УДК 539.3

ВІСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ЗА УМОВИ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ МІЖ ШАРАМИ

Глухов А. Ю.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

ndrew.gl@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення вісесиметричних хвиль у шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримано дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль та його довгохвильове наближення. Досліджено чисельні розв'язки дисперсійного рівняння для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара.

Ключові слова: шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В КОМПОЗИТНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ УСЛОВИИ НЕПОЛНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

Глухов А. Ю.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

ndrew.gl@gmail.com

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальними напряжеными рассмотрены постановка и метод решения задач о распространении осесимметричных волн в слоистых композитных несжимаемых предварительно напряженных материалах при проскальзывании слоев. Исследован случай распространения волн вдоль слоев. Получено дисперсионное уравнение для квазипоперечных волн и его длинноволновое приближение. Исследованы численные решения дисперсионного уравнения для материала с упругим потенциалом типа Трелоара.

Ключевые слова: слоистый композитный несжимаемый материал, начальные напряжения, упругие волны, дисперсионное уравнение, длинноволновое приближение.

AXISYMMETRIC WAVES IN COMPOSITE INCOMPRESSIBLE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES UNDER INCOMPLETE CONTACT BETWEEN LAYERS

Glukhov A. Yu.

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine

ndrew.gl@gmail.com

In this paper, under the three-dimensional dynamic linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses research axisymmetric elastic waves propagation in layered incompressible composite materials with initial stresses.

We consider the composite material which has a periodic structure and consists of two types of layers in alternating. For each type of layer materials and initial stress-strain states are the same. Materials of layers are considered hyperelastic isotropic with an arbitrary structure of elastic potentials.

It is also considered that the initial stress state is homogeneous and for each type of layers occurs following equations $S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad j = 1, 2.$

At the border section of layers only normal to layers stresses and movements are continuous, and all tangential stresses equal zero.

Investigation of elastic axisymmetrical wave propagation in incompressible layered composite materials with initial stresses is reduced to constructing solutions of the equations of motion in meeting the

boundary conditions on the section plane layers and Floquet periodicity conditions. The case of wave propagation along the layers has been considered.
A dispersion equation for quasi-transversal waves and its long-wave approximation have been received. The analytical results are presented in aggregate form for elastic materials with the potential of free form.
The numerical research of solutions has been made for dispersive equations of elastic materials of Treloar type potential. The influence of initial stresses is examined on the propagation of axisymmetric harmonic waves in composite materials.
Key words: laminated composite incompressible material, initial stresses, elastic waves, dispersive equation, long-wave approximation.

ВСТУП

Дослідженням динамічних процесів у тілах з початковими напруженнями, у тому числі і в шаруватих матеріалах, присвячені численні публікації [1-10 та ін.].

Поширення плоских хвиль у шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями розглядалося у працях [1-6]. Переважна частина досліджень стосовно поширення хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями проводилися для повного контакту шарів [1-3, 6]. У статтях [4, 5] метод дослідження плоских пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями, викладений у монографії [6], поширений на випадок неповного контакту шарів.

У нашій роботі в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями на основі зазначеного вище методу [6] проведені дослідження поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МЕТОД РОЗВ’ЯЗКУ

Досліджуються закономірності поширення вісесиметричних гармонічних пружних хвиль у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями. Дослідження проводяться в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями з використанням методів, викладених у монографіях академіка НАН України Гузя О. М. Середовище поширення хвиль – композитний матеріал з початковими напруженнями періодичної структури. Композит складається з двох типів шарів, що чергуються. Матеріали шарів гіперпружні ізотропні з довільною структурою пружного потенціалу. Початкові напружено-деформовані стани є однаковими для кожного типу шарів. Вважаємо початковий напружений стан однорідним і визначаємо його відповідно до формул (1)

$$\begin{gathered} y_n = \lambda_n^{(1)} x_n^{(1)}; \quad y_n = \lambda_n^{(2)} x_n^{(2)}; \quad \lambda_n^{(j)} = const; \quad j = 1,2; \\ y_n = x_n^{(j)} + u_n^{0(j)}; \quad u_m^{0(j)} = \delta_{nm} \left(\lambda_n^{(j)} - 1 \right) x_n^{(j)}; \quad m,n = 1,2,3. \end{gathered} \tag{1}$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце співвідношення (2)

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1,2. \tag{2}$$

У (1) і (2) індексами в дужках $\left(j = 1,2 \right)$ відзначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів. $S_{tt}^{0(j)}$ – складові тензора узагальнених напружень Лагранжа, $h'^{(j)}$ – товщина j-го шару в початковому напружено-деформованому стані, $h^{(j)}$ – товщина j-го шару в природному стані, $\lambda_t^{(j)}$ – коефіцієнти видовження уздовж відповідних вісей.

Будемо вважати, що відбувається повне проковзування між шарами, тобто дотичні напруження на границях розділу шарів рівні нулеві.

У представленнях загальних розв’язків приймаємо залежності (3)

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right); \quad u_{\theta}^{(j)} \equiv 0; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right);$$
$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right). \tag{3}$$

Вирази (3) відповідають вісесиметричній задачі і в цьому випадку можна також вважати, що функції, через які записується загальний розв'язок задачі, мають вигляд (4)

$$\Psi'^{(j)} \equiv 0; \quad \mathrm{X}'^{(j)} = \mathrm{X}'^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right). \tag{4}$$

Враховуючи (4) для визначення переміщень і напружень при $y_3 = const$ та функції $\mathrm{X}'^{(j)}$ маємо вирази (5), (6) і (7)

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3}\mathrm{X}'^{(j)}; \quad u_3^{(j)} = \Delta_1'\mathrm{X}'^{(j)}; \quad \varrho'^{(j)} = \varrho^{(j)};$$
$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[\left(\varkappa_{1111}'^{(j)} - \varkappa_{1133}'^{(j)} - \varkappa_{1313}'^{(j)}\right)\Delta_1' + \varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_3}\mathrm{X}'^{(j)}; \tag{5}$$

$$Q_{33}'^{(j)} = \left[\left(\varkappa_{1111}'^{(j)} + \varkappa_{3333}'^{(j)} - 2\varkappa_{1133}'^{(j)} - \varkappa_{1313}'^{(j)}\right)\Delta_1' + \varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_3}\mathrm{X}'^{(j)};$$
$$Q_{3r'}'^{(j)} = \left(\varkappa_{1313}'^{(j)}\Delta_1' - \varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial}{\partial r'}\mathrm{X}'^{(j)}; \tag{6}$$

$$\left[\left(\Delta_1' + \xi_2'^{(j)^2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\Delta_1' + \xi_3'^{(j)^2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right) - \frac{\varrho'^{(j)}}{\varkappa_{1331}'^{(j)}}\left(\Delta_1' + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\mathrm{X}'^{(j)} = 0. \tag{7}$$

У співвідношеннях (5) і (6) та рівнянні (7) $\varkappa'^{(j)}$ характеризує механічні властивості шарів композиту, а

$$\xi_{2,3}'^{(j)^2} = c' \pm \left(c'^2 - \varkappa_{3113}'^{(j)}\varkappa_{1331}'^{(j)-1}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad 2\varkappa_{1331}'^{(j)}c' = \varkappa_{3333}'^{(j)} + \varkappa_{1111}'^{(j)} - 2\left(\varkappa_{1133}'^{(j)} + \varkappa_{1313}'^{(j)}\right).$$

Отже, відповідно до викладеного задача зводиться до побудови розв'язків рівнянь (7) за умов неперервності на границях розділу шарів типу (8)

$$u_3'^{(1)}(0) = u_3'^{(2)}(0); \quad Q_{33}'^{(1)}(0) = Q_{33}'^{(2)}(0);$$
$$Q_{3r'}'^{(1)}(0) = 0; \quad Q_{3r'}^{(2)}(0) = 0 \tag{8}$$

і умов періодичності (9), що відповідають теорії Флоке

$$u_3'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right) = u_3'^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right); \quad Q_{33}'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right) = Q_{33}'^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right);$$
$$Q_{3r'}'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right) = 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right) = 0. \tag{9}$$

Розглянемо поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямку. Визначимо «істинну» фазову швидкість. Приймемо умову (10)

$$\mathrm{X}'^{(j)}\left(r', y_3, \tau\right) = \mathrm{X}'^{(j)(0)}\left(y_3\right)H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

У (10) k і ω – хвильове число і кругова частота; C – «істина» фазова швидкість вісесиметричних хвиль; $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення вісесиметричних хвиль, які йдуть «на нескінченність»; $\mathrm{X}'^{(j)(0)}\left(y_3\right)$ – амплітудна функція. Надалі індексом (0) позначені всі амплітудні величини у представленнях типу (10).

Підставляючи (10) в (5) і (6), для визначення переміщень і напружень отримуємо співвідношення (11) і (12)

$$
\begin{gathered}
u_{r'}^{(j)}=u_{r'}^{(j)(0)}\frac{d}{dr'}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};\quad u_3^{(j)}=u_3^{(j)(0)}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};\\
u_4^{(j)}\equiv p^{(j)}=p^{(j)(0)}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};\\
u_{r'}^{(j)(0)}=-\frac{d}{dy_3}\mathrm{X}'^{(j)(0)}\left(y_3\right);\quad u_3^{(j)(0)}=-k^2\mathrm{X}'^{(j)(0)};\\
p^{(j)(0)}=\left[-k^2\left(\varkappa_{1111}'^{(j)}-\varkappa_{1133}'^{(j)}-\varkappa_{1313}'^{(j)}\right)+\varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{d^2}{dy_3^2}+\omega^2\varrho'^{(j)}\right]\frac{\partial}{\partial y_3}\mathrm{X}'^{(j)(0)};
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_{33}'^{(j)}=Q_{33}'^{(j)(0)}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};\quad Q_{3r'}'^{(j)}=Q_{3r'}'^{(j)(0)}\frac{\partial}{\partial r'}H_0^{(1)}\left(r'k\right)e^{-i\omega\tau};\\
Q_{33}'^{(j)(0)}=\left[-k^2\left(\varkappa_{1111}'^{(j)}+\varkappa_{3333}'^{(j)}-2\varkappa_{1133}'^{(j)}-\varkappa_{1313}'^{(j)}\right)+\varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{d^2}{dy_3^2}+\omega^2\varrho'^{(j)}\right]\frac{d}{dy_3}\mathrm{X}'^{(j)(0)};\\
Q_{3r'}'^{(j)(0)}=-\left(k^2\varkappa_{1313}'^{(j)}+\varkappa_{3113}'^{(j)}\frac{d^2}{dy_3^2}\right)\mathrm{X}'^{(j)(0)}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Підставляючи (10) в (7), отримуємо рівняння для визначення амплітудної функцій $\mathrm{X}'^{(j)(0)}$ у формі (13)

$$
\left[\left(\xi_2'^{(j)^2}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)\left(\xi_3'^{(j)^2}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)+\frac{\omega^2\varrho'^{(j)}}{\varkappa_{1331}'^{(j)}}\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)\right]\mathrm{X}'^{(j)(0)}=0. \tag{13}
$$

Умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин у вигляді (14) і (15):

$$
\begin{gathered}
u_3'^{(1)(0)}\left(0\right)=u_3'^{(2)(0)}\left(0\right);\quad Q_{33}'^{(1)(0)}\left(0\right)=Q_{33}'^{(2)(0)}\left(0\right);\\
Q_{3r'}'^{(1)(0)}\left(0\right)=0;\quad Q_{3r'}^{(2)(0)}\left(0\right)=0;
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
u_3'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right)=u_3'^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right);\quad Q_{33}'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right)=Q_{33}'^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right);\\
Q_{3r'}'^{(1)(0)}\left(h^{(1)}\right)=0;\quad Q_{3r'}^{(2)(0)}\left(-h^{(2)}\right)=0.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Отже, для нестисливого тіла необхідно знайти розв’язок звичайного диференціального рівняння (13), що задовольнить умовам (14) і (15).

Розв’язок рівняння (13) шукаємо у формі (16)

$$
\mathrm{X}'^{(j)(0)}\left(y_3\right)=\sum_{m=1}^{4}B_m^{(j)}e^{(-1)^{\tau}ik\alpha_{\tau}^{(j)}\left(y_3+(-1)^j\frac{1}{2}h'^{(j)}\right)};\quad \tau=\begin{cases}m=1,3;\\ m=2,4.\end{cases} \tag{16}
$$

У (16) $\alpha_1^{(j)^2}$ і $\alpha_2^{(j)^2}$ – корені характеристичного рівняння (17)

$$
\varkappa_{3113}'^{(j)}\alpha^{(j)4}-\alpha^{(j)2}\left[C^2\varrho'^{(j)}-\varkappa_{3333}'^{(j)}-\varkappa_{1111}'^{(j)}+2\left(\varkappa_{1133}'^{(j)}+\varkappa_{1313}'^{(j)}\right)\right]-\left(C^2\varrho'^{(j)}-\varkappa_{1331}'^{(j)}\right)=0. \tag{17}
$$

КВАЗІПОПЕРЕЧНА ХВИЛЯ УЗДОВЖ ВІСІ *Or′*, ПОЛЯРИЗОВАНА У ПЛОЩИНІ *r′Oy₃*

Для нестисливого матеріалу має сенс розглядати квазіпоперечну хвилю, яка поширюється вздовж вісі Or' і поляризована у площині $r'Oy_3$. Для розглянутої хвилі переміщення $u_{r'}^{(j)}$ будуть антисиметричні і $u_3^{(j)}$ симетричні щодо середини відповідних шарів.

Для розглянутого випадку в поданні розв’язку у формі (16) для двох сусідніх шарів приймемо залежності (18):

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \tag{18}$$

Враховуючи позначення (11) і (12) і підставивши (16) і (18) в умови (14) і (15), отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних рішень якої слідує дисперсійне рівняння у вигляді (19)

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_2^{(2)2} - \alpha_1^{(2)2}\right)\varkappa'^{(2)}_{3113}\Big[\alpha_1^{(1)}\left(\varkappa'^{(1)}_{1313} - \alpha_2^{(1)2}\varkappa'^{(1)}_{3113}\right)\Big(C^2_{Sy_3}\varrho^{(1)} - \varkappa'^{(1)}_{1111} - \varkappa'^{(1)}_{3333} + 2\varkappa'^{(1)}_{1133} + \\
&+\varkappa'^{(1)}_{1313} - \alpha_1^{(1)2}\varkappa'^{(1)}_{3113}\Big)\operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_1^{(1)}h'^{(1)} - \alpha_2^{(1)}\left(\varkappa'^{(1)}_{1313} - \alpha_1^{(1)2}\varkappa'^{(1)}_{3113}\right)\Big(C^2_{Sy_3}\varrho^{(1)} - \varkappa'^{(1)}_{1111} - \varkappa'^{(1)}_{3333} + \\
&+2\varkappa'^{(1)}_{1133} + \varkappa'^{(1)}_{1313} - \alpha_2^{(1)2}\varkappa'^{(1)}_{3113}\Big)\operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_2^{(1)}h'^{(1)}\Big] - \left(\alpha_2^{(1)2} - \alpha_1^{(1)2}\right)\varkappa'^{(1)}_{3113}\Big[\alpha_2^{(2)} \times \\
&\times\left(\varkappa'^{(2)}_{1313} - \alpha_1^{(2)2}\varkappa'^{(2)}_{3113}\right)\left(C^2_{Sy_3}\varrho^{(2)} - \varkappa'^{(2)}_{1111} - \varkappa'^{(2)}_{3333} + 2\varkappa'^{(2)}_{1133} + \varkappa'^{(2)}_{1313} - \alpha_2^{(2)2}\varkappa'^{(2)}_{3113}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_2^{(2)}h'^{(2)} \\
&-\alpha_1^{(2)}\left(\varkappa'^{(2)}_{1313} - \alpha_2^{(2)2}\varkappa'^{(2)}_{3113}\right)\times \\
&\times\left(C^2_{Sy_3}\varrho^{(2)} - \varkappa'^{(2)}_{1111} - \varkappa'^{(2)}_{3333} + 2\varkappa'^{(2)}_{1133} + \varkappa'^{(2)}_{1313} - \alpha_1^{(2)2}\varkappa'^{(2)}_{3113}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_1^{(2)}h'^{(2)}\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією, отримаємо рівняння (20)

$$\begin{aligned}
C^2_{Sy_3} = &\Big\{h'^{(1)}\varkappa'^{(2)}_{3113}\left[\varkappa'^{(1)}_{1313}\left(\varkappa'^{(1)}_{1111} + \varkappa'^{(1)}_{3333} - \varkappa'^{(1)}_{1133}\right) - 2\varkappa'^{(1)}_{1331}\varkappa'^{(1)}_{3113}\right] + \\
&+h'^{(2)}\varkappa'^{(1)}_{3113}\left[\varkappa'^{(2)}_{1313}\left(\varkappa'^{(2)}_{1111} + \varkappa'^{(2)}_{3333} - \varkappa'^{(2)}_{1133}\right) - 2\varkappa'^{(2)}_{1331}\varkappa'^{(2)}_{3113}\right]\Big\}\times \\
&\times\left[\varrho^{(1)}h'^{(1)}\varkappa'^{(2)}_{3113}\left(\varkappa'^{(1)}_{1313} - \varkappa'^{(1)}_{3113}\right) + \varrho^{(2)}h'^{(2)}\varkappa'^{(1)}_{3113}\left(\varkappa'^{(2)}_{1313} - \varkappa'^{(2)}_{3113}\right)\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Аналіз рівнянь (19) і (20) свідчить, що при поширенні хвиль відбувається взаємодія між шарами композиту.

АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Дисперсійне співвідношення (19) отримане для пружного потенціалу довільної форми. Для проведення числового аналізу конкретизуємо вигляд пружного потенціалу. Розглянемо закономірності впливу початкових напружень на швидкість поширення квазіпоперечних хвиль у композитному високоеластичному матеріалі в рамках потенціалу Трелоара [6]

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)}A_1^{(j)},$$

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна сталаю $A_1^{(j)}$ – алгебраїчний інваріант.

Для складових тензора $\varkappa'^{(j)}$ отримаємо

$$\varkappa'^{(j)}_{1111} = \lambda_1^{(j)2}\left(-2p_0^{(j)}\lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)}\right); \quad \varkappa'^{(j)}_{3113} = \lambda_3^{(j)2}\left(-p_0^{(j)}\lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)}\right);$$
$$\varkappa'^{(j)}_{3333} = \lambda_3^{(j)2}\left(-2p_0^{(j)}\lambda_3^{(j)-2} + S_{33}^{0(j)}\right); \quad \varkappa'^{(j)}_{1313} = \lambda_1^{(j)}\lambda_3^{(j)}\left(-p_0^{(j)}\lambda_1^{(j)-1}\lambda_3^{(j)-1} + S_{33}^{0(j)}\right);$$
$$\varkappa'^{(j)}_{1331} = \lambda_1^{(j)2}\left(-p_0^{(j)}\lambda_1^{(j)-2} + S_{11}^{0(j)}\right); \quad \varkappa'^{(j)}_{1133} = 0.$$

Розрахунки проведемо при початковому стані

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0;$$
$$\lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2}$$

та наступних співвідношеннях механічних характеристик шарів композиту

$$c_{10}^{(1)} / c_{10}^{(2)} = 5; \quad \varrho^{(2)} / \varrho^{(1)} = 0,7.$$

На рисунках введені такі позначення: $C / C_S^{0(2)}$ – безрозмірна швидкість поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі, $\bar{h}$ – приведена частота ($\bar{h} = k_S^{0(2)} h^{(2)}$), $k_S^{0(2)}$ – хвильове число, $C_S^{0(2)}$ – швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень, m – параметр шаруватості ($m = h^{(1)} / h^{(2)}$).

На рис. 1 показана залежність безрозмірної швидкості поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі $C / C_S^{0(2)}$ від наведеної частоти $\bar{h}$ для $m = 1$ для перших п'яти мод. Наведений на рис. 1 випадок відповідає ненапруженому початковому стану.

На рис. 2-6 показані відповідні моди для різних початкових напружень у другому шарі композиту.

Аналізуючи вплив початкових напружень на фазові швидкості, можна зробити такі висновки:

- початкові напруження суттєво впливають на фазові швидкості вісесиметричних хвиль;
- особливо значний вплив початкові напруження мають на фазову швидкість хвиль, що зароджуються;
- як правило, початкові напруження змінюють значення критичних частот;
- залежність фазової швидкості від початкових напружень для кожної моди визначається діапазоном частот;
- існують частоти, за яких початкові напруження не суттєво впливають (або взагалі не впливають) на значення фазової швидкості;
- для розглянутого варіанту початкового стану фазова швидкість значно більше реагує на розтягнення другого шару, ніж на стискання.

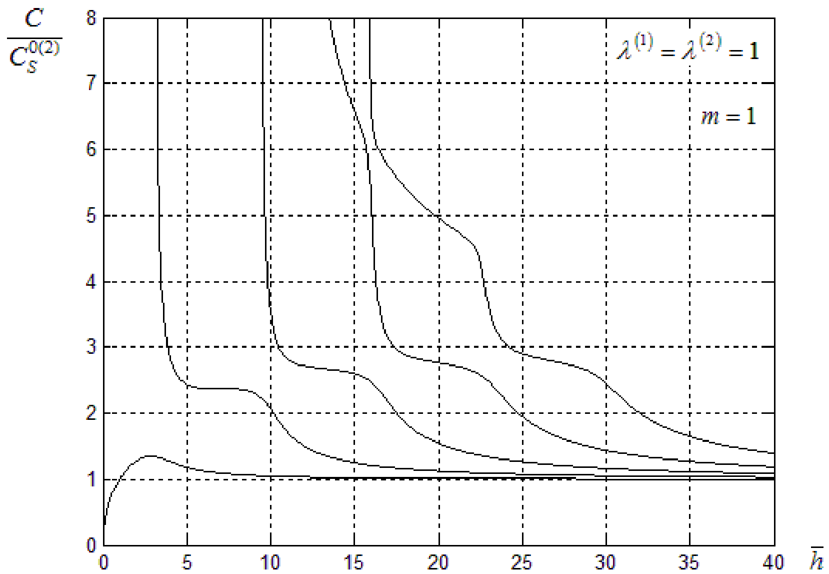

Рис. 1. Залежність фазової швидкості від частоти при ненапруженому початковому стані

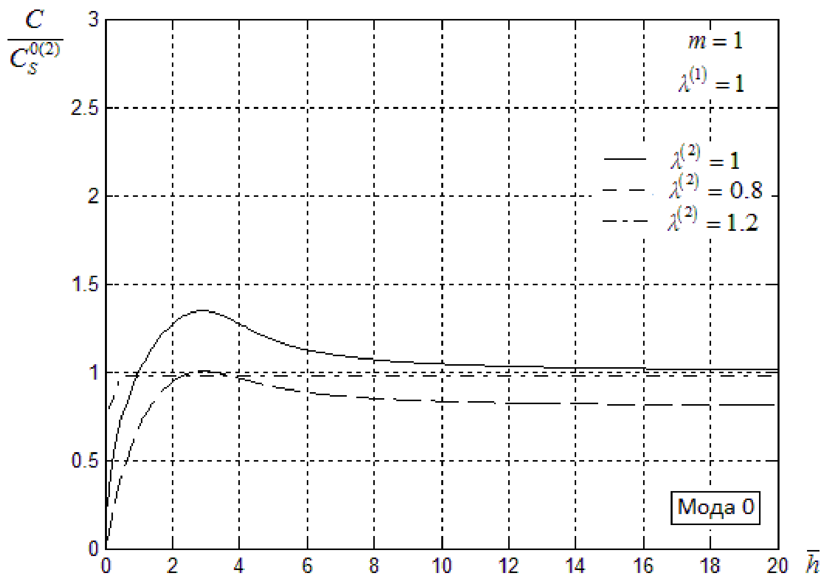

Рис. 2. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 0)

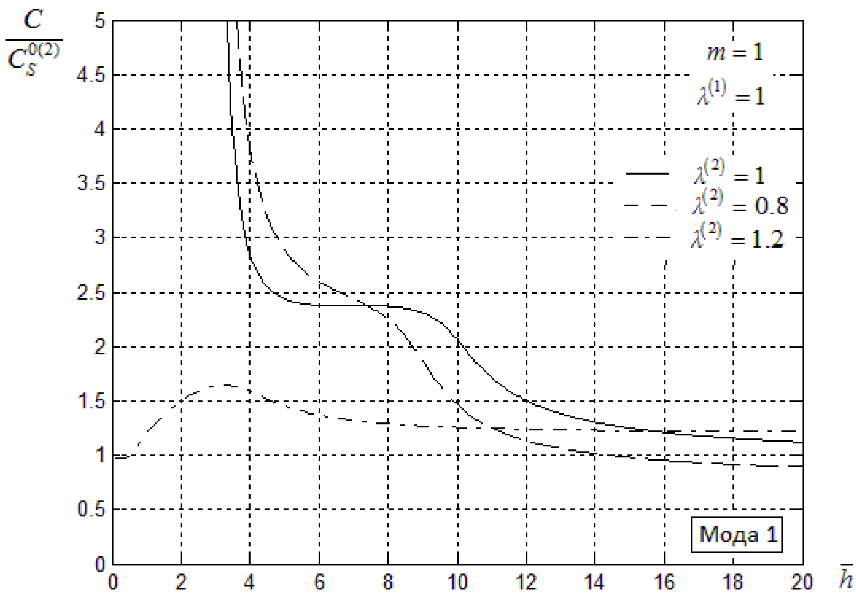

Рис. 3. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 1)

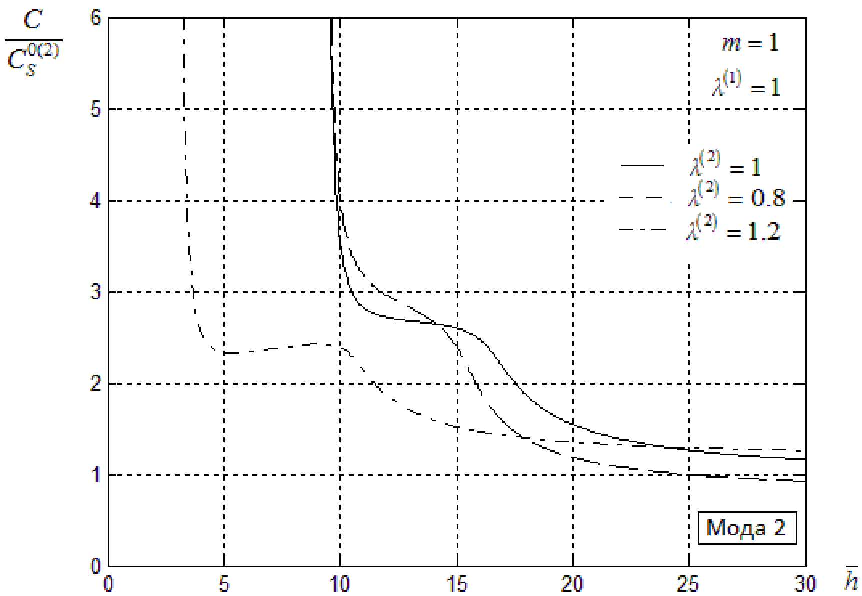

Рис. 4. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 2)

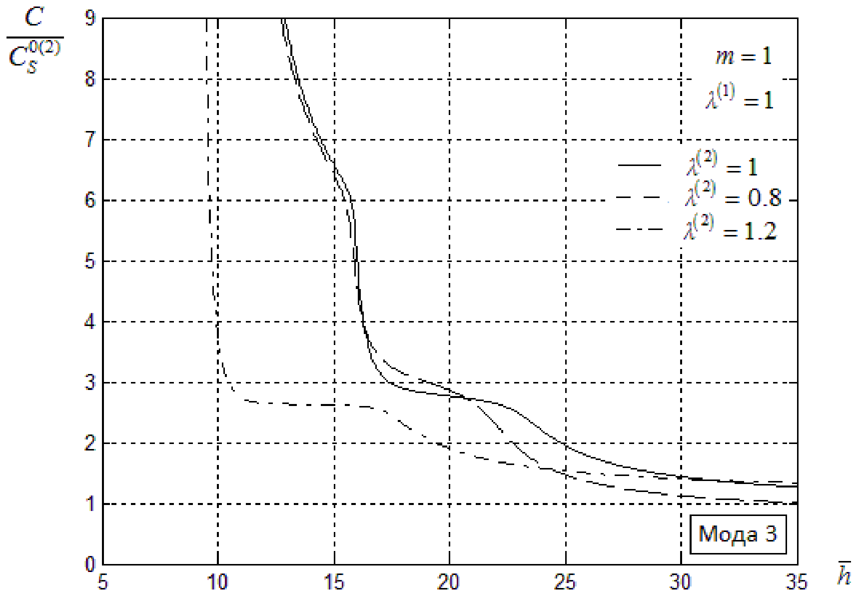

Рис. 5. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 3)

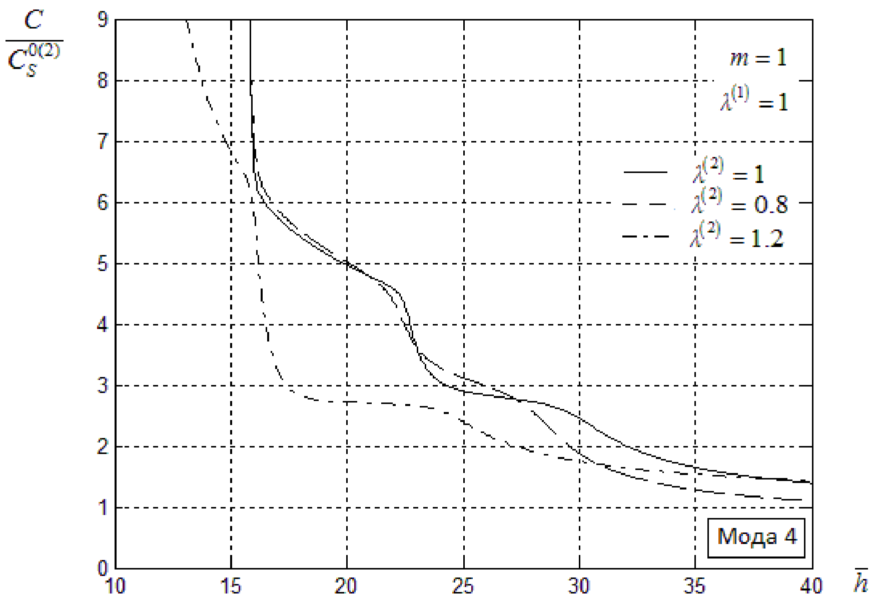

Рис. 6. Залежність фазової швидкості від частоти (мода 4)

ВИСНОВКИ

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв’язку задачі про поширення вісесиметричних хвиль у шаруватому нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення. Для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара проведені чисельні дослідження і аналіз отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Кхань Л. М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1976. 12, № 1. С. 3–11.
2. Гузь А. Н., Ситенок Н. А., Жук А. П. Осесимметричные упругие волны в слоистых сжимаемых композитных материалах с начальными напряженими. *Прикл. механика*. 1984. 20, № 7. С. 20–30.
3. Кхань Л. М. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформаціями. *Прикл. механика*. 1977. 13, № 9. С. 21–26.
4. Панасюк О. М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. *Доп. НАН України*. 2010. № 1. С. 65–70.
5. Панасюк О. Н. Распространение квазипоперечных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями с учетом проскальзывания. *Прикл. механика*. 2011. 47, № 3. С. 59–66.

6. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
7. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия: Lambert Academic Publishing, 2015. 468 с.
8. Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
9. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряженими. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 1. С. 35–78.
10. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряженими. *Прикл. механика*. 1979. 15, № 4. С. 3–23.

REFERENCES

1. Guz’, A. N. & Khanh, L. M. (1976). Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations. Soviet Applied Mechanics, Vol. 12, Iss. 1, pp. 1-7.
2. Guz’, A. N., Sitenok, N. A. & Zhuk, A. P. (1984). Axially symmetric elastic waves in a laminated compressible composite material with initial stresses. Soviet Applied Mechanics, Vol. 20, Iss. 7, pp. 589-596.
3. Khanh L. M. (1977). Wave propagation along layers in initially strained laminated compressible materials. Soviet Applied Mechanics, Vol. 13, Iss. 9, pp. 868-873.
4. Panasyuk, O. M. (2010). On the propagation of waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at a slipping of layers. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 1, pp. 65-70 (in Ukrainian).
5. Panasyuk, O. N. (2011). Propagation of quasishear waves in prestressed materials with unbonded layers. International Applied Mechanics, Vol. 47, Iss. 3, pp. 276-283.
6. Guz’, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: “A.S.K” (in Russian).
7. Guz’, A., Babich, S. & Glukhov, Yu. (2015). Mixed problems for elastic foundation with initial stresses. Germany: Lambert Academic Publishing (in Russian).
8. Guz’, A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1986). Waves in a Layer with Initial Stresses. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Guz’, A. N. (2002). Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses. International Applied Mechanics, Vol. 38, Iss. 1, pp. 23-59.
10. Babich, S. Yu., Guz’, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. Soviet Applied Mechanics, Vol. 15, Iss. 4, pp. 277-291.

UDC 539.3

AN ARC CRACK AT THE INTERFACE BETWEEN TWO ELECTROSTRICTIVE MATERIALS

Hodes A. Yu., Loboda V. V.

Dnepropetrovsk National University,
Gagarina, 72, Dnepr, 49050, Ukraine

alinegg@mail.ru, lobvv@ua.fm

Exact analytical solution for an electrostrictive plane with circular electrostrictive inclusion and an arc crack at the materials interface under the influence of general mechanical and electrical loadings at infinity is obtained. It is assumed that both materials are isotropic and linear elastic, the crack faces don’t interact with each other and are permeable to an electric field. The problem is considered as an uncoupled problem of electroelasticity. Solution of electrostatics problem is obtained by complex potentials method. Boundary problem of electroelasticity for four complex potentials that are analogues of Kolosov-Muskhelishvili potentials is reduced to the problem of linear relationship at the crack. Unknown constants in general solution of this problem are determined from the boundary conditions at infinity and the restrictions imposed on stresses and displacements. Analytical expressions for the stress-strain state in the whole plane, in particular for the crack opening, normal and shear stresses at materials interface and the stress intensity factors at the crack tips, are found.

Key words: electrostriction, arc crack, problem of linear relationship, stress intensity factor.