для достижения цели – синтеза законов управления для реверсного движения автопоезда.
2. Реализован синтез таких законов с использованием метода бэкстеппинга и прямого метода Ляпунова, с применением системы Maple для выполнения промежуточных расчетов и численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.
3. Разработана возможность сравнения фазовых портретов при применении различных законов управления с возможностью тонкой настройки их регуляторов и, как следствие этого, получено оптимальное управление для обоих законов.
4. Синтезирована система управления для следования автопоезда по маршрутной кривой, заданной радиусом ее кривизны.

Практическая ценность данного исследования состоит в том, что синтезированные законы управления уже сейчас можно применить для программного управления роботопоездом – такая робототехническая установка находится в стадии реализации.

Предметом дальнейших исследований будет синтез законов управления для обеспечения стабильного прямолинейного движения с заданным ориентационным углом с целью создания машины Дубинса для решения задачи достижения цели, а также разработка соответствующих контроллеров для «off-axle hitching» модели сцепки (с выносом). Также применение метода бэкстеппинга, очевидно, позволит выполнить синтез управления для системы с большим количеством полуприцепов.

### Благодарности

Вербицкому Владимиру Григорьевичу, д. ф.-м. н.

Мальшу Евгению Николаевичу

### ЛИТЕРАТУРА

1. Tatievskiy D. N. The synthesis of steering rules for stabilizing road train reverse motion to solve the task of reaching a set goal. *Technology Transfer: fundamental principles and innovative technical solutions*. 2017. URL: [www.google.com/url?q=http://eu-jr.eu/tfipits/article/download/482/459&sa=](http://eu-jr.eu/tfipits/article/download/482/459)

- U&ved=0ahUKEwj9lbrCrITZAhUJhaYKHfshDMcQFggYMAE&usg=AOvVaw3VTgy9M9\_z1DKwW2jjahsJ.
2. Michalek M. Tracking control strategy for the standard N-trailer mobile robot – geometrically motivated approach. Poland, Poznan University of Technology (PUT). URL: <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
  3. Rouchon P., Fliess M., L'evine J., Martin P. Flatness and motion planning: the car with n trailers. France, Decision and Control. URL: <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/publications/PR1993/ECC93.pdf>.
  4. Richard M., Shankar Sastry S. Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. *IEEE Transactions on automatic control*. 1993. Vol. 38, № 5. P. 700–716. URL: <https://authors.library.caltech.edu/7315/1/MURieetac93.pdf>.
  5. Cheng J., Wang B., Zhang Y., Xu Y. Backward Path Tracking Control for Mobile Robot with Three Trailers. China, School of Electrical Engineering, University of Jinan. URL: [http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030\\_smc 2016.pdf](http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030_smc 2016.pdf).
  6. Maciej M. Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching. Poland, *International Journal of Control*. 2012. Vol. 85. P. 502–521. URL: <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
  7. Evestedt N., Ljungqvist O., Axehill D. Motion planning for a reversing general 2-trailer configuration using Closed-Loop. *RRT, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016. P. 3690–3697. URL: <https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1066727/FULLTEXT01.pdf>.
  8. Ardentov A. A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation. Russia, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Program Systems Institute of RAS. URL: <https://arxiv.org/pdf/1612.01344.pdf>.
  9. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. О качественном анализе одной модели транспортных машин. *Прикладная механика*. 2018. № 2. С. 110–115.
  10. Ojha A. V., Khandelwal A. Control of non-linear system using backstepping. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. URL: <http://esatjournals.net/ijret/2015v04/i05/IJRET20150405111.pdf>.
  11. Bouadi H., Mora-Camino F. Adaptive Backstepping for Trajectory Tracking of Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems. *International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*. URL: <https://hal.inria.fr/file/index/docid/938519/filename/338.pdf>.
  12. Чебыкин Д. В. Backstepping – метод синтеза управления для нелинейных объектов. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Информационные технологии, телекоммуникации и системы управления». 2015. С. 248–254. URL: [http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu\\_2015\\_41.pdf](http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu_2015_41.pdf).
  13. Ляпунов А. М. Собрание трудов: в 6 т. Москва: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2.

#### REFERENCE

1. Tatievskiy, D. N. (2017). The synthesis of steering rules for stabilizing road train reverse motion to solve the task of reaching a set goal. Technology Transfer: fundamental principles and innovative technical solutions. Retrieved from [www.google.com/url?q=http://eu-jr.eu/ttfpits/article/download/482/459&sa=U&ved=0ahUKEwj9lbrCrITZAhUJhaYKHfshDMcQFggYMAE&usg=AOvVaw3VTgy9M9\\_z1DKwW2jjahsJ](http://www.google.com/url?q=http://eu-jr.eu/ttfpits/article/download/482/459&sa=U&ved=0ahUKEwj9lbrCrITZAhUJhaYKHfshDMcQFggYMAE&usg=AOvVaw3VTgy9M9_z1DKwW2jjahsJ).
2. Michalek, M. Tracking control strategy for the standard N-trailer mobile robot – geometrically motivated approach. Poland, Poznan University of Technology (PUT). Retrieved from <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
3. Rouchon, P., Fliess, M., L'evine, J. & Martin, P. Flatness and motion planning: the car with n trailers. France, Decision and Control. Retrieved from <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/publications/PR1993/ECC93.pdf>.
4. Richard, M. & Shankar Sastry, S. (1993). Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 38, No. 5, pp. 700-716. Retrieved from <https://authors.library.caltech.edu/7315/1/MURieetac93.pdf>.
5. Cheng, J., Wang, B., Zhang, Y. & Xu, Y. Backward Path Tracking Control for Mobile Robot with Three Trailers. China, School of Electrical Engineering, University of Jinan. Retrieved from [http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030\\_smc 2016.pdf](http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030_smc 2016.pdf).

6. Maciej, M. (2012). Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching. Poland, International Journal of Control, Vol. 85, pp. 502-521. Retrieved from <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONT rackingVFORoMoCo.pdf>.
7. Evestedt, N., Ljungqvist, O. & Axehill, D. (2016). Motion planning for a reversing general 2-trailer configuration using Closed-Loop. RRT, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), pp. 3690-3697. Retrieved from <https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1066727/FULLTEXT01.pdf>.
8. Ardentov, A. A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation. Russia, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Program Systems Institute of RAS. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1612.01344.pdf>.
9. Martynyuk, A. A. & Nikitina, N. V. (2018). About qualitative analysis of one model of transport vehicles. Applied mechanics, No. 2, pp. 110-115.
10. Ojha, A. V. & Khandelwal, A. Control of non-linear system using backstepping. International Journal of Research in Engineering and Technology. Retrieved from <http://esatjournals.net/ijret/2015v04/i05/IJRET20150405111.pdf>.
11. Bouadi, H. & Mora-Camino, F. Adaptive Backstepping for Trajectory Tracking of Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems. International Symposium on Computational Intelligence and Informatics. Retrieved from <https://hal.inria.fr/file/index/docid/938519/ filename/338.pdf>.
12. Chebykin, D. V. (2015). Backstepping – method of control synthesis for nonlinear objects. International conference of students, graduate students and young scientists “Information technology, telecommunications and management systems”, pp. 248-254. Retrieved from [http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu\\_2015\\_41.pdf](http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu_2015_41.pdf).
13. Lyapunov, A. M. (1956). Collection of works in 6 volumes. Moscow: Izd-vo AN SSSR. Vol. 2.

УДК 004.942: 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-14

## ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

<sup>1</sup>Халанчук Л. В., аспірант, <sup>2</sup>Чопоров С. В., к. т. н., доцент

<sup>1</sup>Таврійський державний агротехнологічний університет,  
просп. Б. Хмельницького, 18, м. Мелітополь, 72300, Україна

<sup>1,2</sup>Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних методів побудови структурованих і блочно-структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів. Наведено визначення дискретної моделі (сітки) геометричного об'єкта, її типів та різновидів. Описано загальну послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів, рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки, спеціальні програмні засоби для генерації сіток.

Наведено визначення та канонічні форми еліптичного, параболічного та гіперболічного типів диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. Описано алгебраїчні, еліптичні та гіперболічні методи побудови структурованих сіток, розглянуто чисельні методи на прикладі методу скінченних різниць.

Розглянуто приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми НАСА0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з авіонавтики (НАСА), для рівняння Пуассона з різними значеннями параметрів. Визначено переваги і недоліки структурованих сіток. Наведено широке коло практичного застосування методів генерації дискретних моделей.

*Ключові слова:* дискретна модель, структурована сітка, блочно-структурована сітка, диференціальні рівняння, еліптичний метод, гіперболічний метод.