

8. Шалабанов А. К. Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1979. № 14. С. 184–190.
9. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Київ: НТУУ «КПІ», 2011. 317 с.

### REFERENCES

1. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, E. V. (2016). Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *Journal of Mathematical Science*, Vol. (212), No. 2, pp. 182-192.
2. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2014). Vilni kolyvannia eliptychnoi obolonky zminnoi tovshchyny, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematika. Mekhanika*, 2(32), pp. 32-37.
3. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Vplyv ekscentrycity eliptychnoi obolonky na rozpodil yii dynamichnykh kharakterystyk, *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 23-28.
4. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, O. V. (2015). Pro vilni kolyvannia tsylindrychnykh obolonok kruhovooho ta nekruhovooho poperechnoho pererizu pry riznykh hranychnykh umovakh. *Visnyk Zaporizhskogo natsionalnogo universytetu, seriia Fizyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 20-28.
5. Lekomtsev, S. V. (2012). Konechno-elementnyie algoritmy rascheta sobstvennykh kolebaniy trekhmernykh obolochek, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 5, No. 2, pp. 233-243.
6. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Khorishko V. V. & Borisenko, M. Yu. (2014). Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness, *International applied mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 68-74.
7. Budak, V. D., Grigorenko, O. Ya., Borisenko, M. Yu., Prygoda, O. P. & Boychuk, O. V. (2015). Vyznachennia vlasnykh chastot tonkostinnoi obolonky nekruhovooho poperechnoho pererizu metodom stroboholohrafichnoi interferometrii. *Problemy vychislitel'noi mekhaniki i prochnosti konstruksii*, No. 24, pp. 18-25.
8. Shalabanov, A. K. (1979). Issledovanie vysokochastotnykh kolebaniy tsilindricheskiy obolochek na osnove dvukh metodov golograficheskoy interferometrii, *Issled. po teor. plastin i obolochek*, No. 14, pp. 184-190.
9. Rudakov, K. N. (2011). FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksii. Kiev: NTUU «KPI».

УДК 539.3

## НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ Й АКУСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Григор'єва Л. О.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
вул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Розвинуто чисельний спосіб дослідження нестационарного напружено-деформівного стану плоских багатошарових електромеханічних перетворювачів з електродованими поверхнями спряження при електричних збуреннях. Проводиться дослідження параметрів електромеханічного стану перетворювача в динаміці в залежності від кількості електродованих шарів та оцінка впливу пружного шару та акустичного середовища.

*Ключові слова: п'єзокерамічний перетворювач, нестационарні коливання, електричне збурення, багатошаровий п'єзоелемент.*

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА С УЧЕТОМ УПРУГОГО ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ И АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Григорьева Л. А.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. П. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Развит численный способ исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния плоских многослойных электромеханических преобразователей с электродированными поверхностями сопряжения при электрических возмущениях. Проводится исследование параметров электромеханического состояния преобразователя в динамике в зависимости от количества слоев и оценка влияния упругого слоя и акустической среды.

*Ключевые слова: пьезокерамический преобразователь, нестационарные колебания, электрическое возмущение, многослойный пьезоэлемент.*

## UNSTEADY VIBRATIONS OF PLANE MULTILAYERED PIEZOELEMENT IN VIEW OF ELASTIC REINFORCING LAYER AND AN ACOUSTIC MEDIUM

Grigoryeva L. O.

*S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
P. Nesterov str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

[l\\_grigoryeva@ukr.net](mailto:l_grigoryeva@ukr.net)

Numerical study of unsteady stress-strain state of multilayered planar electromechanical transformers with elektroded coupling surfaces at electrical disturbances are developed. A study of electromechanical transducer state options dynamics depending on the number of elektroded layers with the same polarization direction and impact of elastic layer and the acoustic environment assessment is provided.

*Key words: piezoceramic transducer, transient vibrations, electrical disturbances, multilayered piezo element.*

### ВСТУП

Зараз у промисловості широко застосовуються технічні пристрої, у яких використовується явище п'єзоєфекту, що пояснює великий інтерес до п'єзоелектричних матеріалів і приладів, створених на їх основі. Геометричні розміри і форма п'єзокерамічних елементів конструкцій визначаються їх призначенням і типом навантаження. Останнім часом значного поширення в акустoeлектроніці набули багат шарові п'єзоелементи пластинчастої форми, що експлуатуються в різних режимах, у тому числі нестационарних. У зв'язку з цим актуальною проблемою стало дослідження нестационарного деформування та вибір оптимальних режимів експлуатації та конфігурації таких перетворювачів.

Фундаментальні підходи до постановки та розв'язання задач нестационарної гідропружності описано в класичній літературі [1, 2 та ін.]. Двовимірні коливання пружного шару досліджувались в [3]. Товщинні коливання однорідних п'єзоелектричних тіл досліджувались в [4-7]. У [8, 9] побудовано аналітичний розв'язок задачі про коливання багат шарового п'єзокерамічного пакету з зустрічною поляризацією суміжних шарів при електричних збуреннях з урахуванням зовнішнього пружного шару та акустичного середовища. На жаль, у [8] надано лише результати, отримані для пакету з вільною поверхнею, в [9] їх немає.

У роботі розглядаються коливання п'єзокерамічних багат шарових плоских тіл, планарні розміри яких набагато більші за товщину. В такому випадку перш за все виникають товщинні нестационарні коливання, що носять високочастотний характер порівняно з планарними коливаннями, вплив яких проявляється через певну кількість пробігів хвилі по товщині пластини. У статті побудовано чисельний спосіб розв'язання задачі про нестационарні товщинні коливання плоского багат шарового нескінченного у площині

п'єзокерамічного тіла з паралельною поляризацією шарів та досліджено динаміку зміни параметрів електромеханічного стану перетворювача залежно від кількості електродованих шарів з урахуванням впливу пружного підкріплюючого шару та акустичного середовища.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багат шаровий поляризований по товщині п'єзоелектричний плоский елемент, який складається з  $n$  шарів різних п'єзокерамічних матеріалів товщиною  $h$  кожен. Одна поверхня елемента жорстко закріплена, інша підкріплена пружним шаром товщиною  $l$  та стикається з півпростором ідеальної стисливої рідини. Коливання кожного шару описуються рівняннями руху і рівняннями для електричної індукції

$$\rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_x^k}{\partial x} = 0, \quad i=1..n \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях, що відповідають радіальній поляризації всього пакету

$$\sigma_x^k = c_{33}^{E k} \frac{\partial u^k}{\partial x} + e_{33}^k \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}; \quad D_x^k = e_{33}^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - \varepsilon_{33}^{S k} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}. \quad (2)$$

Коливання ізотропного пружного підкріплюючого шару описуються рівнянням

$$\rho_{n+1} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x^{n+1}}{\partial x}, \quad \sigma_x^{n+1} = E \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}. \quad (3)$$

Рівняння руху акустичного середовища

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad y \in (0, \infty). \quad (4)$$

Між шарами виконуються умови повного контакту

$$u^k(hk) = u^{k+1}(hk), \quad \sigma_x^k(hk) = \sigma_x^{k+1}(hk), \quad k=1..n, \quad (5)$$

$$u^n(hn) = u^{n+1}(hn), \quad \sigma_x^n(hn) = \sigma_x^{n+1}(hn),$$

між пружним шаром та акустичним середовищем виконується умова нерозривності

$$\sigma_x^{n+1}(hn+l) = -p(0,t) = \gamma \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{y=0}, \quad \left. \frac{du}{dt}(hn+l,t) = \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{y=0}. \quad (6)$$

Поверхні розділу шарів електродовані, до них підводиться різниця потенціалів

$$\varphi(hk) = (-1)^{k+1} H(t), \quad k=0..n. \quad (7)$$

Початкові умови приймаємо нульовими:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \quad (8)$$

Тут  $u^k(x,t)$  і  $\sigma_x^k(x,t)$  – механічні переміщення і напруження,  $D_x^k(x,t)$  – компонента вектора електричної індукції в напрямку осі  $ox$ ;  $\varphi^k(x,t)$  – електричний потенціал;  $\rho^k$  – щільність матеріалу;  $c_{33}^{E k}$  – модуль пружності при постійному електричному полі;  $\varepsilon_{33}^{S k}$  – діелектрична проникність при постійній деформації;  $e_{33}^k$  – п'єзоелектричний модуль  $k$ -го шару,  $E$ ,  $\rho_{n+1}$  – модуль Юнга і щільність пружного шару,  $\psi$  - хвильовий потенціал,  $\gamma$ ,  $c_a$  – щільність і швидкість поширення хвилі в акустичному просторі.

Диференціальні рівняння (1) з урахуванням матеріальних співвідношень (2)-(3) можна звести до рівнянь

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = c_k^2 \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^2} = \frac{e_{33}^k}{\varepsilon_{33}^{S k}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Тут стала  $c_k = \sqrt{\frac{1}{\rho^k} \left( c_{33}^{E k} + \frac{e_{33}^{k 2}}{\varepsilon_{33}^{S k}} \right)}$  – швидкість поширення електропружної хвилі в  $k$ -му шарі.

Приведемо систему рівнянь електропружності (1)-(3) і граничні умови (5) до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{c_{00}}; \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}; \quad \bar{D}_x = \frac{D_x}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{c}_k = \frac{c_k}{c_{k00}}; \\ \bar{V}(\bar{t}) = V(\bar{t} \cdot t_h) \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{c}_{33} = \frac{c_{33}^E}{c_{00}}; \quad \bar{e}_{33} = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \frac{\varepsilon_{33}^S}{\varepsilon_{00}}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\rho_{00}, c_{00}, \varepsilon_{00}, t_h = h/c_{k00}$  – нормуючі величини, наприклад параметри першого шару. Такі позначення дозволяють зберегти первинний вигляд рівнянь, початкових і граничних умов. Далі знаки безрозмірності опущені, і все результати представлені в безрозмірному вигляді.

Інтегруючи (10) при електричних граничних умовах (7), отримуємо вираз для електричного потенціалу через переміщення

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial x} = \frac{e_{33}^k}{\varepsilon_{33}^{S k}} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} - \frac{u^k(kh) - u^k((k-1)h)}{h} \right) + \frac{2}{h} (-1)^{k+1} H(t).$$

Тепер виразу для механічного напруження можна надати вигляду ( $e_k = e_{33}^{k 2} / \varepsilon_{33}^{S k}, h = 1$ )

$$\sigma_x^k = c_{33}^{E k} \frac{\partial u^k}{\partial x} + e^k \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} - u^k(kh) + u^k((k-1)h) \right) + 2e_{33}^k (-1)^{k+1} H(t). \quad (12)$$

Умова спряження  $\sigma_x^k(k) = \sigma_x^{k+1}(k)$  (12) набуває вигляду ( $c_{33}^* = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}$ ):

$$\begin{aligned} c_{33}^{* k+1} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x}(k) - c_{33}^{* k} \frac{\partial u^k}{\partial x}(k) + (-e_{k+1} u^{k+1}(k+1) + (e_{k+1} + e_k) u^{k+1}(k) - e_k u^k(k-1)) = \\ = 2(e_{33}^k + e_{33}^{k+1}) (-1)^{k+1} H(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Вводимо розбиття  $x_{(k-1)m+i} = ((k-1)m+i-1)dx, i=0..m, k=1, \dots, n, dx=1/m$ , та шукаємо розв'язок у вигляді дискретних значень  $u^k(x_{(k-1)m+i}) = u_{(k-1)m+i}$ . Рівняння руху (9) записуємо за допомогою центральних різниць ( $i=1..m+1, k=1..n+1$ , при  $k=n+1 \quad dx=l/m$ ):

$$\frac{d^2 u_{(k-1)m+i}}{dt^2} = c_k^2 \frac{u_{(k-1)m+i-1} - 2u_{(k-1)m+i} + u_{(k-1)m+i+1}}{dx^2}. \quad (14)$$

Умова спряження (13) із застосуванням односторонніх скінченних різниць другого порядку точності ( $k = 1 \dots n-1$ )

$$\frac{c_{33}^{*k+1}}{2dx}(-3u_{km} + 4u_{km+1} - u_{km+2}) - \frac{c_{33}^{*k}}{2dx}(3u_{km} - 4u_{km-1} + u_{km-2}) +$$

$$+ (-2_{k+1}u_{(k+1)m} + (e_{k+1} + e_k)u_{km} - e_k u_{(k-1)m}) - 2(e_{33}^k + e_{33}^{k+1})(-1)^{k+1} H(t), \tag{15}$$

умова спряження з пружним шаром

$$c_{33}^{*k} \frac{1}{2dx}(3u_{nm} - 4u_{nm-1} + u_{nm-2}) - E \frac{1}{2dx}(-3u_{nm} + 4u_{nm+1} - u_{nm+2}) +$$

$$+ e_n(-u_{nm} + u_{(n-1)m}) = -2e_{33}^n (-1)^{n+1} H(t). \tag{16}$$

Оскільки в акустичному напівпросторі виникає тільки пряма хвиля тиску, загальний розв’язок хвильового рівняння (4) через метод характеристик має вигляд

$$\psi(x, t) = f(c_a t - y),$$

де  $f(\cdot)$  – довільна функція, що задовольняє граничні умови. З умов (6) маємо

$$\sigma_x^{n+1}(hn+l, t) = \gamma c_a f'(c_a t), \quad \frac{du^{n+1}}{dt}(hn+l, t) = -f'(c_a t).$$

Отримуємо імпедансну граничну умову

$$\sigma_{rr}^{n+1}(hn+l, t) + z_a v^{n+1}(hn+l, t) = 0, \tag{17}$$

де  $z_a$  – питомий акустичний опір середовища. Імпедансна гранична умова в цій постановці також дає визначення питомого акустичного опору як відносини амплітуди звукового тиску в середовищі до швидкості коливань її частинок при проходженні через середовище звукової хвилі. Тиск і швидкість у середовищі визначаються через функцію  $f'(z) = v^{n+1}\left(hn+l, \frac{z}{c_a}\right)$  як

$$p(y, t) = z_a v^{n+1}\left(hn+l, t - \frac{y}{c_a}\right), \quad v(y, t) = v^{n+1}\left(hn+l, t - \frac{y}{c_a}\right).$$

У безрозмірних змінних (11) з (17) маємо

$$E \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\left(n + \frac{l}{h}\right) + z_a \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t}\left(n + \frac{l}{h}\right) = 0.$$

Відповідне різницеве рівняння

$$\frac{du_{(n+1)m}}{dt} = -\frac{E}{z_a 2dx_n}(3u_{(n+1)m} - 4u_{(n+1)m-1} + u_{(n+1)m-2}). \tag{18}$$

Систему рівнянь (14), (18), доповнену (8), (15)-(17), зручно розв’язувати за допомогою методу Рунге-Кутта або явних і неявних різницевих схем за часом. Тестування запропонованого методу здійснювалося шляхом згущення сітки, порівняння результатів, отриманих різними чисельними схемами за часом та в частинному випадку з результатами, представленими в [8].

### ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо коливання багатошарового пакета товщиною  $nh$  з кераміки PZT-4

$$c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_{33} = 15,1 \text{ Кл/м}^2, \quad \varepsilon_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, \quad \rho = 7500 \text{ кг/м}^3,$$

жорстко закріпленого при  $x=0$  та при  $x=nh$  підкріпленого пружним шаром товщиною  $l$  з параметрами  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\rho_{n+1} = 7850 \text{ кг/м}^3$ . Питомий акустичний опір середовища  $z_a = 150 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ . При обезрозміренні вибираємо  $c_{00} = c_{33}^E$ ,  $\rho_{00} = \rho$ ,  $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{33}^S$ ,  $c_{k00} = c_k$ .

Оцінити вплив підкріплюючого пружного шару та акустичного середовища ми можемо за допомогою рис. 1. Бачимо, що вільна поверхня п'єзоелемента набуває більше ніж удвічі більших переміщень, ніж поверхня з пружним шаром та з урахуванням акустичного середовища. Переміщення поверхні елемента з пружним шаром  $l = h/4$  виявились меншими, ніж з  $l = h/2$ .

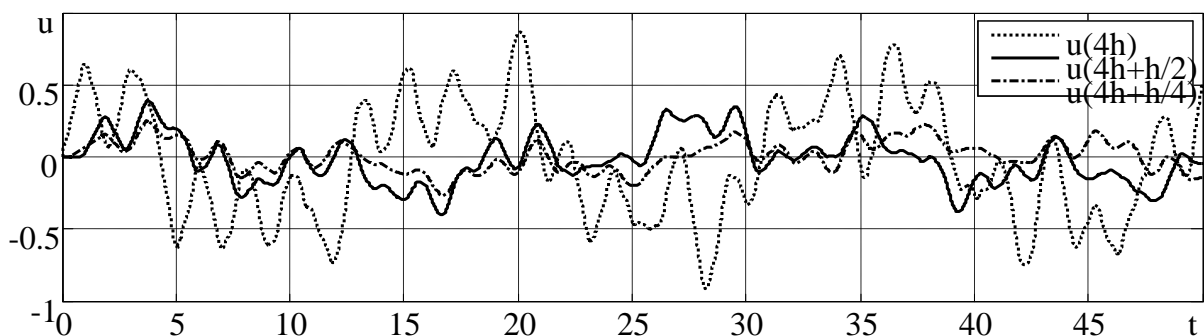


Рис. 1. Переміщення незакріпленої поверхні чотиришарового елемента з вільною поверхнею та з урахуванням шарів різної товщини та акустичного середовища

Напруження в закріпленні розглянутих шарів ілюструються рис. 2. Бачимо, що на початковому інтервалі напруження для всіх випадків співпадають, потім проявляється вплив відбитої від незакріпленої поверхні хвилі. Час виникнення відхилень різний у зв'язку з різною товщиною п'єзоелемента разом з пружним шаром. Максимальні значення напружень для всіх випадків майже однакові, але виникають у різні моменти часу.

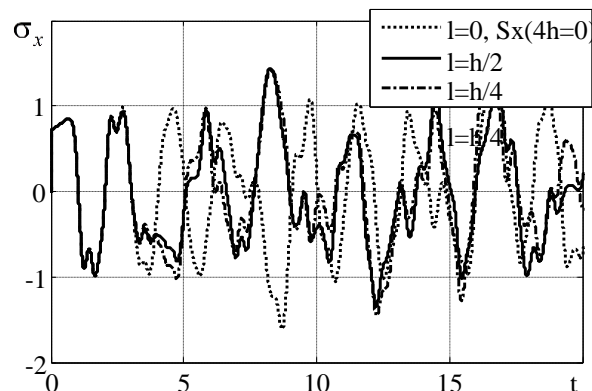


Рис. 2. Напруження в закріпленні для чотиришарового елемента з вільною поверхнею та з урахуванням шарів різної товщини та зовнішнього середовища

На рис. 3 наведено переміщення зовнішньої поверхні для п'єзоелементів з різною кількістю шарів. Бачимо, що при непарних  $n$  п'єзоелемент набуває набагато більших переміщень, ніж при парних. Це пояснюється протилежним напрямком коливань сусідніх шарів при однаковому напрямку поляризації. Отже, для отримання максимальних переміщень при паралельній поляризації потрібно використовувати п'єзоелементи з непарною кількістю шарів.

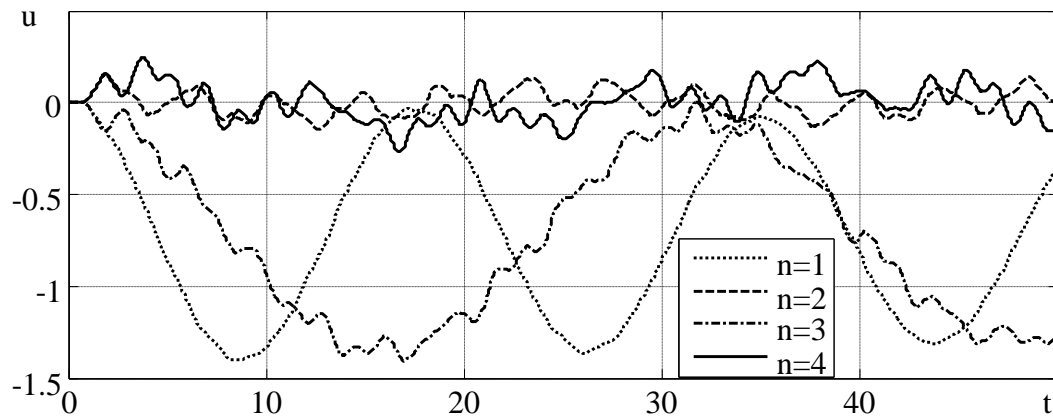


Рис. 3. Коливання зовнішньої поверхні п'єзоелементів з різною кількістю шарів з врахуванням пружного шару  $l = h/4$  та акустичного середовища

### ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаєв А. Э. Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вища школа, 1984. 206 с.
2. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев: Наукова думка, 1979. 184 с.
3. Кубенко В. Д. Нестационарное деформирование упругого слоя при смешанных граничных условиях. *Прикл. механика*. 2016. Т. 52, № 6. С. 3–25.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезокерамических тел. Киев: Наукова думка, 1990. 228 с.
5. Григорьева Л. О. Электромеханические нестационарные толщинные колебания пьезокерамического слоя. *Прикл. механика*. 2010. Т. 46, № 2. С. 46–52.
6. Shulga M. O., Grigoryeva L. O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*. New York: Nova Science Publishers. 2010. P. 179–204.
7. Шульга Н. А., Григорьева Л. О. Сравнительный анализ упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами. *Прикл. механика*. 2011. Т. 47, № 2. С. 86–95.
8. Бабаєв А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. Киев: Наук. думка, 1990. 176с.
9. Бабаєв О. А., Штефан Н. І., Гнатейко Н. В. Збудження багат шарового п'єзокерамічного пакету нестационарним електричним сигналом. *Молодий вчений*. 2016. № 3(30). С. 296–299.

### REFERENCES

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D. & Babaev A. E. (1984). Hydroelasticity of the systems of shells. Kiev: Vyshcha shkola.
2. Kubenko, V. D. (1979). Non-stationary co-operating of elements of constructions with an environment. Kiev: Naukova dumka.
3. Kubenko, V. D. (2016). Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*, Vol. 52, Iss. 6, pp. 3-25.
4. Shul'ga, N. A. & Bolkisev, A.M. (1990). Vibrations of piezoceramic bodies. Kiev: Naukova dumka.
5. Grigor'eva, L. O. (2010). Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer. *International Applied Mechanics*, Vol. 46, Iss. 2, pp. 159-164.
6. Shulga, M. O. & Grigoryeva, L.O. (2010). Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*, pp. 179-204. New York: Nova Science Publishers.
7. Shul'ga, N. A. & Grigor'eva, L. O. (2011). Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 47, No. 2, pp. 177-185.
8. Babaev, A. E. (1990). Non-stationary waves in continuous environments with the system of catopters. Kiev: Nauk. dumka.
9. Babajev, O. A., Shtefan, N. I. & Gnatejko, N. V. (2016). Excitation multilayer piezoceramic package nonstationary electrical signals. *Molodyj vchenyj*, No. 3(30), pp. 296-299.