УДК 531.381

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

[1]Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., профессор, [2]Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., профессор, [2]Козаченко Т. А., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Институт проблем механики РАН, просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526, Россия*

[2]*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65029, Украина*

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Рассматриваются быстрые возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием возмущений различной природы. Уравнения возмущенного движения приводятся к виду, допускающему применение метода усреднения. Проведена процедура усреднения уравнений для медленных переменных. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: возмущенное движение, случай Лагранжа, метод усреднения, момент.

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЕВОЛЮЦІЇ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ЗБУРЮЮЧИХ МОМЕНТІВ

[1]Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., професор, [2]Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., професор, [2]Козаченко Т. О., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Інститут проблем механіки РАН, просп. Вернадського, 101, корп. 1, Москва, 119526, Росія*

[2]*Одеська державна академія будівництва та архітектури, вул. Дідріхсона, 4, Одеса, 65029, Україна*

Розглядаються швидкі збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією збурень різної природи. Рівняння збуреного руху зводяться до вигляду, що допускає застосування методу усереднення. Проведена процедура усереднення рівнянь руху для повільних змінних. Розглянуто приклади.

Ключові слова: збурений рух, випадок Лагранжа, метод усереднення, момент.

SOME PROBLEMS OF EVOLUTION OF MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF PERTURBATION TORQUES

[1]Akulenko L. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
[2]Leshchenko D. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
[3]Kozachenko T. A., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

[1]*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadskogo prosp., 101, block 1, Moscow, 119526, Russia*

[2]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Didrikhson str., 4, Odessa, 65029, Ukraine*

The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point continues to attract the attention of researches. In the aspect of applications, the analysis of rotational motions of the bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of the entry of flying vehicles into the atmosphere, the motion of rotating projectile and gyroscopy. In many cases, the motion in the Lagrange case can be regarded as a generating motion of the rigid body. In this case the body is assumed to have a fixed point and to be in the gravitational field, with the center of mass of the body and the fixed point both lying on the dynamic symmetry axes of the body. A restoring torque, analogues to the moment of the gravity forces, is created by the aerodynamic forces acting on the body in the gas flow. Therefore, the motions, close to the Lagrange case, have been investigated in a number of works on the aircraft dynamics, where various perturbation torques were taken into account in addition to the restoring torque.

In our pager angular motions of a rigid body subjected to perturbation torques of different nature are considered by means of averaging method. Evolution of perturbed Lagrange motion under the influence of small torques is studied. We consider mechanical models of perturbations corresponding motion of the body in a medium with linear dissipation and a torque that is constant in the attached axes.

Key words: perturbed motion, Lagrange top, averaging method, torque.

ВВЕДЕНИЕ

Объекты в природе и технике (летательные аппараты, космические и подводные корабли, небесные тела) с учетом действующих возмущений и их внутренней структуры могут быть смоделированы в виде одного твердого тела. При рассмотрении движения этих объектов возникает необходимость исследований вращательных движений твердых тел под действием внешних и внутренних моментов сил. Результаты исследования движения вокруг центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с гиперзвуковой скоростью [1], показывают, что эта задача может быть приведена к задаче, близкой к случаю Лагранжа. В работе [2] рассматривается движение неуправляемого тела около центра масс при полете в атмосфере. При исследовании вращательного движения в атмосфере осесимметричного тела с малой асимметрией опираются на аналогичный по форме записи уравнений движения случай Лагранжа движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Изучалось вращательное движение твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического восстанавливающего момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов [3]. При движении осесимметричного намагниченного тела в постоянном поле, близком к регулярной прецессии, уравнения движения спутника с точностью до обозначений совпадают с уравнениями движения гироскопа Лагранжа. Известно, что динамически симметричный спутник с магнитным моментом, направленным по оси динамической симметрии, движется так же, как тяжелое твердое тело в случае Лагранжа.

Гироскоп Лагранжа можно считать динамической моделью спутника с пассивной системой ориентации. Вращение динамически симметричного магнитно-стабилизированного спутника описывается волчком Лагранжа в поле тяжести, медленно меняющемся по величине и направлению.

Показана аналогия между возмущенной задачей о движении волчка Лагранжа в случае потенциальных возмущений и задачей о вращении спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, с учетом влияния магнитного поля Земли.

В работе [4] изучается движение относительно центра масс искусственного спутника, несущего сильный магнит. При исследовании движения тяжелого неуравновешенного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия первые интегралы уравнений движения совпадают с соответствующими первыми интегралами движения твердого тела в случае Лагранжа.

Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследованы в ряде работ, например, [4-16]. В [5] представлен обзор результатов, полученных до 1998 г., в задачах эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа.

В работах [6-8] приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. Исследованы возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при разных порядках малости проекций вектора кинетического момента.

Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием сил трения, обусловленных внешней диссипативной средой [9]. Изучалось асимптотическое поведение движений гироскопа Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента [4, 10, 11].

Рассматривались резонансные эффекты при движении тяжелого динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях, близких к случаю Лагранжа, под действием различных возмущений [12].

Исследовалось движение волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса [13] и влияние быстрых периодических и условно-периодических вибраций точки подвеса на устойчивость стационарных вращений волчка Лагранжа вокруг вертикали [14].

В работе [15] рассматривались устойчивость и стабилизация вращающегося волчка к спящему движению с помощью двух моментов силовых приводов. В [16] для решения уравнений движения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки используются аналитические и численные методы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОЦЕДУРА УСРЕДНЕНИЯ

Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. В нашей задаче момент силы тяжести не рассматривается как возмущающий момент, а относится к невозмущенному движению, которое представляет собой движение в случае Лагранжа. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{gathered} A\dot{p}+(C-A)qr=\mu\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1, \\ A\dot{q}+(A-C)pr=-\mu\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2, \\ C\dot{r}=\varepsilon M_3, \quad M_i=M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi), \quad i=1,2,3, \\ \dot{\psi}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\ \dot{\theta}=p\cos\varphi-q\sin\varphi, \quad \dot{\varphi}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Динамические уравнения составлены в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь $p,\ q,\ r$ – проекции вектора угловой скорости на эти оси, $\varepsilon M_i,\ i=1,2,3$ – проекции вектора возмущающих моментов на те же оси; $\psi,\ \theta,\ \varphi$ – углы Эйлера; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений. В частности при $\varepsilon=0$ система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа [7, 17]. В случае тяжелого волчка имеем $\mu=mgl$, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тел; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O, $A\neq C$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом ε, которое будет проводиться методом усреднения [18] на интервале времени порядка ε^{-1}.

В случае невозмущенного движения, первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon=0$ являются величины [7, 17]

$$\begin{gathered} G_z=A\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+Cr\cos\theta=c_1, \\ H=\frac{1}{2}\left[A\left(p^2+q^2\right)+Cr^2\right]+\mu\cos\theta=c_2, \quad r=c_3. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i, $i=1,2,3$ – произвольные постоянные $c_2\geq-\mu$.

Известно в общем случае выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении как функции времени t, интегралов движения (1.2) и произвольной фазовой постоянной β [7, 17]:

$$u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \le u_1 \le u_2 \le 1 \le u_3 < +\infty,$$
$$\alpha = \left[\mu(u_3 - u_1)/(2A)\right]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin\operatorname{am}(\alpha t + \beta, k), \tag{1.3}$$

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \qquad 0 \le k^2 < 1. \tag{1.4}$$

Здесь u – периодическая функция $\alpha t + \beta$ с периодом $K(k)/\alpha$; sn, am – эллиптический синус и амплитуда соответственно [19], k – модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}\left[\left(2H - Cr^2 - 2\mu u\right)\left(1 - u^2\right)A - \left(G_z - Cru\right)^2\right]. \tag{1.5}$$

Соотношения между корнями $Q(u)$ и первыми интегралами (1.2) записываются, согласно теореме Виета, следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2r^2}{2A\mu} \equiv F_1,$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{A\mu} - 1 \equiv F_2, \tag{1.6}$$
$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu} \equiv F_3.$$

Формулы (1.2), (1.3), (1.6) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в случае Лагранжа.

Сделаем следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 << r^2, \quad Cr^2 >> \mu, \tag{1.7}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость r достаточно велика.

Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией T и в первом приближении имеем

$$G_z \approx Cr, \quad H \approx T \approx \frac{1}{2}Cr^2. \tag{1.8}$$

Если твердое тело вращается быстро, то для квадрата модуля эллиптических функций можно записать

$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1} \ll 1. \tag{1.9}$$

При выполнении второго условия (1.7) имеем

$$u_1 \ll u_3, \quad u_2 \ll u_3, \quad u_1 + u_2 \ll u_3. \tag{1.10}$$

Тогда из соотношений (1.6) получим

$$u_3 = F_1, \quad u_1u_2 = \frac{F_3}{F_1}. \tag{1.11}$$

После ряда преобразований с учетом (1.6) находим выражения для вещественных корней кубического многочлена (1.5)

$$u_1 = \frac{1}{2F_1}\left[F_2 - \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}\right], \quad u_2 = \frac{1}{2F_1}\left[F_2 + \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}\right], \quad u_3 = F_1. \tag{1.12}$$

Далее применяется подход к процедуре усреднения, разработанный в [6, 7]. Данный подход используется для усреднения системы (1.1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$.

С помощью ряда преобразований первые три динамические уравнения (1.1) приведем к виду [6, 7]:

$$\begin{aligned} &\dot{G}_z = \varepsilon U_1(G_z, H, r, \theta), \quad U_1 = (M_1 \sin\varphi + M_2\cos\varphi)\sin\theta + M_3\cos\theta, \\ &\dot{H} = \varepsilon U_2(G_z, H, r, \theta), \qquad U_2 = M_1 p + M_2 q + M_3 r, \\ &\dot{r} = \varepsilon U_3(G_z, H, r, \theta), \qquad U_3 = C^{-1}M_3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь и в трёх последних кинематических уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (1.2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$ и подставлены в (1.1), (1.13).

Для применения метода усреднения потребуем, чтобы правые части уравнений (1.13) были представлены как функции от медленных переменных G_z, H, r и быстрой переменной θ, были периодическими по фазе угла θ с периодом 2π, и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил (см. (1.2))

$$\begin{aligned} &M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi = M_1^*(G_z, H, r, \theta), \\ &M_1 p + M_2 q = M_2^*(G_z, H, r, \theta), \quad M_3 = M_3^*(G_z, H, r, \theta), \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta). \tag{1.15}$$

Тогда, правые части уравнений (1.13) U_1, U_2, U_3 будут 2π-периодическими функциями фазы угла θ.

Для быстро вращающегося твердого тела при $k^2 \ll 1$ из выражения (1.3) для u получим приближенную формулу

$$u = \cos\theta \approx u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2(\alpha t + \beta). \tag{1.16}$$

Подставим в правые части системы (1.13) быструю переменную θ из выражения (1.16) для невозмущенного движения.

$$\theta \approx \arccos\left[u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2(\alpha t + \beta)\right].$$

Усредняя правые части полученной системы, получим с учетом (1.3), (1.6) усреднённую систему первого приближения:

$$\begin{aligned} &\dot{G}_z = \varepsilon V_1(G_z, H, r), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2(G_z, H, r), \\ &\dot{r} = \varepsilon V_3(G_z, H, r), \quad i = 1, 2, 3, \\ &V_i(G_z, H, r) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} U_i(G_z, H, r, \theta(t))\,dt, \end{aligned} \tag{1.17}$$

На интервале времени порядка ε^{-1} оценка близости решений систем (1.13), (1.17) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения и малого параметра ε, характеризующего величину возмущений [21].

После исследования и решения системы (1.17) для G_z, H, r медленные переменные u_i, $i = 1, 2, 3$ определяются по формулам (1.12).

2. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СУММЫ ПОСТОЯННОГО И ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТОВ

В качестве примера предложенной методики исследуем совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Возмущающие моменты εM_i, $i=1,2,3$ имеют вид [20, 22]:

$$M_1=-ap,\quad M_2=-aq,\quad M_3=-br-\eta,\quad a,b>0. \tag{2.1}$$

Здесь a, b – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела, $\eta=\mathrm{const}$.

Моменты (2.1) удовлетворяют условиям (1.13), (1.15), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ. При данных возмущениях система (1.13) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{G}_z=-\varepsilon\left[a\left(p\sin\varphi+q\cos\varphi\right)\sin\theta+br\cos\theta\right]-\varepsilon\eta\cos\theta,\\ \dot{H}=-\varepsilon\left[a\left(p^2+q^2\right)+br^2\right]-\varepsilon\eta r,\\ \dot{r}=-\varepsilon C^{-1}br-\varepsilon\eta C^{-1}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Проинтегрировав третье уравнение (2.2), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения, $\tau=\varepsilon t$ – медленное время):

$$r=\left(r_0+\eta b^{-1}\right)\exp(-bC^{-1}\tau)-\eta b^{-1}. \tag{2.3}$$

В первых двух уравнениях (2.2) выполним усреднение согласно (1.17), подставляя вместо r его выражение (2.3). Отметим, что с учетом (1.8), (1.11)

$$\frac{1}{2}\left(u_1+u_2\right)=\frac{F_2}{2F_1}\sim 1. \tag{2.4}$$

После ряда преобразований усредненная система первого приближения принимает вид

$$\begin{gathered}G_z'+aA^{-1}G_z=\left(aA^{-1}C-b\right)\left(r_0+\eta b^{-1}\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)-\eta b^{-1}aA^{-1}C,\\ H'+2aA^{-1}H=\left(aA^{-1}C-b\right)\left(r_0+\eta b^{-1}\right)^2\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right)-\\ -\eta\left(r_0+\eta b^{-1}\right)\left(2b^{-1}aA^{-1}C-1\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)+\eta^2b^{-2}aA^{-1}C+2\mu aA^{-1}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Решение системы (2.5) записывается следующим образом

$$\begin{gathered}G_z=\left(G_{z0}-Cr_0\right)\exp\left(-aA^{-1}\tau\right)+C\left(r_0+\eta b^{-1}\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)-\eta Cb^{-1},\\ H=\left(H_0-\frac{1}{2}Cr_0^2-\mu\right)\exp\left(-2aA^{-1}\tau\right)+\frac{1}{2}C\left(r_0+\eta b^{-1}\right)^2\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right)-\\ -\eta Cb^{-1}\left(r_0+\eta b^{-1}\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)+\frac{1}{2}\eta^2Cb^{-2}+\mu.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь G_{z0}, H_0 – произвольные начальные значения проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль Oz и полной энергии тела.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r и проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz

асимптотически приближаются к значениям $r = -\eta b^{-1}$, $G_z = -\eta C b^{-1}$. Полная энергия H изменяется, асимптотически приближаясь к значению $H = 0.5\eta^2 C b^{-2} + \mu$.

3. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МЕДЛЕННОГО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Возмущающие моменты M_i $(i = 1, 2, 3)$ являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau) > 0, \quad b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{3.1}$$

Здесь $a(\tau)$, $b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (1.13) с учетом (3.1) удовлетворяют условиям используемой методики усреднения и приводятся к виду:

$$\begin{gathered} \dot{G}_z = -\varepsilon\left[\left(a(\tau)p\sin\varphi + a(\tau)q\cos\varphi\right)\sin\theta + b(\tau)r\cos\theta\right], \\ \dot{H} = -\varepsilon\left[a(\tau)\left(p^2+q^2\right) + b(\tau)r^2\right], \\ \dot{r} = -\varepsilon C^{-1} b(\tau) r. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Третье уравнение (3.2) может быть проинтегрировано:

$$r = r_0 \exp\left[-\varepsilon C^{-1}\int_0^t b(\varepsilon t)\,dt\right]. \tag{3.3}$$

Рассмотрим случай, когда $a(\tau)$, $b(\tau)$ имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - const. \tag{3.4}$$

Проинтегрировав уравнение (3.3), получим:

$$r = r_0 \exp\left[-\varepsilon C^{-1}\left(b_0 t + 0.5 b_1 t^2\right)\right]. \tag{3.5}$$

Первые два уравнения системы (3.2) после ряда преобразований и усреднения примут вид

$$\begin{gathered} G_z' = -A^{-1}G_z a(\tau) + \left[A^{-1}Ca(\tau) - b(\tau)\right]r, \\ H' = -2A^{-1}Ha(\tau) + \left[A^{-1}Ca(\tau) - b(\tau)\right]r^2 + 2A^{-1}\mu a(\tau). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Уравнения (3.6) решены в аналитическом виде с помощью математического пакета Maple при предположении, что в начальный момент времени тело получило угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r_0 = \sqrt{3}$; кроме того,

$$A = 1.5, \quad C = 1, \quad \mu = 0.5, \quad a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = b_1 = 0.1. \tag{3.7}$$

Выражения для G_z, H имеют вид:

$$\begin{gathered} G_z = 1.73\exp\left(-\tau - 0.05\tau^2\right), \\ H = 0.5 + 1.5\exp\left(-2\tau - 0.1\tau^2\right) - 0.5\exp\left(-1.33\tau - 0.067\tau^2\right). \end{gathered} \tag{3.8}$$

При предположениях (3.7) проекция вектора кинетического момента G_z и величина r монотонно убывают и стремятся к нулю. Полная энергия H монотонно убывает, приближаясь к значению $H = 0.5$.

ВЫВОДЫ

Изложена новая оригинальная методика численно-аналитического решения существенно нелинейной проблемы-исследования динамики осесимметричного тела в случае Лагранжа под действием нестационарных возмущающих моментов. Выполнено тестирование методики в случае осевого и диссипативного моментов внешней среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№17-01-00538 и 16-01-00412).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 348 с.
2. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
3. Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
4. Сидоренко В. В. Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит. *Космич. исслед*. 2002. Т. 40, № 2. С. 147–155.
5. Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа. *Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент*. 1998. Вып. 2(6). С. 32–37.
6. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43, Вып. 5. С. 771–778.
7. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2015. 308 с.
8. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 5. С. 3–10.
9. Simpson H. C., Gunzburger M. D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *J. Appl. Math. and Phys*. 1986. Vol. 37, № 6. P. 867–894.
10. Сазонов В. В., Сидоренко В. В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 1990. Т. 54, Вып. 6. С. 951–957.
11. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *J. Nonlinear Sci*. 1994. Vol. 4. P. 35–57.
12. Заболотнов Ю. М., Любимов В. В. Нелинейные резонансные эволюционные эффекты при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. *Прикладная математика и механика*. 2002. Т. 66, Вып. 3. С. 410–417.
13. Холостова О. В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2016. 308с.
14. Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2012. № 4. С. 3–10.
15. Wan C. J., Tsiotras P., Coppola V. T., Bernstein D. S. Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. *Dynamics and Control*. 1997. Vol. 7. P. 215–233.
16. Provatidis C. G. Revisting the spinning top. *Journal of Material and Mechanical Engineering*. 2012. Vol. 1. P. 71–88.
17. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
18. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
19. Градштейн И. М., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
20. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
21. Мухин Н. П. Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1985. № 6. С. 51–54.
22. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.

REFERENCES

1. Kuzmak, G. E. (1970). The Dynamics of the Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-Entry. Moscow: Nauka.
2. Yaroshevskii, V. A. (1978). Motion of an Uncontrolled Body in the Atmosphere. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Aslanov, V. S. (2004). Spatial Motion of a Body at Descent in the Atmosphere. Moscow: Fizmatlit.
4. Sidorenko, V. V. (2002). One class of motions for a satellite carrying a strong magnet. Cosmic Research. Vol. 40, no. 2, pp. 133-141.
5. Leshchenko, D. D. (1998). The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case. Topical problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment. Iss. 2(6), pp. 32-37.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. & Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. J. Appl. Math. Mech.. Vol. 43, no. 5, pp. 829-837.
7. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D. & Leshchenko, D. D. (2015). Evolution of Motions of a Rigid body about its Center of Mass. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.
8. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. & Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession. Mechanics of Solids. Vol. 21, no. 5, pp. 1-8.
9. Simpson, H. C. & Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. J. Appl. Math. and Phys. Vol. 37, no. 6, pp. 867-894.
10. Sazonov, V. V. & Sidorenko, V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. J. Appl. Math. Mech. Vol. 54, no. 6, pp. 781-787.
11. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. J. Nonlinear Sci. Vol. 4, pp. 35-57.
12. Zabolotnov, Yu. M. & Lyubimov, V. V. (2002). Non-linear resonance evolutionary effects in the motion of a rigid body about a fixed point. J. Appl. Math. Mech. Vol. 66, no. 3, pp. 401-408.
13. Kholostova, O. V. (2016). Problems of Dynamics of Rigid Bodies with a Vibrating Suspension. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.
14. Markeev, A. P. (2012). On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point. Mechanics of Solids. No. 4, pp. 373-379.
15. Wan, C. J., Tsiotras, P., Coppola, V. T. & Bernstein, D. S. (1997). Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. Dynamics and Control. Vol. 7, pp. 215-233.
16. Provatidis, C. G. (2012). Revisting the spinning top. Journal of Material and Mechanical Engineering. Vol. 1, pp. 71-88.
17. Suslov, G. K. (1946). Theoretical mechanics. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat.
18. Volosov, V. M. & Morgunov, B. I. (1971). Method of Averaging in the Theory of Non-linear Oscillatory Systems. Moscow: Izdatelstvo MGU.
19. Gradshtein, I. S. & Ryzhik, I. M. (2000). Tables of Integrals, Sums, Series and Products. Moscow: Nauka.
20. Magnus, K. (1971). Kreisel. Theorie und Anwendungen. Moskow: Mir.
21. Mukhin, N. P. (1985). Simplified algorithm of asymptotic integration substantially of the nonlinear systems. Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela. No. 6, pp. 51-54.
22. Koshlyakov, V. N. (1985). Problems in Rigid Body Dynamics and the Applied Theory of Gyroscopes: Analytical Methods. Moscow: Nauka.