УДК 517.944 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-15

ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

[1]Хома Г. П., д. ф.-м. н., професор, [2]Хома-Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
[1]Чорний В. З., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна*

[2]*Тернопільський національний економічний університет, вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна*

sv_khoma@ukr.net, vzch@ukr.net

При дослідженні розв’язків квазілінійних рівнянь гіперболічного типу другого порядку асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського завжди доводилося враховувати нульові за просторовою змінною крайові умови шуканого розв’язку незбуреного квазілінійного рівняння. При розгляді ряду технічних проблем також поставало питання, щоб знайдені розв’язки були періодичними. У зв’язку з цим виникла проблема дослідження крайових T-періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку, права частина яких містить ε – малий параметр.

Цьому питанню присвячено багато робіт, як українських, так і закордонних математиків, основним недоліком яких, на нашу думку, є використання методу відшукання розв’язку за допомогою тригонометричного ряду Фур’є. У 1984 році вперше чеськими математиками О. Вейводою та М. Штедри було зазначено, що дану проблему можна вирішити аналітичним методом, не вимагаючи додаткових умов при диференціюванні рядів Фур’є і не розв’язуючи зчисленну множину звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У цій роботі досліджується нова постановка задачі: як провести математичне моделювання розв’язку задачі $u_{tt}-a^2u_{xx}=g(x,t)+\varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+T)=u(x,t)$?

Розв’язок вказаного рівняння складається із суми двох розв’язків: розв’язку незбуреного рівняння ($\varepsilon=0$) та розв’язку збуреного рівняння ($\varepsilon\neq 0$), права частина якого містить T-періодичну по t функцію $F(x,t,u,u_t,u_x)$.

Щоб провести математичне моделювання розв’язку незбуреного рівняння, нами у цій роботі вперше знайдено аналітичну формулу розв’язку крайової T-періодичної задачі для незбуреного рівняння, використовуючи результати монографії Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Гром’яка М. І. [1]. На основі операторів S_{a_1} та S_{a_2} знайдено точну аналітичну формулу розв’язку крайової T-періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду $u_{tt}-a^2u_{xx}=g(x,t)$.

Ключові слова: крайова T-періодична задача, властивості оператора, побудова формули T-періодичного розв’язку, рівняння гіперболічного типу, незбурене рівняння.

ABOUT ONE WAY OF CONSTRUCTION OF T-PERIODIC SOLUTIONS TO HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

[1]Khoma H. P., D. Sc. in Physics and Maths, Professor,
[2]Khoma-Mohylska S. H., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[1]Chornyi V. Z., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor

[1]*Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university, M. Kryvonosa str., 2, Ternopil’, 46027, Ukraine,*

[2]*Ternopil national economic university, Lvivs’ka str., 11, Ternopil’, 46020, Ukraine*

sv_khoma@ukr.net, vzch@ukr.net

To research the solutions of quasi-linear second-order hyperbolic equations by the asymptotic Krylov-Boholubov-Mytropolskyi method, one always had to take into account the zero space variable boundary conditions of the solutions to an undisturbed quasi-linear equation. In considering a number of technical problems, the question also arose that the found solutions were periodic. In this connection, a problem is in the study of boundary-value T-periodic problems for hyperbolic the second order equations, the right side of which contains ε (ε is a small parameter).

A lot of works of both Ukrainian mathematicians and foreign ones are devoted to this problem. The main disadvantage, in our opinion, is the method for finding a solution using the Fourier trigonometric series. In 1984, for the first time, the Czech Mathematicians O. Veivoda and M. Shtedry stated that this problem can be solved by analytical method without requiring the additional conditions for the differentiation of Fourier series and without solving a number of the ordinary second order differential equations.

In this paper, a new problem statement is investigated: how to conduct a mathematical modeling of the solution of the problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,t+T) = u(x,t)$?

The solution of this equation consists of the sum of two solutions: the solution of the undisturbed equation ($\varepsilon = 0$) and the solution of the disturbed equation ($\varepsilon \neq 0$), the right side of which contains the T-periodic of t function $F(x,t,u,u_t,u_x)$.

To carry out mathematical modeling solution undisturbed equation in this paper we first found an analytical formula for solving of the boundary-value T-periodic problem for the undisturbed equation using the results of the monograph Y. O. Mytropol'skyi, H. P. Khoma and M. I. Hromyak [1]. On the basis of operators S_{a_1} and S_{a_2}, we find an exact analytic formula for the solution to the boundary-value T-periodic problem for a non-homogeneous hyperbolic the second order equation $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$.

Key words: boundary-value T-periodic problem, operator properties, construction of the T-periodic solution formula, hyperbolic type equation, undisturbed equation.

ВСТУП

Дослідження крайових задач з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь другого порядку передбачає накладання додаткових умов на шуканий розв'язок, зокрема умов періодичності чи майже періодичності як за просторовими координатами, так і за часовою змінною. Цій проблемі присвячено ряд робіт. Зокрема, у роботах [2-4] досліджено питання існування періодичних за часовою змінною розв'язків крайових задач з умовами Діріхле для лінійних та нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, а в роботах [5-7] враховані умови Діріхле-Неймана для нелінійних хвильових рівнянь.

Автори робіт [8-11] встановили умови існування єдиного періодичного чи майже періодичного за просторовими координатами та з умовами Діріхле-Неймана за часовою змінною розв'язку крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь із сталими коефіцієнтами у смузі.

Основним недоліком досліджень [4, 5, 8-12], на нашу думку, є відшукання розв'язку за допомогою тригонометричного ряду Фур'є $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$, де $u_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ – шукані T-періодичні функції.

У 1984 році вперше вказано [13], що цю проблему можна вирішити аналітичним методом, не вимагаючи додаткових умов при диференціюванні рядів Фур'є і не розв'язуючи зчисленну множину звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. У статті [14] встановлено умови існування 2π-періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу.

У цій статті нами вперше знайдено аналітичну формулу розв'язку крайової T-періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \ t \in \mathbf{R}.$$

Для цього використано результати робіт [1, 2].

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

C_π – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u\in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l\, u\in C_\pi$.

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$ разом із похідною по t.

Q_T – простір функцій $g(x,t)$, які задовольняють на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$ умову періодичності по t, тобто $g(x,t+T)=g(x,t)$.

$L(X,Y)$ – простір лінійних відображень X в Y.

$A_2=\{g : g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)\}$.

a – число.

$\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо таку функцію [1, с. 26] (формула 9.6):

$$u_1^a(x,t)=-\frac{1}{2a}\int_0^x d\xi\int_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv\left(S_{a_1}g\right)(x,t),$$

де $\gamma(x,\xi)=\dfrac{x-\xi}{a}$.

Обчислимо перші й другі частинні похідні по x і t. Маємо

$$\frac{\partial u_1^a(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{2a}\int_0^x\left\{g\left(\xi,\alpha(x,t,\xi)\right)\cdot\frac{1}{a}+g\left(\xi,\beta(x,t,\xi)\right)\cdot\frac{1}{a}\right\}d\xi,$$

де $\alpha(x,t,\xi)=t+\dfrac{x-\xi}{a}$; $\beta(x,t,\xi)=t-\dfrac{x-\xi}{a}$.

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial x^2}=-\frac{1}{a^2}g(x,t)-\frac{1}{2a^2}\int_0^x\left\{\frac{\partial g\left(\xi,\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{a}-\frac{\partial g\left(\xi,\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{a}\right\}d\xi;$$

$$\frac{\partial u_1^a(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2a}\int_0^x\left\{g\left(\xi,\alpha(x,t,\xi)\right)-g\left(\xi,\beta(x,t,\xi)\right)\right\}d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{2a}\int_0^x\left\{\frac{\partial g}{\partial\alpha}\cdot 1-\frac{\partial g}{\partial\beta}\cdot 1\right\}d\xi.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1^a(x,t)}{\partial x^2}=g(x,t).$$

Далі покажемо, що функція $u_1^a(x,t)$ для кожної функції $g\in C_\pi\bigcap Q_T$ – періодичної по t, є також T-періодична по t.

На основі формули $u_1^a\left(x,t\right)=-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g\left(\xi,\tau\right)d\tau$, де $\gamma\left(x,\xi\right)=\dfrac{x-\xi}{a}$, маємо

$$u_1^a\left(x,t+T\right)=-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+T-\gamma(x,\xi)}^{t+T+\gamma(x,\xi)} g\left(\xi,\tau\right)d\tau .$$

З останньої рівності після виконання заміни $\tau=\theta+T$, $t-\gamma\left(x,t\right)\le\theta\le t+\gamma\left(x,t\right)$, одержуємо

$$u_1^a\left(x,t+T\right)=-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g\left(\xi,\theta+T\right)d\theta=u_1^a\left(x,t\right).$$

Розглянемо іншу функцію [1, с. 26] (формула 9.8):

$$u_2^a\left(x,t\right)=-\frac{1}{2a}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+\gamma(x,\xi)}^{t-\gamma(x,\xi)} g\left(\xi,\tau\right)d\tau\equiv\left(S_{a_2}g\right)\left(x,t\right)$$

або

$$u_2^a\left(x,t\right)=-\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x d\xi \int\limits_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)} g\left(\xi,\tau\right)d\tau .$$

Знайдемо

$$\frac{\partial u_2^a\left(x,t\right)}{\partial x}==-\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x\left\{g\left(\xi,t+\gamma\left(x,\xi\right)\right)\cdot\frac{1}{a}+g\left(\xi,t-\gamma\left(x,\xi\right)\right)\cdot\frac{1}{a}\right\}d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a\left(x,t\right)}{\partial x^2}=-\frac{1}{2a^3}\int\limits_\pi^x\left\{\frac{\partial g}{\partial\alpha}-\frac{\partial g}{\partial\beta}\right\}d\xi-\frac{1}{a^2}g\left(x,t\right);$$

$$\frac{\partial u_2^a\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x\left\{g\left(\xi,t+\gamma\left(x,\xi\right)\right)\cdot 1-g\left(\xi,t-\gamma\left(x,\xi\right)\right)\cdot 1\right\}d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a\left(x,t\right)}{\partial t^2}=-\frac{1}{2a}\int\limits_\pi^x\left\{\frac{\partial g}{\partial\alpha}-\frac{\partial g}{\partial\beta}\right\}d\xi .$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_2^a\left(x,t\right)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_2^a\left(x,t\right)}{\partial x^2}=g\left(x,t\right).$$

Аналогічно доводимо, що для кожної функції $g\in C_\pi\bigcap Q_T$ функція $u_2^a\left(x,t\right)$ – T-періодична по t.

Висновок: обидві функції $u_1^a\left(x,t\right)$ і $u_2^a\left(x,t\right)$ при $g\in G_{\pi\,t}\bigcap Q_T$ – часткові T-періодичні класичні розв’язки T-періодичної задачі:

$$u_{t\,t}-a^2u_{x\,x}=g\left(x,t\right),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R},$$

$$u\left(x,t+T\right)=u\left(x,t\right),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R}.$$

Далі розглянемо таку функцію:

$$u^a(x,t)=\frac{1}{2}\left(S_{a_1}g+S_{a_2}g\right)(x,t)\equiv\left(S_a g\right)(x,t)$$

або

$$u^a(x,t)=\frac{1}{2}\left(S_{a_1}g+S_{a_2}g\right)(x,t)\equiv$$

$$\equiv-\frac{1}{4a}\int_0^x d\xi\int_{t-\gamma(x,\xi)}^{t+\gamma(x,\xi)}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4a}\int_x^\pi d\xi\int_{t+\gamma(x,\xi)}^{t-\gamma(x,\xi)}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv\left(S_a g\right)(x,t).$$

Теорема 1. *Для* $g\in G_{\pi t}\bigcap Q_T$ *функція* $u^a(x,t)=\left(S_a g\right)(x,t)$ *є частковим* T *-періодичним по* t *класичним розв'язком такої* T *-періодичної задачі:*

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2}=g(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u^a(x,t+T)=u^a(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

Розглянемо тепер функцію:

$$\tilde{u}^a(x,t)=\left(S_a g\right)(x,t)+\left(\tilde{S}_a g\right)(x,t), \tag{3}$$

де

$$\left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)=\frac{\pi-x}{4\pi a}\int_0^\pi d\xi\int_{t+\gamma(0,\xi)}^{t-\gamma(0,\xi)}g(\xi,\tau)\,d\tau+\frac{x}{4\pi a}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\gamma(\pi,\xi)}^{t+\gamma(\pi,\xi)}g(\xi,\tau)\,d\tau,\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R}.$$

Теорема 2. *Для функції* $g\in C_\pi$ *функція* $\tilde{u}^a(x,t)$*, означена формулою (3), задовольняє крайові умови*

$$\tilde{u}^a(0,t)=\tilde{u}^a(\pi,t)=0,\quad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

Доведення. Запишемо розгорнуту формулу (3)

$$\tilde{u}^a(x,t)=-\frac{1}{4a}\int_0^x d\xi\int_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4a}\int_x^\pi d\xi\int_{t+\frac{x-\xi}{a}}^{t-\frac{x-\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi a}\int_0^\pi d\xi\int_{t+\frac{\xi}{a}}^{t-\frac{\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau+\frac{x}{4\pi a}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv I_1(x,t)+I_2(x,t)+I_3(x,t)+I_4(x,t).$$

Покладаючи у записану формулу спочатку $x=0$, знаходимо

$$I_1(0,t)=0,\quad I_4(0,t)=0,$$

$$I_2(0,t)+I_3(0,t)=-\frac{1}{4a}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\frac{\xi}{a}}^{t+\frac{\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau+\frac{1}{4a}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\frac{\xi}{a}}^{t+\frac{\xi}{a}}g(\xi,\tau)\,d\tau=0,\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

Звідси одержуємо $\tilde{u}^a(0,t)=0,\ \forall t\in\mathbf{R}$.

Тепер при $x=\pi$ знаходимо

$$I_1(\pi,t) = -\frac{1}{4a}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}} g(\xi,\tau)d\tau,$$

$$I_2(\pi,t) = 0, \quad I_3(\pi,t) = 0,$$

$$I_4(\pi,t) = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}} g(\xi,\tau)d\tau.$$

Звідси одержуємо

$$I_1(\pi,t) + I_4(\pi,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

що у сумі $\sum_{i=1}^{4} I_i(\pi,t) = 0$, тобто

$$\tilde{u}^a(\pi,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Для кожної T-періодичної функції* $g(x,t)$ *функція* $\tilde{u}^a(x,t)$ *є* T *-періодичною по* t, *тобто*

$$\tilde{u}^a(x,t+T) = \tilde{u}^a(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Доведення теореми 3 випливає з такого твердження:

Лема. Якщо функція $K(x,t)$ визначається таким інтегралом

$$K(x,t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g(x,\tau)d\tau,$$

то для кожної функції $g(x,t)$ – T-періодичної по t, тобто $g(x,t+T) = g(x,t)$, сама функція $K(x,t)$ є T-періодичною по *t*.

Доведення. Справді, зробивши заміну змінної $\tau = T + \theta$ у наступному інтегралі, маємо

$$K(x,t+T) = \int_{t-T+\alpha}^{t+T+\alpha} g(x,\tau)\,d\tau = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g(x,\theta+T)d\theta = K(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Наслідком теорем 2 і 3 є теорема 4.

Теорема 4. *Функція* $\tilde{u}^a(x,t)$, *означена формулою (3), при* $g \in C_\pi \bigcap Q_T$ *задовольняє крайові та періодичні по t умови (4), (5):*

$$\tilde{u}^a(0,t) = \tilde{u}^a(\pi,t) = 0, \quad \tilde{u}^a(x,t+T) = \tilde{u}^a(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Зауваження 1. Взагалі кажучи, функція $\tilde{u}^a(x,t)$ не є класичним розв'язком рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, бо функція $(\tilde{S}_a g)(x,t)$ не є розв'язком однорідного рівняння

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. Хоча $\dfrac{\partial^2 \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)}{\partial x^2} \equiv 0$, але $\dfrac{\partial^2 \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)}{\partial t^2}$ не для кожної функції $g(x,t)$ дорівнює нулеві. Для цього потрібні нові дослідження.

ВИСНОВКИ

1. На основі результатів роботи [1] розглянуто оператори S_{a_1} та S_{a_2} (с. 26, формули (9.6), (9.8), на основі яких будується вказаний результат).
2. Введено нові оператори S_a та $\tilde{S}_a$ для дослідження T-періодичних по t розв'язків гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $g(x,t+T) = g(x,t)$.
3. Доведено, що функція $\tilde{u}^a(x,t) = (S_a g)(x,t) + \left(\tilde{S}_a g\right)(x,t)$ ще не гарантує, чи буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^a - a^2 u_{xx}^a = g(x,t)$, враховуючи властивості оператора $\tilde{S}_a$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
2. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. І *Український математичний журнал.* 2005. Т. 57, № 7. С. 912–921.
3. Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г. Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. *Доповіді НАН України*. 2008. № 5. С. 30–36.
4. Gentile G., Mastropietro V., Procesi M. Periodic solution for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions. *Comm. Math. Phys*. 2005. Vol. 256, № 2. P. 437–490.
5. Павленко В. Н., Петраш Т. А. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2012. Т. 18, № 2. С. 199–204.
6. Рудаков И. А. Нетривиальные периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41, № 10. С. 1392–1399.
7. Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле. *Известия вузов. Математика*. 2007. Т. 537, № 2. С. 46–55.
8. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка, 2002. 416 с.
9. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2012. Вип. 10. С. 7–14.
10. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 3. С. 15–28.
11. Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку у смузі. *Вісник Національного університуту «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки.* 2013. Вип. 768, № 768. С. 26–33.
12. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math*. 1967. Vol. 20, № 1. P. 145–205.

13. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений. *Дифференциальные уравнения*. 1984. Т. 20, № 10. С. 1733–1739.

14. Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г. Умови існування 2π-періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 257–264.

REFERENCES

1. Mitropolskiy, Yu. A., Khoma, G. P. & Gromyak, M. I. (1984). Asymptotic methods for investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Naukova dumka.

2. Mytropolskyy, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Conditions for the existence of solutions of a periodic boundary-value problem for an inhomogeneous linear hyperbolical equation of the second order. I". Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 57, No. 7, pp. 912-921.

3. Mytropolskyy, Yu. O., Khoma, H. P. & Khoma-Mohylska, S. H. (2008). Solutions to the boundary-value periodic problem for the nonhomogeneous linear hyperbolic the second order equation. Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrayiny, No. 5, pp. 30-36.

4. Gentile, G., Mastropietro, V. & Procesi, M. (2005). Periodic solution for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions. Comm. Math. Phys, Vol. 256, No. 2, pp. 437-490.

5. Pavlenko, V. N. & Petrash, T. A. (2012). Periodic solutions of the equation of oscillations of the string with boundary conditions of the Neumann and Dirichlet and discontinuous nonlinearity. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, Vol. 18, No. 2, pp. 199-204.

6. Rudakov, I. A. (2005). A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions. Differentsialnyye Uravneniya, Vol. 41, No. 10, pp. 1392-1399.

7. Rudakov, I. A. (2007). Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions. Russian Math, Vol. 537, No. 2, pp. 44-52.

8. Ptashnyk, B. Yo., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Nonlocal boundary-value problems for equations with partial derivatives. Kyiv: Naukova dumka.

9. Ptashnyk, B. Yo. & Repetylo, S. M. (2012). Dirichlet-Neumann problem for a system of equations with partial derivatives with constant coefficients. Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Vol. 10, pp. 7-14.

10. Ptashnyk, B. Yo. & Repetylo, S. M. (2013). Dirichlet-Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients. Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya, Vol. 56, No. 3, pp. 15-28.

11. Repetylo, S. M. (2013). The Dirichlet-Neumann problem for second order linear hyperbolic equations in a strip. Journal of National University "Lvivska Politechnika" "Physical & mathematical sciences", Vol. 768, No. 768, pp. 26-33.

12. Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 20, No. 1, pp. 145-205.

13. Veyvoda, O. & Shtedry, M. (1984). The existence of classical periodic solutions of the wave equation: The connection between the theoretic-numerical nature of a period and the geometric properties of solutions. Differentsialnyye Uravneniya, Vol. XX, No. 10, pp. 1733-1739.

14. Khoma, N. H., Khoma-Mohylska, S. H. & Khokhlova, L. H. (2016). Existence condition of 2π-periodic smooth solution to the quasi-linear equation of hyperbolic type. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: zbirnyk naukovykh statey. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 257-264.