

4. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. Москва: Наука, 1973. 308 с.
5. Рутковский Д., Пилиневский М., Рутковская Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва: Горячая линия – Телеком, 2008. 383 с.
6. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинанте, 1974. 312 с.
7. Рикардс Р. Б. Двойственная задача оптимизации ортотропной оболочки. *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 865–871.

### REFERENCES

1. Venttsel, E. S. (1969). Probability Theory. Moscow: Nauka.
2. Kofman, A. (1982). Introduction to the theory of fuzzy sets. Moscow: Radio i svyaz.
3. Liu, B. (1002). Theory and practice of uncertain programming. Physica-Verlag Heidelberg.
4. Sobol, I. M. (1973). Numerical Monte Carlo methods. Moscow: Nauka.
5. Rutkovskiy, D., Pilinevskiy, M. & Rutkovskaya, L. (2008). Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom.
6. Rikards, R. B. & Teters, G. A. (1974). Stability of shells of composite materials. Riga: Zinante.
7. Rikards, R. B. (1973). The dual problem of optimizing the orthotropic shell. *Mehanika polimerov*, No. 5, pp. 865-871.

УДК 534-21:537.226.86

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ВТРАТ

Безверхий О. І., д. ф.-м. н., професор, Корнієнко В. Ф., к. т. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. П. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net

У статті подано постановку задачі про вимушені коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин з урахуванням електромеханічних втрат на резонансних режимах роботи. Електромеханічні втрати враховані шляхом введення комплексних сталих у матеріальні співвідношення. Проведені розрахунки вимушених коливань п'єзокерамічних кільцевих пластин при різних умовах закріплення країв. Проаналізовані напруження, переміщення і провідності з урахуванням механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат у широкому діапазоні частот, що виникають у кільцевій пластині. Одержано ряд фізичних залежностей для амплітудних значень переміщень, напружень і провідностей.

*Ключові слова:* п'єзокерамічна кільцева пластина, резонансні коливання, електромеханічні втрати.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ

Безверхий А. И., д. ф.-м. н., профессор, Корниенко В. Ф., к. т. н.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. П. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина*

o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net

В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях пьезокерамических кольцевых пластин с учетом электромеханических потерь на резонансных режимах работы. Электромеханические потери учтены путем введения комплексных постоянных в материальные соотношения. Проведены расчеты вынужденных колебаний пьезокерамических кольцевых

пластин при различных условиях закрепления краев. Проанализированы напряжения, перемещения и проводимости с учетом механических, диэлектрических и пьезоэлектрических потерь в широком диапазоне частот, возникающих в кольцевой пластине. Получен ряд физических зависимостей для амплитудных значений перемещений, напряжений и проводимостей.

*Ключевые слова:* пьезокерамическая кольцевая пластина, резонансные колебания, электромеханические потери.

## FORCED OSCILLATIONS OF PIEZOCERAMIC ANNULAR PLATES TAKING INTO ACCOUNT ELECTROMECHANICAL LOSSES

Bezverkhyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Korniienko V., Ph.D.

*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,*

*3, P. Nesterov, Kyiv, 03057, Ukraine*

*o\_bezver@ukr.net, vf\_kornienko@ukr.net*

In this paper, this formulation of the problem of vibration piezoceramic annular plates based electromechanical losses resonant modes. In axisymmetric vibration plate with thickness polarizations use constitutive equation in the form [2, 4, 5]. In electrodeposited facial planes thin circular plate is between equipotential surfaces and electric field it can be considered independent of planar coordinates. When harmonic oscillations with cyclic frequency solution of (4) with respect to the amplitude of the movement is using cylindrical Bessel functions of the first and the second kind of the first order. Under the linear model of energy loss at harmonic vibrations electromechanical losses can be accounted for by the introduction of integrated sustainable constitutive equation. Numerical simulations were conducted to circular plates made of a piezoceramic CTS-19, with such physical and mechanical parameters [5]. In this work the ring forced vibrations of piezoceramic plates in different conditions and analyzed consolidation stress, displacement and conduction with regard to mechanical, piezoelectric and dielectric losses in a wide range of frequencies that occur in the ring with piezoceramic plate CTS-19. Obtained a number of physical dependence to amplitude values of displacement, stress and conductivity are consistent with experimental results.

At free edges, the amplitude values of the displacements at the first resonance decrease with increasing inner radius on the inner surface, and at the second resonance there is an internal radius (approximately  $R/3$ ), where there is a maximum value of the amplitude. As the frequency increases, the amplitude values drop. On the external surface, on the contrary: the values of the amplitude displacements increase with increasing internal radius at the first resonance, and at the second resonance there is an internal radius (approximately  $R/3$ ), at which the maximum value of the displacement amplitude is reached. The amplitude values of the dimensionless conductivity decrease with increasing internal radius at the first resonance, but grow on the second resonance. With increasing frequency, the amplitude values at the resonant frequencies become larger and smaller, that is, we have strong and weak resonances. The conductivity is the same as the radius of the ring.

With an internal free and external rigid fixation on the inner surface of the ring with an increase in the internal radius, there is an internal radius (approximately  $R/2$ ) at the first resonance of the amplitude values of displacements, where the maximum value of the amplitude exists, and at the second resonance we have the maximum value of the amplitude with an internal radius of about  $R/3$ . As the frequency increases, the amplitude values of displacements drop.

With internal rigid and external free fixation, the amplitude values of the conductivity decrease with increasing internal radius at the resonance. The amplitudeless dimensionless stresses on the inner surface of a clamped inner ring with increasing internal radius decrease with increasing frequency at resonance. The amplitude dimensionless values of the displacement on the outer surface of the clamped ring from the middle with increasing internal radius at resonance fall.

At both rigidly fixed edges of the ring, forced oscillations are not excited by the electric potential.

*Key words:* piezoceramic annular plate, resonant vibrations, electromechanical loss.

### ВСТУП

П'єзоелектричні тонкостінні конструктивні елементи круглої форми використовуються в ультразвукових пристроях різного функціонального призначення. Найбільш характерним режимом роботи п'єзокерамічних перетворювачів є резонансний режим. Тому для розрахунку їх напружено-деформованого стану на резонансних режимах роботи необхідно враховувати втрати енергії в матеріалі.

Осесиметричні радіальні коливання тонких п'єзокерамічних дисків і кільцевих пластин з товщиною поляризацією, починаючи зі статті [6], вивчалися в багатьох роботах [1-6 та ін.]. Проте, дослідження впливу умов закріплення країв пластини на вимушені коливання на резонансних режимах з урахуванням втрат енергії в літературі відсутні. Цьому питанню й присвячена наша стаття.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Тонку п'єзокерамічну кільцеву пластину товщиною  $h$  віднесемо до циліндричної системи координат  $or\theta z$ , координатна площина  $z=0$  якої збігається з серединною площиною пластини. При осесиметричних коливаннях пластини з товщиною поляризацією скористаємося [2, 4, 5] матеріальними співвідношеннями у формі:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ \varepsilon_\theta &= s_{21}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ \varepsilon_z &= s_{31}^E (\sigma_r + \sigma_\theta) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \\ D_z &= d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо тонка п'єзокерамічна пластинка з електродованими лицьовими площинами  $z = \pm h/2$  перебуває в умовах плоского напруженого стану, то, приймаючи [2, 4, 5] гіпотези  $u_r = u_r(r, t)$ ,  $u_\theta = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ ,  $E_z = E_z(r, t)$ , для компонент напружень зі співвідношень (1) одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left( \nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \quad \nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E. \end{aligned} \quad (2)$$

З трьох рівнянь коливань у циліндричних координатах в осесиметричній плоскій задачі використовується [2] тільки одне

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (3)$$

При електродованих лицьових площинах тонка кільцева пластинка перебуває між екіпотенціальними поверхнями, і електричне поле в ній можна вважати незалежним від планарних координат  $r, \theta$ . У такому випадку підставимо (2) в (3) і одержимо рівняння коливань відносно переміщення  $u_r(r, t)$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (4)$$

### РАДІАЛЬНІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянемо поляризовану по товщині тонку кільцеву п'єзокерамічну пластинку з внутрішнім радіусом  $r_0$  і зовнішнім радіусом  $r_1$ , вкриту на лицьових площинах тонкими електродми. При гармонічних коливаннях  $u_r(r, t) = \text{Re} u_r^a(r) \exp i \omega t$  з циклічною частотою  $\omega$  розв'язок рівняння (4) відносно амплітуди переміщення  $u_r^a(r)$  знаходиться за допомогою циліндричних функцій Бесселя першого і другого роду першого порядку

$$u_r^a(r) = ARJ_1(k_E r) + BR Y_1(k_E r), \quad (5)$$

де  $k_E^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$ .

Будемо виходити з того, що в рамках лінійної моделі втрат енергії при гармонічних коливаннях електромеханічні втрати можна врахувати [3, 5] шляхом введення комплексних сталих у матеріальні співвідношення (1). Введемо втрати енергії через комплексні модулі таким чином

$$s_{ij}^E = s_{ij0} (1 - i s_{ijb}), \quad d_{ij} = d_{ij0} (1 - i d_{ijb}), \quad \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij0} (1 - i \varepsilon_{ijb}),$$

де  $s_{ijb}$ ,  $d_{ijb}$ ,  $\varepsilon_{ijb}$  – тангенси механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат.

Якщо у (5) покласти

$$A = \tilde{A}(1 + \nu_E) d_{13} E_z^a, \quad B = \tilde{B}(1 + \nu_E) d_{13} E_z^a$$

$$\kappa = k_E R = \bar{\omega} \sqrt{(1 - \nu_E^2) \frac{s_{11}^E}{s_{110}}}, \quad r = R\bar{r}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho s_{110}},$$

де  $E_z^a = -U/h$  – амплітуда напруженості електричного поля  $E_z = \text{Re } E_z^a \exp i\omega t$ ,  $U$  – різниця потенціалів на електродах,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  – комплексні коефіцієнти,  $R = r_1$ , то з урахуванням (2), одержимо відповідні вирази для напружень та переміщення

$$\sigma_r = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} b_1(\kappa\bar{r}) - 1) e^{i\omega t},$$

$$\sigma_\theta = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_2(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} b_2(\kappa\bar{r}) - 1) e^{i\omega t},$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{Re} \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} \kappa J_0(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} \kappa Y_0(\kappa\bar{r}) - 2) e^{i\omega t},$$

$$u_r = \text{Re} (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a R (\tilde{A} J_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} Y_1(\kappa\bar{r})) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

де

$$a_1(z\bar{r}) = \kappa J_0(\kappa\bar{r}) - (1 - \nu_E) \frac{1}{r} J_1(\kappa\bar{r}), \quad b_1(z\bar{r}) = \kappa Y_0(\kappa\bar{r}) - (1 - \nu_E) \frac{1}{r} Y_1(\kappa\bar{r}),$$

$$a_2(z\bar{r}) = \nu_E \kappa J_0(\kappa\bar{r}) + (1 - \nu_E) \frac{1}{r} J_1(\kappa\bar{r}), \quad b_2(z\bar{r}) = \nu_E \kappa Y_0(\kappa\bar{r}) + (1 - \nu_E) \frac{1}{r} Y_1(\kappa\bar{r}). \quad (7)$$

Запишемо представлення для амплітудних значень переміщення та напружень у вигляді:

$$u_r^a = (1 + \nu_E) d_{13} E_z^a R (\tilde{A} J_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} Y_1(\kappa\bar{r})),$$

$$\sigma_r^a = \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} b_1(\kappa\bar{r}) - 1),$$

$$\sigma_\theta^a = \frac{d_{13} E_z^a}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} (\tilde{A} a_2(\kappa\bar{r}) + \tilde{B} b_2(\kappa\bar{r}) - 1).$$

Відповідно для безрозмірних амплітудних значень маємо:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^a &= \frac{u_r^a}{RE_z^a d_{130}} = (1 + \nu_E) \frac{d_{13}}{d_{130}} \left( \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}) \right), \\ \bar{\sigma}_r^a &= \frac{\sigma_r^a s_{110}}{E_z^a d_{130}} = \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}) - 1 \right), \\ \bar{\sigma}_\theta^a &= \frac{\sigma_\theta^a s_{110}}{E_z^a d_{130}} = \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}a_2(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}b_2(\kappa\bar{r}) - 1 \right), \\ \bar{\sigma}_r^a + \bar{\sigma}_\theta^a &= \frac{d_{13} s_{110}}{d_{130} s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left( \tilde{A}\kappa J_0(\kappa\bar{r}) + \tilde{B}\kappa Y_0(\kappa\bar{r}) - 2 \right). \end{aligned}$$

Повна безрозмірна провідність [5] буде

$$\bar{Y} = \frac{Y}{\omega C} = -i \left\{ 1 - k_p^2 + \frac{(1 + \nu_E) k_p^2}{\bar{r}_1^2 - \bar{r}_0^2} \left[ \tilde{A}(\bar{r}_1 J_1(\kappa\bar{r}_1) - \bar{r}_0 J_1(\kappa\bar{r}_0)) + \tilde{B}(\bar{r}_1 Y_1(\kappa\bar{r}_1) - \bar{r}_0 Y_1(\kappa\bar{r}_0)) \right] \right\},$$

де  $C = \pi(r_1^2 - r_0^2)h^{-1}\epsilon_{33}^T$  – статична електрична ємність пластини,  $k_p$  – планарний коефіцієнт електромеханічного зв’язку ( $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{(1 - \nu_E)s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$ ).

Розглянемо можливі варіанти граничних умов при  $r = r_0$  та  $r = r_1$ .

### ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНИ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ

При вільних краях кільцевої пластини граничні умови будуть

$$\sigma_r(r_0, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0. \tag{8}$$

Використовуючи формули (2), (5), для напружень одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_0) &= 1, \\ \tilde{A}a_1(\kappa r_1) + \tilde{B}b_1(\kappa r_1) &= 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Звідси знаходимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = (b_1(\kappa\bar{r}_1) - b_1(\kappa\bar{r}_0))\Delta_{\sigma\sigma}^{-1}, \quad \tilde{B} = (a_1(\kappa\bar{r}_0) - a_1(\kappa\bar{r}_1))\Delta_{\sigma\sigma}^{-1}, \tag{10}$$

де визначник

$$\Delta_{\sigma\sigma} = a_1(\kappa\bar{r}_0)b_1(\kappa\bar{r}_1) - a_1(\kappa\bar{r}_1)b_1(\kappa\bar{r}_0). \tag{11}$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{\sigma\sigma} = 0$ .

Чисельні розрахунки проводились для кільцевих пластин  $r_0 < \bar{r} < r_1 = R$ , виготовлених з п’езокераміки ЦТС-19, при таких фізико-механічних параметрах [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \rho &= 7740 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad s_{110} = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \text{Н}^{-1}, \quad s_{120} = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \text{Н}^{-1}, \quad d_{130} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{Н}^{-1}, \\ s_{11b} &= 0,084, \quad s_{12b} = 0,05, \quad s_{13b} = 0,0094, \quad s_{33b} = 0,012, \quad \epsilon_{11}^T = 1490\epsilon_0, \quad \epsilon_{33}^T = 1360\epsilon_0, \\ \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}. \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини відповідно на внутрішній поверхні та на зовнішній поверхні від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$ .

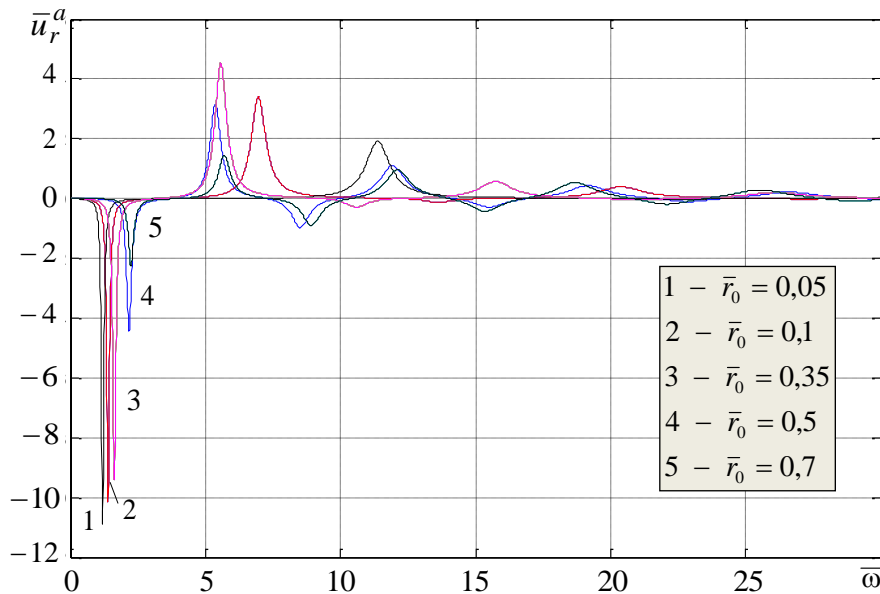


Рис. 1. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на внутрішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

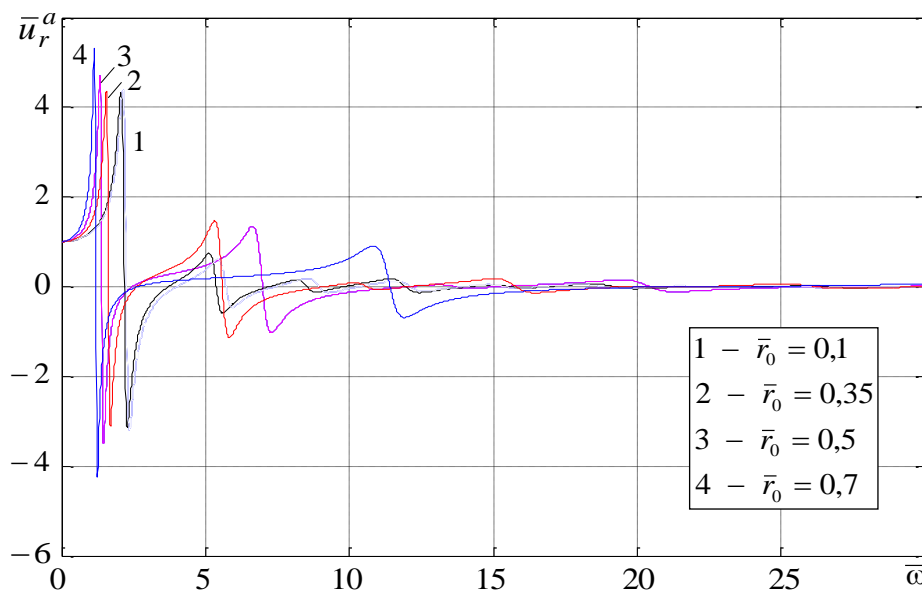


Рис. 2. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на зовнішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

Бачимо, що амплітудні значення переміщень  $\bar{u}_r^a$  на першому резонансі зі збільшенням внутрішнього радіуса  $\bar{r}_0$  на внутрішній поверхні (рис. 1) падають, а на другому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), де маємо максимальне значення амплітуди. Зі зростанням частоти амплітудні значення падають. На зовнішній поверхні (рис. 2) – навпаки, значення  $\bar{u}_r^a$  зі збільшенням  $\bar{r}_0$  на першому резонансі зростають, а на другому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), при якому досягається максимальне значення амплітуди  $\bar{u}_r^a$ .

Амплітудно-частотні залежності (АЧХ) безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  представлені на рис. 3. Видно, що амплітудні значення зі збільшенням внутрішнього радіуса на першому резонансі падають, а на другому резонансі навпаки зростають. Зі зростанням частоти амплітудні значення на резонансних частотах стають то більшими, то меншими, тобто маємо сильні і слабкі резонанси. Провідність однакова по радіусу кільця.

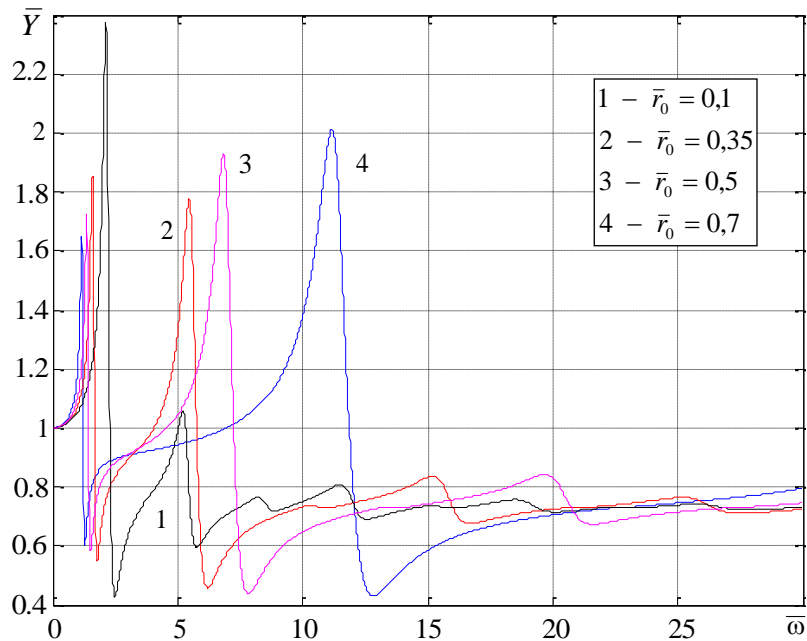


Рис. 3. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  на зовнішній поверхні вільного кільця при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

На рис. 4 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщень кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхні від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0 = 0,35$ .

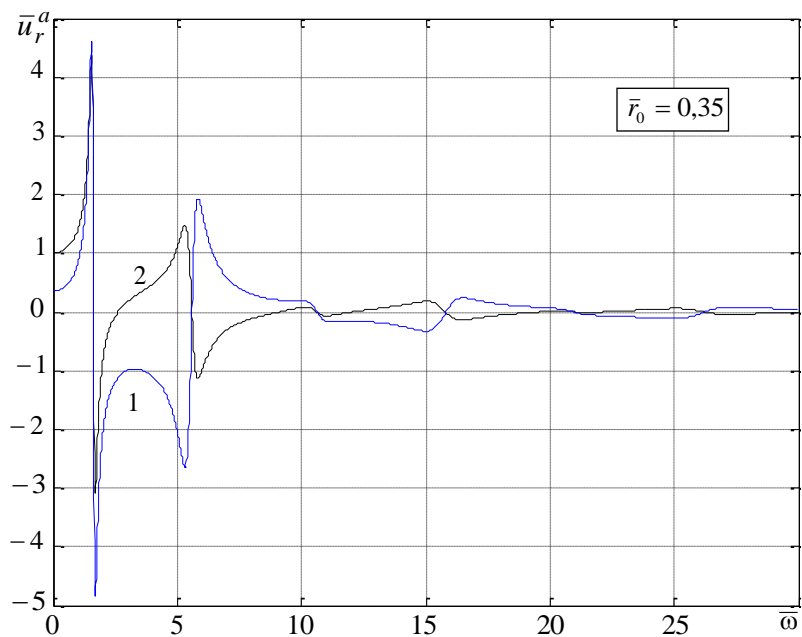


Рис. 4. Залежності амплітудних значень переміщення  $\bar{u}_r^a$  кільцевої пластини на зовнішній (крива 1) та внутрішній (крива 2) поверхнях вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

Бачимо, що на першому, третьому, п'ятому і т.д. резонансах маємо синфазні переміщення, тоді як на парних резонансах (другому, четвертому і т.д.) будуть протифазні переміщення.

На рис. 5 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхнях від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Видно, що на першому, третьому, п'ятому і т.д. резонансах маємо синфазні напруження, тоді як на парних резонансах (другому, четвертому і т.д.) будуть протифазні напруження. Причому величини амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta$  на резонансах на внутрішній поверхні порівняно з напруженнями на зовнішній поверхні більші, ніж у три рази.

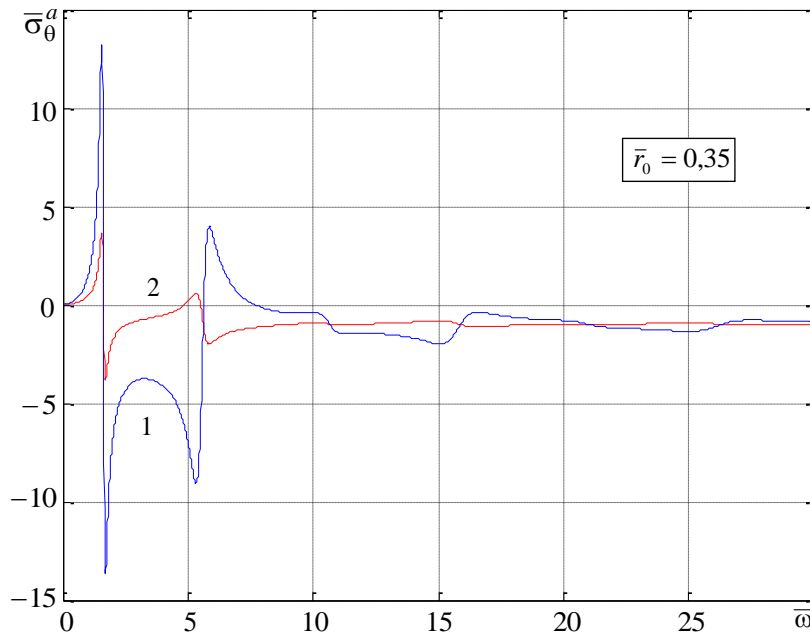


Рис. 5. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній (крива 1) та на зовнішній (крива 2) поверхнях вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

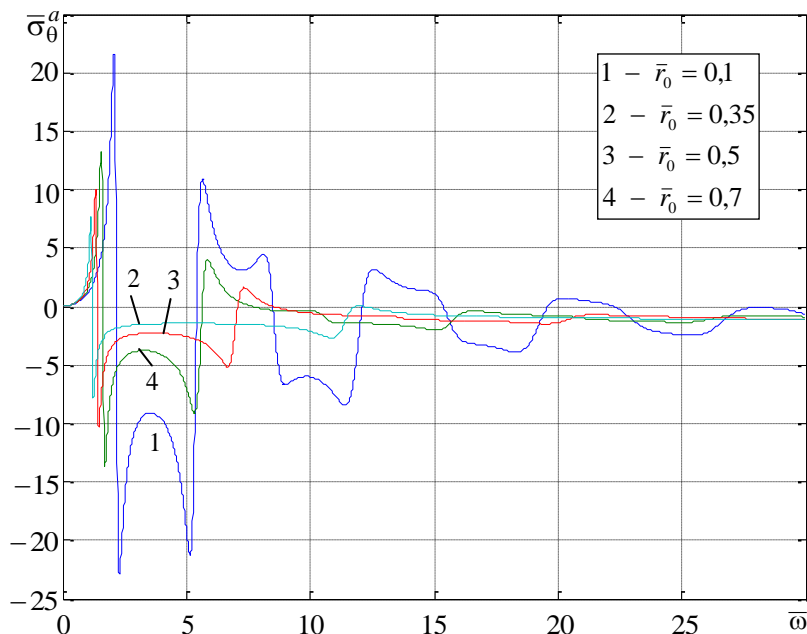


Рис. 6. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$



На рис. 6, 7 представлені залежності амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на внутрішній (рис. 6) та на зовнішній (рис. 7) поверхнях від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$ . Причому для амплітудних безрозмірних значень напружень кільця  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на резонансах на внутрішній поверхні існує внутрішній радіус (приблизно  $R/3$ ), де маємо мінімальне значення амплітуди, а на зовнішній поверхні – навпаки маємо максимальне значення амплітуди за тих же умов.

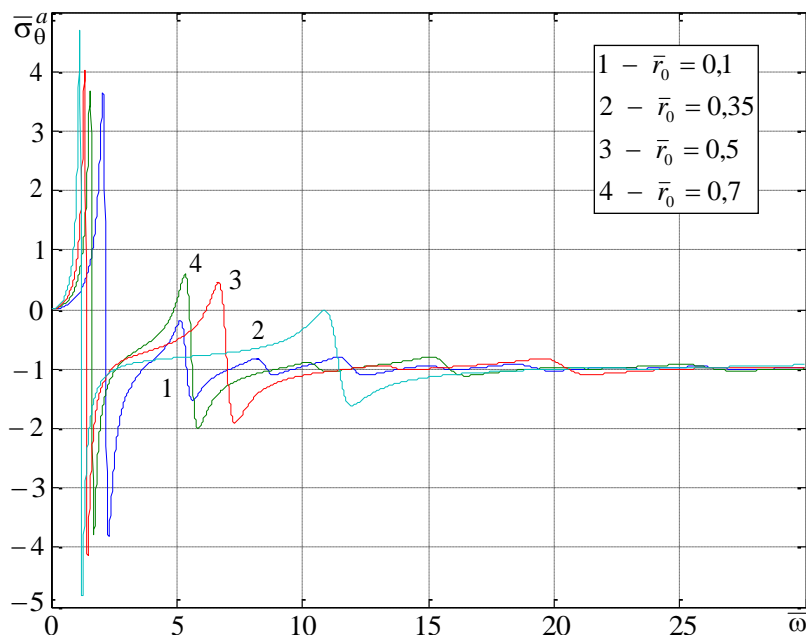


Рис. 7. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_\theta^a$  на зовнішній поверхні вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$

На рис. 8 наведені залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  у внутрішніх точках кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Бачимо, що на першому резонансі в усіх точках кільця переміщення синфазні, а вже на другому резонансі маємо в різних точках кільця як синфазні коливання, так протифазні.

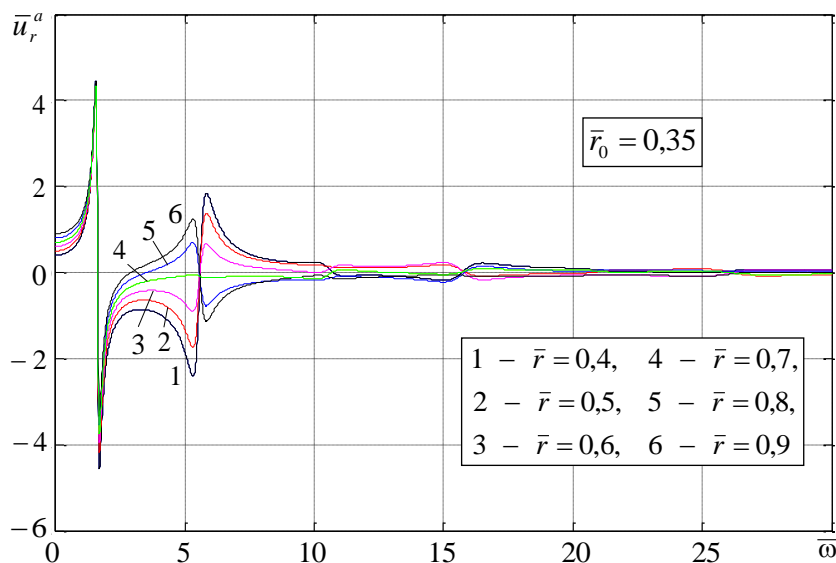


Рис. 8. Залежності амплітудних безрозмірних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  у вказаних внутрішніх точках вільного кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при  $\bar{r}_0 = 0,35$

При внутрішньому жорсткому і зовнішньому вільному закріпленні

$$u_r(r_0, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1, t) = 0 \quad (12)$$

з системи алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_0) = 0, \quad \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_1) = 1, \quad (13)$$

знаходимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = -Y_1(\kappa\bar{r}_0)\Delta_{u\sigma}^{-1}, \quad \tilde{B} = J_1(\kappa\bar{r}_0)\Delta_{u\sigma}^{-1}, \quad (14)$$

де визначник

$$\Delta_{u\sigma} = J_1(\kappa\bar{r}_0)b_1(\kappa\bar{r}_1) - Y_1(\kappa\bar{r}_0)a_1(\kappa\bar{r}_1). \quad (15)$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{u\sigma} = 0$ .

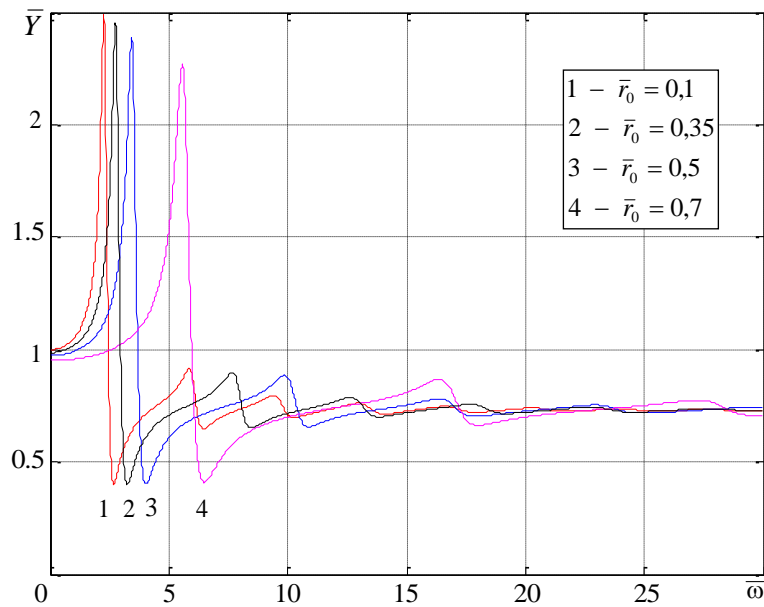


Рис. 9. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  затиснутого з середини кільця

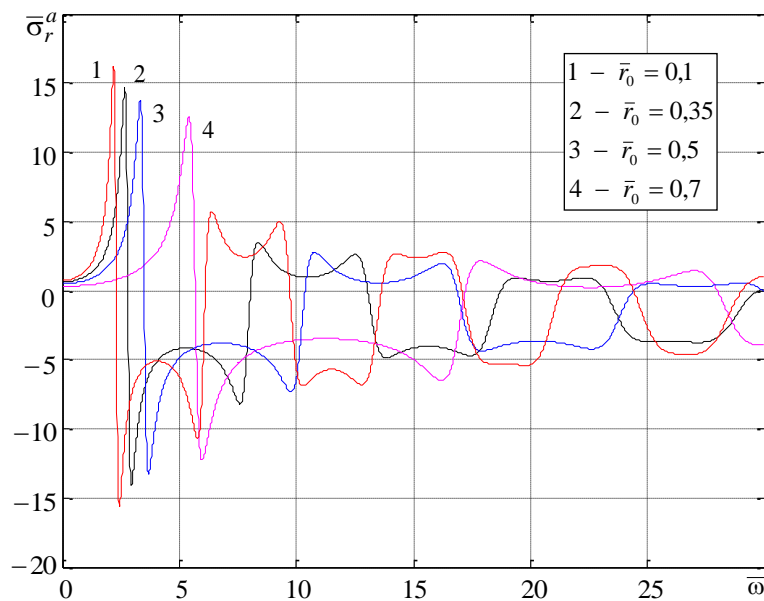


Рис. 10. Залежності амплітудних значень напружень  $\bar{\sigma}_r^a$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця від частоти  $\bar{\omega}$

АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця при різних значеннях безрозмірного радіуса  $\bar{r}_0$  представлені на рис. 9. Видно, що амплітудні значення провідності зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі падають.

Амплітудні безрозмірні напруження  $\bar{\sigma}_r^a$  на внутрішній поверхні затиснутого з середини кільця (рис. 10) зі збільшенням внутрішнього радіуса і зростанням частоти  $\bar{\omega}$  на резонансі падають.

Амплітудні безрозмірні значення переміщення на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі падають (рис. 11).

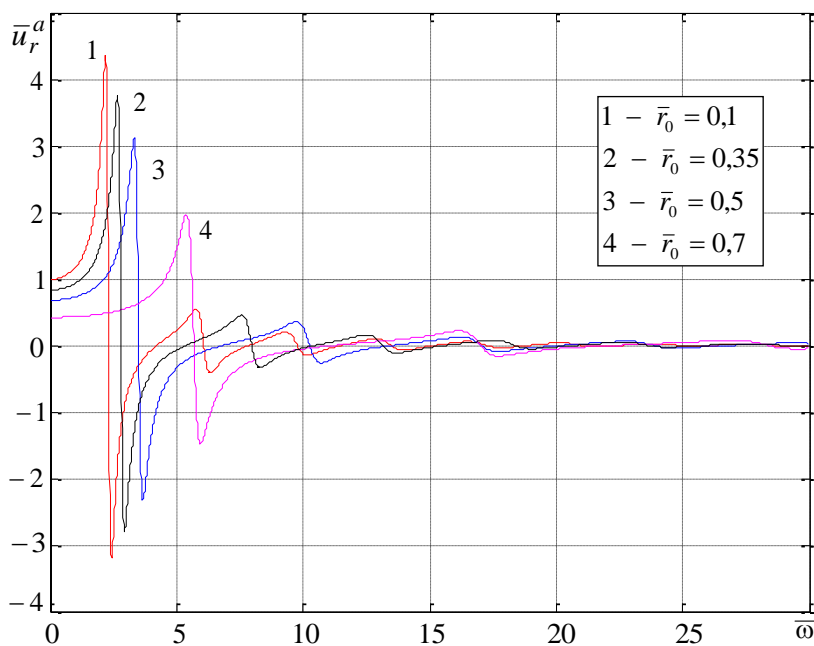


Рис. 11. АЧХ переміщень  $\bar{u}_r^a$  на зовнішній поверхні затиснутого з середини кільця

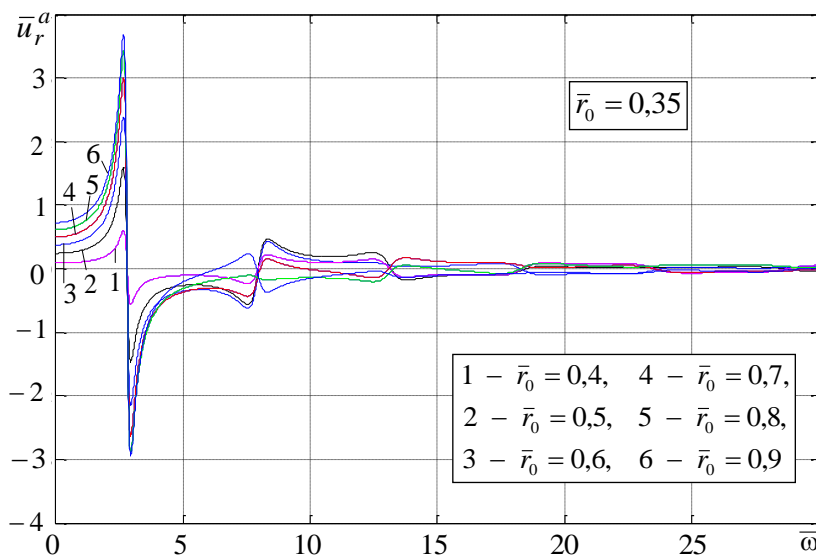


Рис. 12. Залежності амплітудних значень переміщення кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній поверхні затиснутого з середини кільця від частоти  $\bar{\omega}$

На рис. 12 представлені амплітудні безрозмірні значення переміщення у внутрішніх точках кільця від частоти  $\bar{\omega}$  при значеннях  $\bar{r}_0 = 0,35$ . Бачимо, що на першому резонансі в усіх точках кільця переміщення синфазні, а вже на другому резонансі маємо як синфазні, так і протифазні коливання в різних точках кільця.

При внутрішньому вільному і зовнішньому жорсткому закріпленні

$$\sigma_r(r_0, t) = 0, \quad u_r(r_1, t) = 0 \quad (16)$$

з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}a_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}b_1(\kappa\bar{r}_0) &= 1, \\ \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

одержимо постійні інтегрування

$$\tilde{A} = Y_1(\kappa\bar{r}_1)\Delta_{\sigma u}^{-1}, \quad \tilde{B} = -J_1(\kappa\bar{r}_1)\Delta_{\sigma u}^{-1}, \quad (18)$$

де визначник

$$\Delta_{\sigma u} = a_1(\kappa\bar{r}_0)Y_1(\iota\bar{r}_1) - b_1(\kappa\bar{r}_0)J_1(\kappa\bar{r}_1). \quad (19)$$

Резонансні частоти визначаються з частотного рівняння  $\Delta_{\sigma u} = 0$ .

АЧХ безрозмірних переміщень кільця  $\bar{u}_r^a$  на внутрішній поверхні наведені на рис. 13. Зі збільшенням внутрішнього радіуса на першому резонансі існує внутрішній радіус (приблизно  $R/2$ ), де маємо максимальне значення амплітуди, а на другому резонансі маємо максимальне значення амплітуди при внутрішньому радіусі приблизно  $R/3$ . Зі зростанням частоти амплітудні значення падають.

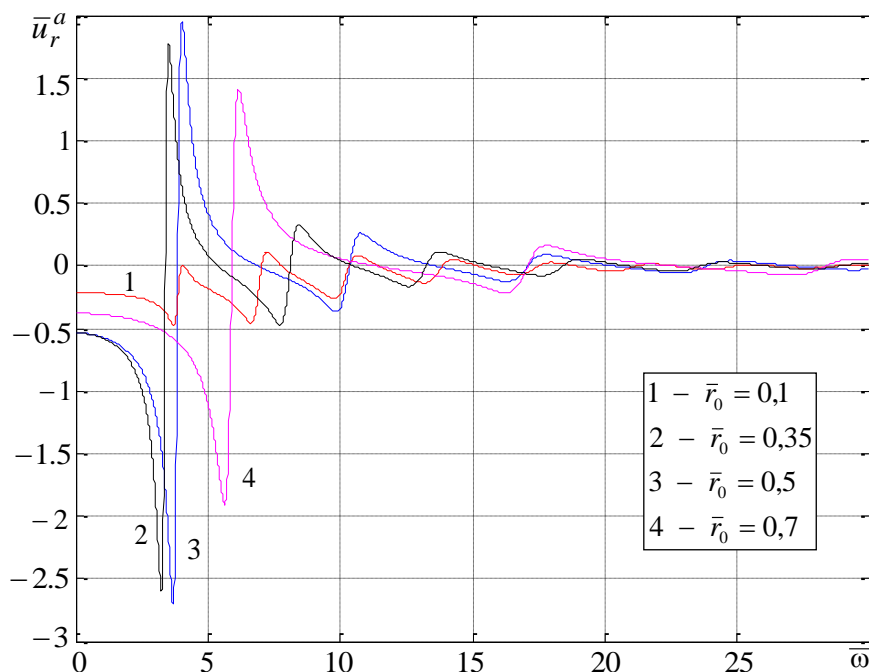


Рис. 13. АЧХ переміщень  $\bar{u}_r^a$  затиснутого зовні кільця на внутрішній поверхні

На рис. 14 наведені максимальні безрозмірні переміщення на внутрішній поверхні затиснутого зовні кільця на першій резонансній частоті  $\bar{\omega}$  при зміні радіуса  $\bar{r}_0$  від 0,05 до 0,7. Безрозмірне переміщення досягає максимуму при  $\bar{r}_0 = 0,45$ .

Амплітуди безрозмірної провідності затиснутого зовні кільця зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі зростають і падають з ростом частоти (рис. 15).

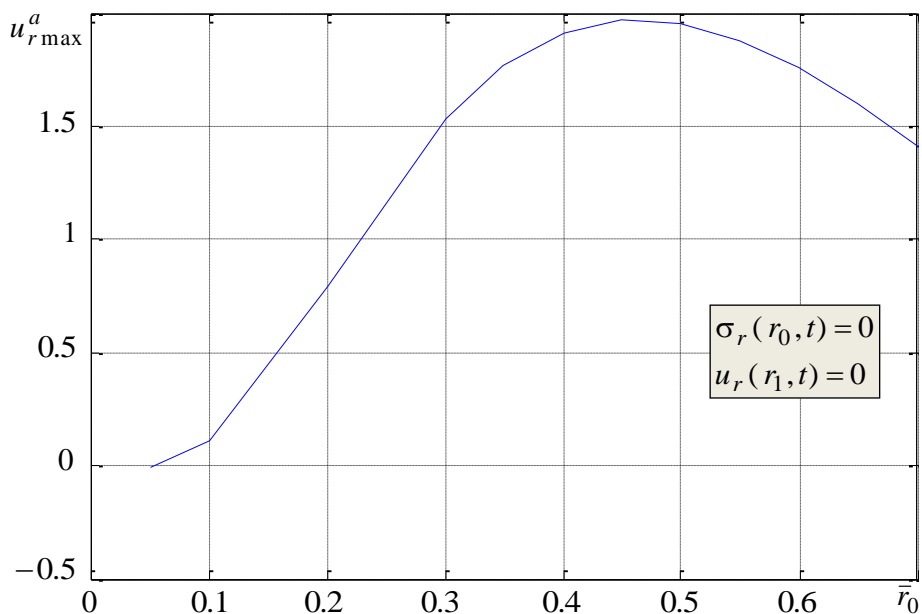


Рис. 14. Залежність максимальних переміщень  $\bar{u}_{r_{\max}}^a$  затиснутого зовні кільця від  $\bar{r}_0$

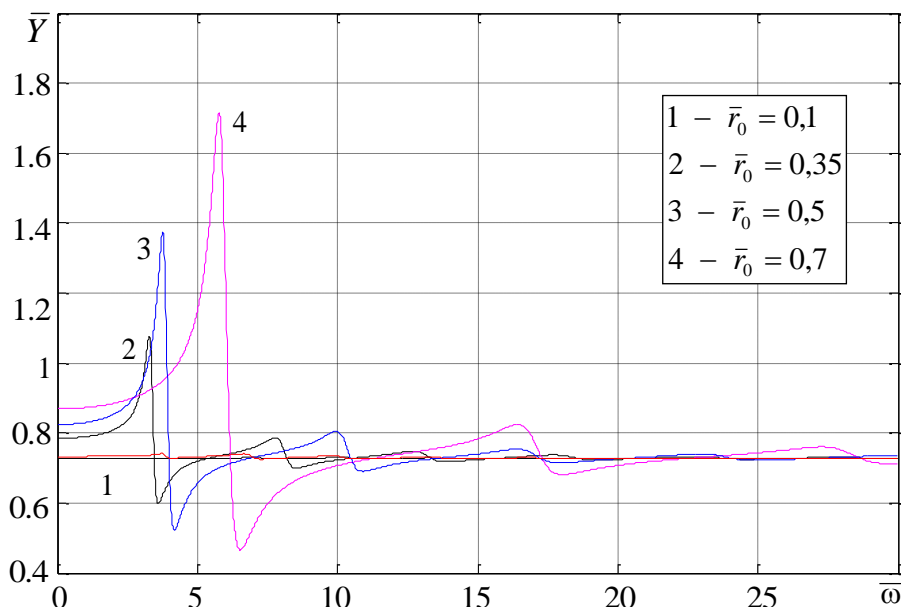


Рис. 15. АЧХ безрозмірної провідності  $\bar{Y}$  затиснутого зовні кільця

Амплітудні значення напружень затиснутого зовні кільця  $\bar{\sigma}_r^a$  на зовнішній поверхні зі збільшенням внутрішнього радіуса на резонансі зростають, а зі зростанням частоти падають (рис. 16).

При обох жорстко закріплених краях кільця граничні умови будуть

$$u_r(r_0, t) = 0, \quad u_r(r_1, t) = 0. \tag{20}$$

З відповідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_0) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_0) &= 0, \\ \tilde{A}J_1(\kappa\bar{r}_1) + \tilde{B}Y_1(\kappa\bar{r}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

випливає, що вимушені коливання в цьому випадку електричним потенціалом не збуджуються.

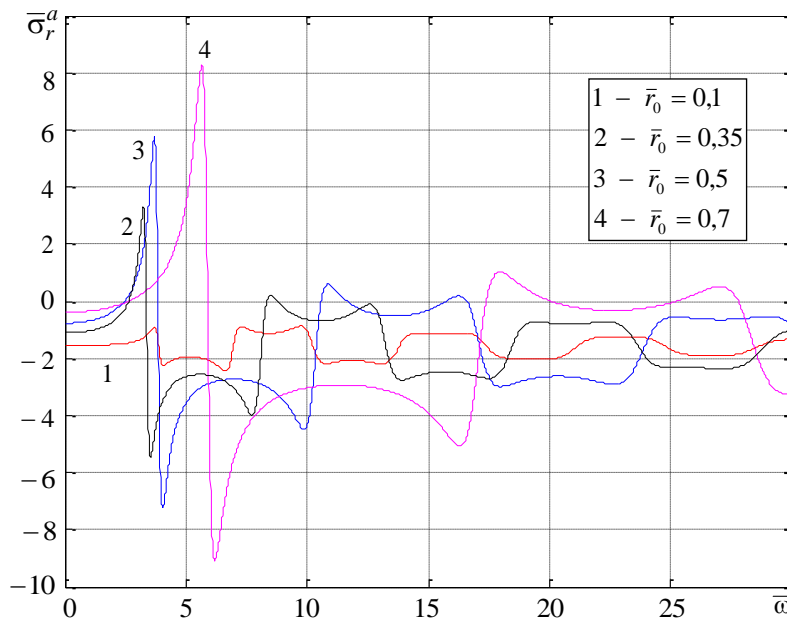


Рис. 16. АЧХ безрозмірних напружень  $\bar{\sigma}_r^a$  затиснутого зовні кільця на зовнішній поверхні

### ВИСНОВКИ

У статті досліджені вимушені коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при різних умовах закріплення і проаналізовані напруження, переміщення і провідності з урахуванням механічних, діелектричних і п'єзоелектричних втрат у широкому діапазоні частот, що виникають у кільцевій пластині з п'єзокераміки ЦТС-19. Одержано цілий ряд фізичних залежностей для амплітудних значень переміщень, напружень і провідностей, які узгоджуються з експериментальними результатами.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Лазуткин В. Н., Цыганов Ю. В., Ключниченко В. А. Радиальные колебания и электрический импеданс пьезокерамических колец с поляризацией по высоте. *Пьезоэлектрические материалы и преобразователи*. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1971. С. 4-9.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. *Электроупругость*. (Ред. А. Н. Гузь). АН УССР. Ин-т механики. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
3. Партон В. З., Кудрявцев А. Б. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. Киев: Наук. думка, 1990. 228 с.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. Киев: Наукова думка, 2008. 270 с.
6. Mason W. P. Piezoelectricity, its history and applications. *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. 70, № 6. P. 1561-1566.

### REFERENCES

1. Lazutkin, V. N., Tsyganov, Yu. V. & Klyushnichenko, V. A. (1971). Radial Oscillations and Electrical Impedance of Piezoceramic Rings with Height Polarization. *Piezoelectric materials and converters*, Rostov-on-Don: Publishing house of the Russian State University, pp. 4-9.
2. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in structural elements. Vol.5. *Electroelasticity Ans. Ed. Guz A.N.*, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Mechanics, Naukova Dumka, Kyiv.
3. Parton, V. Z. & Kudryavtsev, A. B. (1988). Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. Moscow: Nauka.
4. Shulga, N. A. & Bolkisev, A. M. (1990). Oscillations of piezoelectric bodies. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Shulga, M. O. & Karlash, V. L. (2008). Electromechanical resonant vibrations of piezoelectric plates. Kyiv: Naukova Dumka.
6. Mason, W. P. (1981). Piezoelectricity, its history and applications. *Jour. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 70, No. 6, pp. 1561-1566.