12. Saryichev, V. A., Sazonov, V. V. & Zlatoustov, V. A. (1977). Periodic oscillations of the satellite in the plane of the elliptical orbit. Kosmicheskie issledovaniya, Vol. 15, No. 6, pp. 809-834.
13. Bruno, A. D. & Varin, V. P. (1977). Limit problems for the equation of oscillation of a satellite. Celestial Mechanics, Vol. 66, No. 1, pp. 17-68.
14. Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis & Jean-Claude Golinval (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing, 20, pp. 505-592.
15. Gristchak, V. Z., Gristchak, D. D. & Fatieieva, Yu. A. (2016). Hybrid asymptotic method. Theory and applications. Zaporizhzhye: ZNU.
16. Gristchak, V. Z. & Gristchak, D. D. (2013). More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. Proc. 4-th Int. Conf. “Nonlinear Dynamics” (pp. 46-50), Sevastopol.
17. Gristchak, D. D. (2015). Vibration of Spacecraft Structure with Joint-up Dynamic Absorber and Periodic Damping Coefficients Near Disturbed Surface. Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures, Vol. 24, pp. 24-27.
18. Olkov, V. V. & Gusev, I. N. (1982). Dynamic stability of an aircraft near an agitated surface. Perturbation methods in mechanics (pp. 105-111). Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie.
19. Gusev, I. N. (1979). Transitional regimes of the aircraft in the plane of roll. Perturbation methods in mechanics (pp. 171-180). Irkutsk.
20. Gristchak, D. D. Nonlinear Vibration of Launch Vehicle Carrying a Moving Time-Dependent Mass. Proceedings of the 5-th International Conference on Nonlinear Dynamics ND–KhPI 2016, (pp. 294-297), Kharkov.

УДК 519.6

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНОГО ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина

stroller@rambler.ru

В работе устанавливается возможность применения итеративного обобщённого метода Канторовича к анализу уравнений Кармана. Доказывается, что последовательность приближений к решению, порождаемая указанным методом, сходится в норме специального энергетического пространства.

Ключевые слова: итеративный обобщённый метод Канторовича, нелинейные краевые задачи, уравнения Кармана.

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАТИВНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ПРИ РОЗВ’ЯЗАННІ РІВНЯНЬ КАРМАНА

Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, просп. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна

stroller@rambler.ru

У роботі встановлюється можливість застосування ітеративного узагальненого методу Канторовича до аналізу рівнянь Кармана. Доводиться, що послідовність наближень до розв’язку, що породжується зазначеним методом, збігається у нормі спеціального енергетичного простору.

Ключові слова: ітеративний узагальнений метод Канторовича, нелінійні крайові задачі, рівняння Кармана.

CONVERGENCE OF THE ITERATIVE EXTENDED KANTOROVICH METHOD FOR VON KARMAN EQUATIONS

Gromov V. A., Ph D (Phys.-Math.)

Oles Honchar Dnipro national university,
Gagarina, av., 72, Dnepropetrovsk, Ukraine

stroller@rambler.ru

Von Karman equations are formulated (in the orthogonal coordinates (x_1, x_2)) as a system of partial differential equations (1), (2), where $\lambda = const$ is a function of an external influence; k_1, k_2, a_1, a_2 are positive constants. The problem is defined on a close cylindrical domain. Hereinafter the following notations (2) are used. The problem is completed by boundary conditions $u_1|_\Gamma = 0$, $\left.{\partial^2 u_1}/{\partial x_1^2}\right|_\Gamma = 0$, $u_2|_\Gamma = 0$, $\left.{\partial u_2}/{\partial x_1}\right|_\Gamma = 0$ for parts of the boundary $x_1 = const$ and by periodicity conditions defined on an arbitrary line $x_2 = const$.

The generalized solution of the problem under study is a pair of functions $U = (u_1, u_2)$, $u_1 \in H_1(\Omega)$, $u_2 \in H_0(\Omega)$ such that (3), (4) hold true for arbitrary functions $v_1 \in H_1(\Omega)$, $v_2 \in H_0(\Omega)$, where $H_1(\Omega)$ is the Sobolev's space, the closure of a set of continuous (with 2 derivatives) functions in the norm $\iint\limits_\Omega K(\alpha,\alpha)\,dx_1 dx_2 \equiv \|\alpha\|_H^2$; $H_0(\Omega)$ is the Sobolev's space, the closure (in the same norm) of a set of continuous (with 2 derivatives) functions satisfying homogenous boundary conditions $\left\{ \alpha|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \right\}$.

To find solutions of non-linear boundary problem (1), one constructs a sequence of approximations of the generalized solutions (3), (4) with the employment of the representation (7) of the unknowns in the algorithm iterations. For odd iterations, the functions $h_j^{(i)}(x_1) \equiv h_j^{(i-1)}(x_1)$ are calculated in the previous, the $i-1$-th iteration, and the unknowns evaluated from these equations are $g_j^{(i)}(x_2)$; arbitrary functions v_j are presented as $v_j = h_j^{(i-1)}(x_1)\varphi_j(x_2)$, where $\varphi_j(x_2)$ are arbitrary functions of a single variable x_2. Similarly, for even iterations, the functions $g_j^{(i)}(x_2) \equiv g_j^{(i-1)}(x_2)$ are known, and the unknowns to be found are $h_j^{(i)}(x_1)$; in that case v_j are presented as $v_j = \psi_j(x_1) g_j^{(i-1)}(x_2)$, where $\psi_j(x_1)$ are arbitrary functions of a single variable x_1.

Representation (7) allows reducing equations under study (1) to a sequence of boundary problems for ordinary differential equations. On the other hand, it necessitates to consider specific 'weighted' functional spaces H_g, $g \in W_2^2([c;d])$, determined as a closure of continuous functions $C^{(2)}([a;b])$ in the specific norm.

The spaces introduced make it possible to furnish a means of operator expression of single-dimensional non-linear boundary problems for iterations of the method under discussion (17), (18). What follows is a sequence of statements to analyze convergence of the IGKM for von Karman equations.

Lemma 1. If a function $\alpha \in H_p$ can be presented as $\alpha(x_1, x_2) = h(x_1) g(x_2)$, then boundednes of α in H_p is derived from boundednes of $h(x_1)$, $g(x_2)$ in $W_2^{(2)}$.

Lemma 2. The presentation (20), (21) holds true when P_s, G_s are homogeneous operators of order s.

Theorem 1. Each operator P, N, P_S, N_S ($s = 1,2$) is strongly continuous in H_{h_1}, H_{g_1} provided sequences $\{h_1^{(i)}\}$, $\{g_1^{(i)}\}$ are bounded in $W_2^{(2)}\left(\left[x_1^{\min}; x_1^{\max}\right]\right)$, $W_2^{(2)}\left(\left[x_2^{\min}; x_2^{\max}\right]\right)$ *respectively*.

Theorem 2. Under hypotheses of Theorem 1 each *operator* G, H, G_S, H_S ($s = 1,2,3$), is strongly continuous in H_{h_2}, H_{g_2} respectively.

Theorem 3. Provided sequences $\{g_1^{(i)}\}$, $\{h_1^{(i)}\}$ of IGKM approximations are bounded in W_2^2. $\{h_1^{(i)} g_1^{(i)}\}$, $\{h_2^{(i)} g_2^{(i)}\}$ are strongly convergent in $H_1 \times H_0$.

Key words: the iterative extended Kantorovich method, non-linear boundary problems, von Karman equations.

ВВЕДЕНИЕ

Значительное число процессов и явлений, описываемых уравнениями Кармана, обуславливает постоянный, незатухающий интерес к исследованию возможных решений соответствующей нелинейной краевой задачи, построение её бифуркационной картины. Несмотря на широкое распространение метода конечных (в меньшей степени – граничных) элементов в расчётной практике, их применение для анализа поведения систем связанных уравнений Кармана встречается со значительными трудностями. Данное обстоятельство обуславливает всё возрастающий интерес к методам, не использующим дискретизацию области. В обзорной работе [3] рассматривается класс методов, основанных на приближении неизвестных функций задачи в окрестности узлов дискретизации, функциями с конечной областью определения, а также применение методов данного класса к анализу нагруженных тонкостенных систем с расслоениями.

Другая группа методов решения и анализа нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных связана с построением адаптивного базиса: в отличие от классических методов численного анализа, где базис в процессе решения задачи остаётся фиксированным и не зависит от свойств решения (меняются лишь значения коэффициентов базиса), в методах данной группы базисные функции подстраиваются тем или иным образом под особенности решения рассматриваемой задачи. Так, в работе [1] был предложен метод адаптивной вейвлет-коллокации. Альтернативный подход к построению оптимального базиса для решения нелинейных краевых задач представляет собой обобщённый метод Канторовича [2]. В рамках данного метода неизвестные функции задачи представляются в виде суммы произведений неизвестных функций одной переменной, что позволяет свести решение нелинейной краевой задачи для уравнений в частных производных к последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение данного метода к нелинейным задачам теории тонкостенных систем приводит к необходимости отыскания решения в виде итерационного процесса [4], в основе которого лежит отыскание решений одномерных нелинейных краевых задач методом Ньютона-Канторовича – итеративный обобщённый метод Канторовича.

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Уравнения Кармана (в ортогональной системе координат (x_1, x_2)) формулируются как система нелинейных уравнений в частных производных вида:

$$a_1\nabla^4 u_1 + L(u_1,u_2) - \nabla_k^2 u_2 = \lambda ,$$

$$a_2\nabla^4 u_2 - \frac{1}{2}L(u_1,u_1) - \nabla_k^2 u_1 = 0 , \tag{1}$$

где $\lambda = const$ – функция, описывающая внешнее воздействие; k_1, k_2, a_1, a_2 – положительные константы. Задача рассматривается на замкнутой цилиндрической области $\Omega = \left\{x_1^{\min} \le x_1 \le x_1^{\max}; x_2^{\min} \le x_2 \le x_2^{\max}, x_2^{\min} \equiv x_2^{\max}\right\}$, ограниченной контуром $\Gamma \equiv \partial\Omega = \left\{x_1 = x_1^{\min}, x_2^{\min} \le x_2 \le x_2^{\max}\right\} \cup \left\{x_1 = x_1^{\max}, x_2^{\min} \le x_2 \le x_2^{\max}\right\}$. Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$\nabla_k^2\alpha \equiv k_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} + k_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2} ; \tag{2}$$

$$L(\alpha,\beta) \equiv \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2} ;$$

$$K(\alpha,\beta) \equiv \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2} + \mu\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}\right] + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2} + 2(1-\mu)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2};$$

$$Q_1(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \left[\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial x_1};$$

$$Q_2(\alpha,\beta) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}.$$

Задача должна быть дополнена краевыми условиями $u_1\big|_\Gamma = 0$, $\left.\partial^2 u_1 \big/ \partial x_1^2\right|_\Gamma = 0$, $u_2\big|_\Gamma = 0$, $\left.\partial u_2 \big/ \partial x_1\right|_\Gamma = 0$ на части контура вида $x_1 = const$ и условиями периодичности решения на произвольной, но фиксированной линии вида $x_2 = const$.

Обобщённое решение указанной нелинейной краевой задачи даётся парой функций, $U = (u_1, u_2)$, $u_1 \in H_1(\Omega)$, $u_2 \in H_0(\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1\iint_\Omega K(u_1,v_1)dx_1dx_2 = \iint_\Omega\left[\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1,u_2,v_1) - \lambda v_1\right]dx_1dx_2, \tag{3}$$

$$a_2\iint_\Omega K(u_2,v_2)dx_1dx_2 = \iint_\Omega\left[\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1,v_2)\right]dx_1dx_2 \tag{4}$$

для любых произвольных функций $v_1 \in H_1(\Omega)$, $v_2 \in H_0(\Omega)$, где $W_p^{(l)}(\Omega)$ – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием множества непрерывных (с производными порядка l) функций в норме

$$\|\alpha\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \left[\int_\Omega \sum_{k=0}^{l}\left|\frac{\partial^k\alpha}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right|^p d\Omega\right]^{1/p}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k, \quad n = \dim\Omega;$$

$H_1(\Omega)$ – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием в норме $\iint_\Omega K(\alpha,\alpha)dx_1dx_2 \equiv \|\alpha\|_H^2$ множества непрерывных (с производными порядка 2) функций; $H_0(\Omega)$ – пространство С. Л. Соболева, полученное замыканием в той же норме множества непрерывных (с производными порядка 2) функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям $\left\{\alpha\big|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right|_\Gamma = 0\right\}$. Здесь $\frac{\partial\cdot}{\partial n}$ – производная по направлению, нормальному к контуру Γ.

Для указанных пространств справедливы следующие теоремы вложения [15]: если $\alpha \in H_p$, $p = 0,1$, то

1. $$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_l\partial x_t} \in L_2(\Omega), \quad \left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_l\partial x_t}\right\|_{L_2(\Omega)} \le m\|\alpha\|_{H_1}; \tag{5}$$

2. $$\frac{\partial\alpha}{\partial x_l} \in L_q(\Omega), \quad \text{для любого} \quad q \ge 1 \quad \text{и} \quad \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\right\|_{L_q(\Omega)} \le m\|\alpha\|_{H_1}, \tag{6}$$

причём в силу рефлексивности рассматриваемых пространств оператор вложения действует усиленно непрерывно (т.е. переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся). Подчеркнём, что последнее имеет место и для классических теорем вложения, сформулированных С. Л. Соболевым [5].

Лемма 1. Если функция $\alpha \in H_p$ допускает представление в виде $\alpha(x_1,x_2)=h(x_1)g(x_2)$, то из ограниченности сомножителей $h(x_1)$, $g(x_2)$ в пространствах $W_2^{(2)}$ следует ограниченность α в H_p.

Доказательство. Действительно

$$\left\|\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}\right\|_{H_p}^2=\int(h'')^2dx_1\int g^2dx_2+2\mu\int hh''dx_1\int gg''dx_2+\int h^2dx_1\int(g'')^2dx_2+2(1-\mu)\int(h')^2dx_1\int(g')^2dx_2\le$$

$$\le\left|\int(h'')^2dx_1\int g^2dx_2\right|+|\mu|\left|\int\left[h^2+(h'')^2\right]dx_1\int gg''dx_2\right|+\left|\int h^2dx_1\int(g'')^2dx_2\right|+|2(1-\mu)|\left|\int(h')^2dx_1\int(g')^2dx_2\right|\le$$

$$\le\|h\|_{W_2^2}^2\left[\left|\int g^2dx_2\right|+0.5|\mu|\left|\int\left[g^2+(g'')^2\right]dx_2\right|+\left|\int(g'')^2dx_2\right|+|2(1-\mu)|\left|\int(g')^2dx_2\right|\right]\le m(\mu)\|h\|_{W_2^2}^2\|g\|_{W_2^2}^2 .$$

ИТЕРАТИВНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (1) строится последовательность приближений к обобщённому решению (3), (4) с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде:

$$U(x_1,x_2)=\{u_j(x_1,x_2)\}=\left\{h_j^{(i)}(x_1)g_j^{(i)}(x_2)\right\}\Big|_{j=\overline{1,2}},\quad i\to\infty,$$

$$h_1^{(i)}(x_1)g_1^{(i)}(x_2)\in H_1(\Omega),\quad h_2^{(i)}(x_1)g_2^{(i)}(x_2)\in H_0(\Omega). \tag{7}$$

При этом для нечётных итераций функции $h_j^{(i)}(x_1)\equiv h_j^{(i-1)}(x_1)$ вычислены на предыдущей $i-1$ -й итерации и уравнения разрешаются относительно функций $g_j^{(i)}(x_2)$; произвольные функции v_j представляются в виде $v_j=h_j^{(i-1)}(x_1)\varphi_j(x_2)$, где $\varphi_j(x_2)$ – произвольные функции переменной x_2. Аналогично, для чётных итераций известны функции $g_j^{(i)}(x_2)\equiv g_j^{(i-1)}(x_2)$ и уравнения разрешаются относительно $h_j^{(i)}(x_1)$ с представлением функций v_j в виде $v_j=\psi_j(x_1)g_j^{(i-1)}(x_2)$, где $\psi_j(x_1)$ – произвольные функции переменной x_1.

Представление (7) позволяет представить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (1) в виде последовательности дифференциальных уравнений вида (здесь и далее, для краткости, опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации):

$$\frac{dg_j}{dx_2}=f_j^{x_2}\left(g(x_2),a^{x_1}(x_2),\lambda\right),\quad j=\overline{1,8}, \tag{8}$$

$$\frac{dh_j}{dx_1}=f_j^{x_1}\left(h(x_1),a^{x_2}(x_1),\lambda\right),\quad j=\overline{1,8}. \tag{9}$$

Векторы $h(x_1)$ и $g(x_2)$ определяются как

$$h(x_1)=\left\{h_1(x_1),h_1'(x_1),h_1''(x_1),h_1'''(x_1),h_2(x_1),h_2'(x_1),h_2''(x_1),h_2'''(x_1)\right\},$$

$$g(x_2)=\left\{g_1(x_2),g_1'(x_2),g_1''(x_2),g_1'''(x_2),g_2(x_2),g_2'(x_2),g_2''(x_2),g_2'''(x_2)\right\}.$$

Компоненты векторов $a^{x_1}(x_2)$, $a^{x_2}(x_1)$ представляют собой определённые интегралы от компонент вектор-функций $h(x_1)$ и $g(x_2)$. А именно, компоненты вектора a^{x_2} зависят от $g(x_2)$, компоненты вектора a^{x_1} – от $h(x_1)$. Каждая из задач (8), (9) должна быть дополнена граничными условиями на концах промежутков интегрирования, следующими из граничных условий, сформулированных на контуре Γ.

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши [4].

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (8), (9) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: так определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [5].

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИОМК

Линейность и ограниченность функционала $\iint\limits_{\Omega} \lambda v_1 dx_1 dx_2$ позволяет представить его (в силу теоремы Рисса) в виде $\iint\limits_{\Omega} \lambda v_1 dx_1 dx_2 = \left(u^*, v_1\right)_H$, что позволяет (с помощью замены $u_1 \to u_1 + u^*$) привести соотношения для обобщённого решения к виду:

$$a_1 \iint\limits_{\Omega} K(u_1, v_1)\, dx_1 dx_2 = -a_1 \iint\limits_{\Omega} K\left(u^*, v_1\right) dx_1 dx_2 + \iint\limits_{\Omega} \left[\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1\left(u_1 + u^*, u_2, v_1\right)\right] dx_1 dx_2, \qquad (10)$$

$$a_2 \iint\limits_{\Omega} K(u_2, v_2)\, dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} \left[\nabla_k^2 v_2 \left(u_1 + u^*\right) - Q_2\left(u_1 + u^*, v_2\right)\right] dx_1 dx_2. \qquad (11)$$

Представление (7) обуславливает необходимость рассмотрения специальных «взвешенных» функциональных пространств H_g, $g \in W_2^2\left([c;d]\right)$, определяемых как замыкание множества функций пространства $C^{(2)}\left([a;b]\right)$ в норме

$$\|h\|_{H_g}^2 = \int \left(h''\right)^2 dx_1 \int g^2 dx_2 + 2\mu \int h h'' dx_1 \int g g'' dx_2 + \int h^2 dx_1 \int \left(g''\right)^2 dx_2 + 2(1-\mu) \int \left(h'\right)^2 dx_1 \int \left(g'\right)^2 dx_2 .$$

Здесь имеет место очевидное равенство $\|hg\|_{H_p} = \|h\|_{H_g} = \|g\|_{H_h}$.

В рамках указанного представления на итерациях алгоритма интегральные соотношения (10), (11) сводятся к двум парам интегральных соотношений (для нечётных и чётных итераций, соответственно):

$$\begin{gathered} a_1 \iint\limits_{\Omega} K\left(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)}, h_1^{(i-1)} \varphi_1\right) dx_1 dx_2 = -a_1 \iint\limits_{\Omega} K\left(h_1^* g_1^*, h_1^{(i-1)} \varphi_1\right) dx_1 dx_2 + \\ + \iint\limits_{\Omega} \left[\nabla_k^2 \left[h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}\right] h_1^{(i-1)} \varphi_1 - Q_1\left(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}, h_1^{(i-1)} \varphi_1\right)\right] dx_1 dx_2, \end{gathered} \qquad (12)$$

$$\begin{gathered} a_2 \iint\limits_{\Omega} K\left(h_2^{(i-1)} g_2^{(i)}, h_2^{(i-1)} \varphi_2\right) dx_1 dx_2 = \\ = \iint\limits_{\Omega} \left[\nabla_k^2 \left[h_2^{(i-1)} \varphi_2\right] \left(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*\right) - Q_2\left(h_1^{(i-1)} g_1^{(i)} + h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)} \varphi_2\right)\right] dx_1 dx_2 \end{gathered} \qquad (13)$$

и

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

$$
\begin{gathered}
a_1\iint\limits_{\Omega} K\left(h_1^{(i)}g_1^{(i-1)},\psi_1 g_1^{(i-1)}\right)dx_1dx_2 = -a_1\iint\limits_{\Omega} K\left(h_1^{*}g_1^{*},\psi_1 g_1^{(i-1)}\right)dx_1dx_2 + \\
+\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i)}g_2^{(i-1)}\right]\psi_1 g_1^{(i-1)} - Q_1\left(h_1^{(i)}g_1^{(i-1)}+h_1^{*}g_1^{*},h_2^{(i)}g_2^{(i-1)},\psi_1 g_1^{(i-1)}\right)\right]dx_1dx_2,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
a_2\iint\limits_{\Omega} K\left(h_2^{(i)}g_2^{(i-1)},\psi_2 g_2^{(i-1)}\right)dx_1dx_2 = \\
=\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[\psi_2 g_2^{(i-1)}\right]\left(h_1^{(i)}g_1^{(i-1)}+h_1^{*}g_1^{*}\right) - Q_2\left(h_1^{(i)}g_1^{(i-1)}+h_1^{*}g_1^{*},\psi_2 g_2^{(i-1)}\right)\right]dx_1dx_2.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Правая часть соотношения (13) представляет собой линейный функционал относительно φ_2 в норме $H_{h_2^{(i-1)}}$. Следовательно, в силу теоремы Рисса правая часть данного соотношения может быть представлена в виде

$$
\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}\varphi_2\right]\left(h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}+h_1^{*}g_1^{*}\right) - Q_2\left(h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}+h_1^{*}g_1^{*},h_2^{(i-1)}\varphi_2\right)\right]dx_1dx_2 \equiv \left(P^{(i)}\left(g_1^{(i)}\right),\varphi_2\right)_{H_{h_2^{(i-1)}}},\tag{16}
$$

что в силу произвольности φ_2 даёт

$$
g_2^{(i)} = P^{(i)}\left(g_1^{(i)}\right).\tag{17}
$$

Здесь индекс i в обозначении оператора $P^{(i)}$ подчёркивает, что в его определении участвуют определённые интегралы от функций $h_j^{(i-1)}$, вычисленных на предыдущей итерации ИОМК.

Подстановка соотношения (17) в правую часть интегрального соотношения (12) даёт линейный функционал относительно φ_1 в норме $H_{h_1^{(i-1)}}$., который, в свою очередь, в силу теоремы Рисса представим в виде:

$$
\begin{gathered}
-a_1\iint\limits_{\Omega} K\left(h_1^{*}g_1^{*},h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)dx_1dx_2 + \\
+\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}g_2^{(i)}\right]h_1^{(i-)}\varphi_1 - Q_1\left(h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}+h_1^{*}g_1^{*},h_2^{(i-1)}g_2^{(i)},h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)\right]dx_1dx_2 \equiv \left(G^{(i)}\left(g_1^{(i)}\right),\varphi_1\right)_{H_{h_1^{(i-1)}}}.
\end{gathered}
$$

В силу произвольности φ_1 получаем соотношение

$$
g_1^{(i)} = G^{(i)}\left(g_1^{(i)},g_2^{(i)}\right).\tag{18}
$$

Объединение соотношений (17) и (18) даёт операторное представление для нелинейной краевой задачи (8) (разрешающих соотношений для нечётных операций ИОМК):

$$
U^{(i)} = A_{x_2}^{(i)}\left(U^{(i)}\right).\tag{19}
$$

Аналогичные рассуждения с использованием соотношений (14), (15) позволяют ввести операторы, $N^{(i)}$, $H^{(i)}, A_{x_1}^{(i)}$, которые соответствует чётным итерациям ИОМК. В этих терминах ИОМК может быть представлен как последовательность операторных уравнений, определяемых операторами A_{x_1} и A_{x_2} таких, что действие которых на i-й итерации либо совпадает либо с действием операторов $A_{x_1}^{(i)}$ и $A_{x_2}^{(i)}$ (для чётных и нечётных итераций соответственно), либо с действием тождественного оператора.

Лемма 2. Имеют место представления:

$$P = P_0 + P_1 + P_2\,, \tag{20}$$

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + G_3\,, \tag{21}$$

где P_s, G_s – однородные операторы порядка s.

Доказательство. Из соотношения (17), определяющего оператор P, непосредственно следует:

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}\varphi_2\right]h_1^* g_1^* - Q_2\left(h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)}\varphi_2\right)\right]dx_1dx_2 \equiv \left(P_0,\varphi_2\right)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \tag{22}$$

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}\varphi_2\right]h_1^{(i-1)}g_1^{(i)} - \sum_{l,t=1}^{2}\frac{\partial\left[h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}\right]}{\partial x_l}\frac{\partial\left[h_1^* g_1^*\right]}{\partial x_t}\frac{\partial^2\left[h_2^{(i-1)}\varphi_2\right]}{\partial x_{l\to}\partial x_{t\to}}\right]dx_1dx_2 \equiv \left(P_1\left(g_1^{(i)}\right),\varphi_2\right)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \tag{23}$$

$$-\iint\limits_{\Omega}\left[\sum_{l,t=1}^{2}\frac{\partial\left[h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}\right]}{\partial x_l}\frac{\partial\left[h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}\right]}{\partial x_t}\frac{\partial^2\left[h_2^{(i-1)}\varphi_2\right]}{\partial x_{l\to}\partial x_{t\to}}\right]dx_1dx_2 \equiv \left(P_2\left(g_1^{(i)}\right),\varphi_2\right)_{H_{h_2^{(i-1)}}}, \tag{24}$$

где существование $P_0, P_1, P_2 \in H_{h_2^{(i-1)}}$ вытекает из т. Рисса. Здесь оператор $\to$ означает циклический сдвиг по модулю 2.

Подстановка (22)-(24) в (18) даёт следующие выражения, определяющие G_S:

$$\begin{gathered}-a_1\left(h_1^* g_1^*, h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)_{H_1} + \\ +\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}P_0\right]h_1^{(i-1)}\varphi_1 - Q_1\left(h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)}P_0, h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)\right]dx_1dx_2 \equiv \left(G_0,\varphi_1\right)_{H_{h_1^{(i-1)}}},\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega}\left[\nabla_k^2\left[h_2^{(i-1)}P_1\left(g_1^{(i)}\right)\right]h_1^{(i-1)}\varphi_1 - Q_1\left(h_1^* g_1^*, h_2^{(i-1)}P_1\left(g_1^{(i)}\right), h_1^{(i-1)}\varphi_1\right) - \\ -Q_1\left(h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}, h_2^{(i-1)}P_0, h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)\right]dx_1dx_2 \equiv a_1\left(G_1,\varphi_1\right)_{H_{h_1^{(i-1)}}},\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega}\left[\tilde{N}_k^2\left[h_2^{(i\text{-}1)}P_2\left(g_1^{(i)}\right)\right]h_1^{(i\text{-}1)}f_1 - Q_1\left(h_1^* g_1^*, h_2^{(i\text{-}1)}P_2\left(g_1^{(i)}\right), h_1^{(i\text{-}1)}f_1\right) - \\ -Q_1\left(h_1^{(i\text{-}1)}g_1^{(i)}, h_2^{(i\text{-}1)}P_1\left(g_1^{(i)}\right), h_1^{(i\text{-}1)}f_1\right)\right]dx_1dx_2 \equiv a_1\left(G_2, f_1\right)_{H_{h_1^{(i\text{-}1)}}},\end{gathered} \tag{27}$$

$$-\iint\limits_{\Omega}Q_1\left(h_1^{(i-1)}g_1^{(i)}, h_2^{(i-1)}P_2\left(g_1^{(i)}\right), h_1^{(i-1)}\varphi_1\right)dx_1dx_2 \equiv a_1\left(G^{(3)},\varphi_1\right)_{H_{h_1^{(i-1)}}}. \tag{28}$$

Аналогичные представления имеют место для операторов N и H.

Теорема 1. Каждый из операторов P, N, P_s, N_s ($s=1,2$) действует усиленно непрерывно в H_{h_1}, H_{g_1} при условии ограниченности последовательностей $\left\{h_1^{(i)}\right\}$, $\left\{g_1^{(i)}\right\}$ в $W_2^{(2)}\left(\left[x_1^{\min};x_1^{\max}\right]\right)$, $W_2^{(2)}\left(\left[x_2^{\min};x_2^{\max}\right]\right)$ соответственно.

Доказательство. Для всякого фиксированного i, если только h_i не равно тождественному нулю, имеет место очевидные неравенства $m\|g\|_{W_2^{(2)}} \le \|g\|_{H_{h_2^{(i)}}} \le M\|g\|_{W_2^{(2)}}$. Из эквивалентности норм, поскольку пространства $H_{h_2^{(i)}}$ и $W_2^{(2)}$ получены замыканием одного и того же множества функций, следует, что они состоят из одних и тех же элементов. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для пространств H_{h_2} и $W_2^{(2)}$, то мы можем считать, что операторы P_s действуют в пространстве H_{h_2}.

Пусть $g_1^{(i)}$ сходится слабо к g_1 в пространстве H_{h_2} ($g_1^{(i)} \to g_1$); необходимо показать, что последовательность $P_s g_1^{(i)}$ сходится к указанному пределу сильно ($\left\| P_s g_1^{(i)} - g_1 \right\|_{H_{h_2}} \to 0$).

В силу ограниченности бесконечной последовательности $\left\{ h_1^{(i)} \right\}$ в гильбертовом пространстве $W_2^{(2)}$ из неё можно выделить слабосходящуюся в этом пространстве подпоследовательность. Рассмотрим последовательность $h_1^{(i)} g_1^{(i)}$, ограничившись номерами i, отвечающими выделенной подпоследовательности. В силу Леммы 1, последовательность $h_1^{(i)} g_1^{(i)}$ будет ограничена в пространстве H_1, что, в свою очередь, позволяет выделить из неё слабосходящуюся в H_1 подпоследовательность ($h_1^{(i)} g_1^{(i)} \to h_1 g_1$). В дальнейшем изложении мы ограничимся номерами i, отвечающими данной подпоследовательности.

Рассмотрим действие оператора P_1 в пространстве H_{h_1}. Из (23) имеем:

$$\left(P_1\left(g_1^{(i)}\right) - P_1\left(g_1\right), \varphi_2 \right)_{H_{h_2}} =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\nabla_k^2 \left[h_2 \varphi_2 \right] h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] - \sum_{l,t=1}^{2} \frac{\partial \left[h_1 \left(g_1^{(i)} - g_1 \right) \right]}{\partial x_l} \frac{\partial \left[h_1^* g_1^* \right]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 \left[h_2 \varphi_2 \right]}{\partial x_{l\to} \partial x_{t\to}} \right] dx_1 dx_2 \le$$

$$\le \left| \iint_{\Omega} \nabla_k^2 \left[h_2 \varphi_2 \right] h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] dx_1 dx_2 \right| + \sum_{l,t=1}^{2} \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial \left[h_1 \left(g_1^{(i)} - g_1 \right) \right]}{\partial x_l} \frac{\partial \left[h_1^* g_1^* \right]}{\partial x_t} \frac{\partial^2 \left[h_2 \varphi_2 \right]}{\partial x_{l\to} \partial x_{t\to}} \right| dx_1 dx_2 \le$$

$$\le \left\| \nabla_k^2 \left[h_2 \varphi_2 \right] \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 \left[h_2 \varphi_2 \right]}{\partial x_{l\to} \partial x_{t\to}} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \left[h_1 \left(g_1^{(i)} - g_1 \right) \right]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \left[h_1^* g_1^* \right]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \le$$

(в силу теорем вложения для пространств H_1)

$$\le \left[\left\| h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^{2} \left\| \frac{\partial \left[h_1 \left(g_1^{(i)} - g_1 \right) \right]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \left[h_1^* g_1^* \right]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \right] \left\| h_2 \varphi_2 \right\|_{H_1(\Omega)} =$$

$$= \left[\left\| h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,t=1}^{2} \left\| \frac{\partial \left[h_1 \left(g_1^{(i)} - g_1 \right) \right]}{\partial x_l} \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \left[h_1^* g_1^* \right]}{\partial x_t} \right\|_{L_4(\Omega)} \right] \left\| \varphi_2 \right\|_{H_{h_2}}.$$

Рассмотрим поведение коэффициента при $\left\| \varphi_2 \right\|_{H_{h_2}}$ при $i \to \infty$.

1. Для первого слагаемого

$$\left\| h_1 \left[g_1^{(i)} - g_1 \right] \right\|_{L_2(\Omega)} \le \left\| h_1^{(i)} g_1^{(i)} - h_1 g_1 \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| g_1^{(i)} \right\|_{L_4\left(\left[x_2^{\min}; x_2^{\max} \right]\right)} \left\| h_1^{(i)} - h_1 \right\|_{L_4\left(\left[x_1^{\min}; x_1^{\max} \right]\right)}.$$

В силу усиленной непрерывности оператора вложения H_1 в $L_2(\Omega)$ из слабой сходимости последовательности $h_1^{(i)}g_1^{(i)} \to h_1 g_1$ в H_1 следует её сильная сходимость в $L_2(\Omega)$: $\left\| h_1^{(i)}g_1^{(i)} - h_1 g_1 \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0$; аналогично в силу теорем вложения С. Л. Соболева из слабой сходимости последовательности $h_1^{(i)} \to h_1$ в $W_2^{(2)}\left(\left[x_1^{\min}; x_1^{\max}\right]\right)$ следует её сильная сходимость в $L_4\left(\left[x_1^{\min}; x_1^{\max}\right]\right)$; величина $\left\| g_1^{(i)} \right\|_{L_4\left(\left[x_2^{\min}; x_2^{\max}\right]\right)}$ ограничена в силу той же теоремы вложения и предположения теоремы об ограниченности $g_1^{(i)}$ в $W_2^{(2)}$.

2. Для второго слагаемого

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_1\left[g_1^{(i)} - g_1 \right]\right] \right\|_{L_4(\Omega)} \le \left\| \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_1^{(i)}g_1^{(i)} - h_1 g_1 \right] \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_l} \right\|_{L_8\left(\left[x_2^{\min}; x_2^{\max}\right]\right)} \left\| \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_1^{(i)} - h_1 \right] \right\|_{L_8\left(\left[x_1^{\min}; x_1^{\max}\right]\right)}$$

и аналогичные рассуждения устанавливают, что $\left\| \frac{\partial}{\partial x_l}\left[h_1\left[g_1^{(i)} - g_1 \right]\right] \right\|_{L_4(\Omega)} \to 0$ при $i \to \infty$.

Таким образом, коэффициент при $\|\varphi_2\|_{H_{h_2}}$, а с ним и $\left\| P_1\left(g_1^{(i)}\right) - P_1\left(g_1\right) \right\|_{H_{h_2}}$ (нижняя грань таких коэффициентов), стремится к 0 при $i \to \infty$. Усиленная непрерывность оператора P_1 доказана.

Для оператора P_2 в пространстве H_{h_1} из (24) имеем:

$$\left(P_2\left(g_1^{(i)}\right) - P_2\left(g_1\right), \varphi_2 \right)_{H_{h_2}} \le \sum_{l,t=1}^{2} \left\| \frac{\partial\left[h_1 g_1^{(i)}\right]}{\partial x_l} \frac{\partial\left[h_1 g_1^{(i)}\right]}{\partial x_t} - \frac{\partial\left[h_1 g_1\right]}{\partial x_l} \frac{\partial\left[h_1 g_1\right]}{\partial x_t} \right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_2\|_{H_{h_2}}.$$

Теорема вложения H_1 в $L_2(\Omega)$ гарантирует сильную сходимость $\frac{\partial\left[h_1 g_1^{(i)}\right]}{\partial x_t}$ к $\frac{\partial\left[h_1 g_1\right]}{\partial x_t}$ в $L_2(\Omega)$, что завершает доказательство усиленной непрерывности оператора P_2. Аналогичные рассуждения позволяют установить усиленную непрерывность операторов N_s.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 каждый из операторов G, H, G_s, H_s $(s = 1,2,3)$, действует усиленно непрерывно в H_{h_2}, H_{g_2} соответственно.

Доказательство. Проведя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при доказательстве предыдущей теоремы, мы устанавливаем, что операторы G_s действуют в пространстве H_{h_1}.

Пусть $g_1^{(i)}$ сходится слабо к g_1 в пространстве H_{h_1} ($g_1^{(i)} \to g_1$); необходимо показать, что последовательность $G_s g_1^{(i)}$ сходится к указанному пределу сильно ($\left\| P_s g_1^{(i)} - g_1 \right\|_{H_{h_1}} \to 0$). Как и при доказательстве Теоремы 1 ограничимся рассмотрением номеров, отвечающих слабосходящейся в H_1 подпоследовательности ($h_1^{(i)}g_1^{(i)} \to h_1 g_1$).

Из (26) для оператора G_1 имеем

$$
\begin{gathered}
a_1\left(G_1\left(g_1^{(i)}\right)-G_1\left(g_1\right),\varphi_1\right)_{H_{h_1}}=-\iint\limits_{\Omega}\Big[\nabla_k^2\Big[h_2\left(P_1\left(g_1^{(i)}\right)-P_1\left(g\right)\right)\Big]h_1\varphi_1-\\
-\Big[Q_1\left(h_1^*g_1^*,h_2P_1\left(g_1^{(i)}\right),h_1\varphi_1\right)-Q_1\left(h_1^*g_1^*,h_2P_1\left(g_1\right),h_1\varphi_1\right)\Big]-\\
-\Big[Q_1\left(h_1g_1^{(i)},h_2P_0,h_1\varphi_1\right)-Q_1\left(h_1g_1,h_2P_0,h_1\varphi_1\right)\Big]\Big]dx_1dx_2\leq
\end{gathered}
\tag{29}
$$

(воспользовавшись теоремами вложения и равенством $\|hg\|_{H_1}=\|g\|_{H_h}$)

$$
\leq\left[\left\|h_2\left(P_1\left(g_1^{(i)}\right)-P_1\left(g\right)\right)\right\|_{H_1}\left(1+4\left\|h_1^*g_1^*\right\|_{H_1}\right)+2\left\|h_2P_0\right\|_{H_1}\sum_{l=1}^{2}\left\|\frac{\partial\left[h_1\left(g_1^{(i)}-g_1\right)\right]}{\partial x_l}\right\|_{L_4}\right]\left\|\varphi_1\right\|_{H_{h_1}}.
$$

Таким образом, коэффициент при $\left\|\varphi_1\right\|_{H_{h_1}}$ равен

$$
\left\|P_1\left(g_1^{(i)}\right)-P_1\left(g\right)\right\|_{H_{h_2}}\left(1+4\left\|h_1^*g_1^*\right\|_{H_1}\right)+2\left\|h_2P_0\right\|_{H_1}\sum_{l=1}^{2}\left\|\frac{\partial\left[h_1\left(g_1^{(i)}-g_1\right)\right]}{\partial x_l}\right\|_{L_4(\Omega)}.
$$

Стремление к 0 первого слагаемого при $i\to\infty$ устанавливается предыдущей теоремой, стремление к 0 второго слагаемого установлено при $i\to\infty$ доказательстве Теоремы 1. Усиленная непрерывность оператора P_1 доказана.

Для оператора G_2 аналогичными рассуждениями устанавливаем

$$
\begin{gathered}
a_1\left(G_2\left(g_1^{(i)}\right)-G_2\left(g_1\right),\varphi_1\right)_{H_{h_1}}\leq\\
\leq\Big[\left\|h_2\left(P_2\left(g_1^{(i)}\right)-P_2\left(g_1\right)\right)\right\|_{H_1}\left(1+4\left\|h_1^*g_1^*\right\|_{H_1}\right)+4\left\|h_2\left(P_1\left(g_1^{(i)}\right)-P_1\left(g\right)\right)\right\|_{H_1}\left\|h_1g_1^{(i)}\right\|_{H_1}+\\
+\left\|h_1P_1\left(g_1\right)\right\|_{H_1}\sum_{l=1}^{2}\left\|\frac{\partial\left[h_1\left(g_1^{(i)}-g_1\right)\right]}{\partial x_l}\right\|_{L_4(\Omega)}\Big]\left\|\varphi_1\right\|_{H_{h_1}}.
\end{gathered}
$$

Поскольку $\left\|h_2\left(P_2\left(g_1^{(i)}\right)-P_2\left(g_1\right)\right)\right\|_{H_1}=\left\|P_2\left(g_1^{(i)}\right)-P_2\left(g_1\right)\right\|_{H_{h_2}}\to 0$ и $\sum_{l=1}^{2}\left\|\frac{\partial\left[h_1\left(g_1^{(i)}-g_1\right)\right]}{\partial x_l}\right\|_{L_4(\Omega)}\to 0$ в силу теоремы 1, а $\left\|h_1g_1^{(i)}\right\|_{H_1}=\left\|g_1^{(i)}\right\|_{H_{h_1}}$ и $\left\|h_1P_1\left(g_1\right)\right\|_{H_1}=\left\|h_1g_1\right\|_{H_1}=\left\|g_1\right\|_{H_{h_1}}$ ограничены в силу предположений теоремы, то коэффициент при $\left\|\varphi_1\right\|_{H_{h_1}}\to 0$ при $i\to\infty$, что и устанавливает усиленную непрерывность оператора G_2. Аналогично устанавливается усиленная непрерывность для G_3. Усиленная непрерывность операторов G и H позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть последовательности $\left\{g_1^{(i)}\right\}$, $\left\{h_1^{(i)}\right\}$ приближений итеративного обобщённого метода Канторовича, принадлежат ограниченной области пространстве W_2^2. Тогда последовательность $\left\{U^{(i)}\right\}$ сходится сильно в пространстве $H_1\times H_0$.

Доказательство. По предположению теоремы последовательности $\left\{g_1^{(i)}\right\}$, $\left\{h_1^{(i)}\right\}$ представляет собой ограниченное бесконечное множество гильбертового пространства W_2^2; следовательно, они слабокомпактны, т. е. из всякой бесконечной части каждой из них можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность. Обозначим пределы указанных последовательностей g_1 и h_1 соответственно.

Ограниченность последовательностей $\left\{g_1^{(i)}\right\}$, $\left\{h_1^{(i)}\right\}$ в пространстве W_2^2, влечёт за собой (в силу эквивалентности норм) их ограниченность в пространствах H_{h_1} и H_{g_1} соответственно, что позволяет, в свою очередь, выделить из них слабосходящиеся в данных пространствах подпоследовательности. В дальнейшем рассмотрении индекс мы будем использовать для нумерации элементов данных подпоследовательностей.

Последовательности $\left\{g_1^{(i+1)}\right\}$, $\left\{h_1^{(i+1)}\right\}$ представляет собой результат действие операторов G и H на слабосходящуюся последовательности $\left\{g_1^{(i)}\right\}$ и $\left\{h_1^{(i)}\right\}$. В силу усиленной непрерывности указанных операторов, устанавливаемой Теоремой 2, последовательность $\left\{g_1^{(i+1)}\right\}$, $\left\{h_1^{(i+1)}\right\}$ сходятся сильно. Непрерывность оператора P позволяет установить сильную сходимость для последовательностей $\left\{g_2^{(i+1)}\right\}$, $\left\{h_2^{(i+1)}\right\}$ в H_{h_1} и H_{g_1}. Эквивалентность норм позволяет распространить данное утверждение на пространство W_2^2.

Неравенство

$$\left\|h_j^{(i)}g_j^{(i)}-h_jg_j\right\|_{H_p}\le m\left[\left\|h_j^{(i)}\right\|_{W_2^{(2)}}\left\|g_j^{(i)}-g_j\right\|_{W_2^{(2)}}+\left\|g_j\right\|_{W_2^{(2)}}\left\|h_j^{(i)}-h_j\right\|_{W_2^{(2)}}\right],$$

следующее из Леммы 1, завершает доказательство теоремы.

При практическом применении алгоритма в качестве критерия окончания итерационного процесса использовалось малость изменения нормы решения на итерациях алгоритма. Здесь проверялась малость относительной нормы разности не только для двух последовательных итераций, но для 3-4-х последовательных итераций, чтобы проверить достоверность предположения об ограниченности последовательности. Метод продемонстрировал хорошую практическую сходимость. Для достижения сходимости (при требовании к величине относительного изменения 10^{-4}) требовалось $6\div 8$ шагов алгоритма.

ВЫВОДЫ

1. Устанавливается возможность применения итеративного обобщённого метода Канторовича к анализу уравнений Кармана.
2. Доказывается, что последовательность приближений к решению, порождаемая указанным методом, сходится к обобщённому решению уравнений Кармана.
3. Сочетание итеративного обобщённого метода Канторовича с методом продолжения по параметру позволило получить решения уравнений Кармана в широком диапазоне значений параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bertoluzza S. Adaptive wavelet collocation for the solution of steady-state equations. *SPIE Proc*. 1995. Vol. 2491. P. 947–956.
2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher Analysis. New-York: Interscience, 1958. 682 p.
3. Liew K. M., Zhao X., Ferreira A. J. M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. P. 2031–2041.

4. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer, 2013. 180 p.
5. Vorovich I. I. Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer, 1999. 407 p.

REFERENCES

1. Bertoluzza, S. (1995). Adaptive wavelet collocation for the solution of steady-state equations. SPIE Proc., Vol. 2491, pp. 947-956.
2. Kantorovich, L. V. & Krylov, V. I. (1958). Approximate Methods of Higher Analysis. New-York: Interscience.
3. Liew, K. M., Zhao, X. & Ferreira A. J. M. (2011). A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. Composite Structures, Vol. 93, pp. 2031-2041.
4. Obodan, N. I., Lebedeyev, O. G. & Gromov, V. A. (2013). Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer.
5. Vorovich, I. I. (1999). Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer.

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРУ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ

Демидов О. В., Попов В. Г.

Національний університет «Одеська морська академія», вул. Дідрихсона, 8, Одеса, 65029, Україна

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Розв’язана вісесиметрична динамічна задача про визначення напруженого стану навколо кругової тріщини у скінченному циліндрі, джерелом навантаження є абсолютно жорстка кругова накладка, яка зчеплена з одним з торців циліндру і до якої прикладений крутний момент, який змінюється за часом. На відміну від традиційних методів розв’язання, які ґрунтуються на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа, запропонований метод полягає в різницевому наближенні похідної за часом. У результаті вихідна задача замінюється послідовністю однорідних граничних задач, інтегральне подання розв’язку яких зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, числовий розв’язок якого дозволив отримати наближену формулу для обчислення КІН.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), вісесиметрична динамічна задача, скінченні різниці за часом, скінченний цилíндр, кругова тріщина, крутний момент.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ КРУЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Демидов А. В., Попов В. Г.

Национальный университет «Одесская морская академия», ул. Дидрихсона, 8, Одесса, 65029, Украина

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Решена осесимметричная динамическая задача об определении напряженного состояния в окрестности круговой трещины в конечном цилиндре, источником нагрузки является абсолютно жесткая круговая накладка, которая сцеплена с одним из торцов цилиндра и к которой приложен крутящий момент, меняющийся во времени. В отличие от традиционных методов решения, основанных на применении интегрального преобразования Лапласа, предложенный метод заключается в разностном приближении производной по времени. В результате исходная задача заменяется последовательностью однородных краевых задач, интегральное представление решения которых сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, численное решение которого позволило получить приближенную формулу для вычисления КИН.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений (КИН), осесиметричная динамическая задача, конечные разности, конечный цилиндр, круговая трещина, крутящий момент.