

4. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer, 2013. 180 p.
5. Vorovich I. I. Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer, 1999. 407 p.

### REFERENCES

1. Bertoluzza, S. (1995). Adaptive wavelet collocation for the solution of steady-state equations. SPIE Proc., Vol. 2491, pp. 947-956.
2. Kantorovich, L. V. & Krylov, V. I. (1958). Approximate Methods of Higher Analysis. New-York: Interscience.
3. Liew, K. M., Zhao, X. & Ferreira A. J. M. (2011). A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. Composite Structures, Vol. 93, pp. 2031-2041.
4. Obodan, N. I., Lebedeyev, O. G. & Gromov, V. A. (2013). Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer.
5. Vorovich, I. I. (1999). Nonlinear Theory of Shallow Shells. New-York: Springer.

УДК 539.3

## НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРУ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ

Демидов О. В., Попов В. Г.

*Національний університет «Одеська морська академія»,  
вул. Дідрихсона, 8, Одеса, 65029, Україна*

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана вісесиметрична динамічна задача про визначення напруженого стану навколо кругової тріщини у скінченному циліндрі, джерелом навантаження є абсолютно жорстка кругова накладка, яка зчеплена з одним з торців циліндру і до якої прикладений крутний момент, який змінюється за часом. На відміну від традиційних методів розв'язання, які ґрунтуються на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа, запропонований метод полягає в різнищевому наближенні похідної за часом. У результаті вихідна задача замінюється послідовністю однорідних граничних задач, інтегральне подання розв'язку яких зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, числовий розв'язок якого дозволив отримати наближену формулу для обчислення КІН.

*Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), вісесиметрична динамічна задача, скінченні різниці за часом, скінченний циліндр, кругова тріщина, крутний момент.*

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ КРУЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Демидов А. В., Попов В. Г.

*Национальный университет «Одесская морская академия»,  
ул. Дидрихсона, 8, Одесса, 65029, Украина*

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

Решена осесимметричная динамическая задача об определении напряженного состояния в окрестности круговой трещины в конечном цилиндре, источником нагрузки является абсолютно жесткая круговая накладка, которая сцеплена с одним из торцов цилиндра и к которой приложен крутящий момент, меняющийся во времени. В отличие от традиционных методов решения, основанных на применении интегрального преобразования Лапласа, предложенный метод заключается в разностном приближении производной по времени. В результате исходная задача заменяется последовательностью однородных краевых задач, интегральное представление решения которых сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, численное решение которого позволило получить приближенную формулу для вычисления КИН.

*Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений (КИН), осесимметричная динамическая задача, конечные разности, конечный цилиндр, круговая трещина, крутящий момент.*

## NONSTATIONARY TORSION OF THE FINITE CYLINDER WITH CIRCULAR CRACK

Demydov O. V., Popov V. G.

National University "Odessa Maritime Academy",  
8 Didrikhson str., Odessa, 65029, Ukraine

alexandr.v.demidov@gmail.com, dr.vg.popov@gmail.com

The axisymmetric dynamic problem of determining the stress state in the region of a circular crack in a finite cylinder is solved. The source of the loading is the rigid circular plate, which is coupled with one of the cylinder ends and loaded by the torsional moment, which depends on time. The proposed method consists in the difference approximation only of the time derivative. The original problem is reduced to a system of homogeneous boundary value problems, which are solved successively. Their solution contains an unknown displacement jump on the crack. The integral equation with respect to the unknown jump reduces to the Fredholm integral equation of the second kind. The found numerical solution of this equation gave the possibility to obtain the approximate formula for the SIF calculation. Analysis of the results shows that the SIF increases during the transient process to a level exceeding the SIF value under static loading. Increasing the weight of the plate and the height of the cylinder cause to increasing the duration of the transient process and reduces the magnitude of the SIF's maximum.

*Key words: stress intensity factor (SIF), an axisymmetric dynamic problem, finite differences, finite cylinder, a circular crack, torsional moment.*

### ВСТУП

Велика кількість елементів машин і конструкцій мають циліндричну форму. Наявність у них дефектів, наприклад, тріщин, суттєво знижує їх експлуатаційні характеристики і може привести до руйнування, особливо в умовах динамічного навантаження. Тому дослідження розподілу напружень у циліндричних тілах з тріщинами за динамічного навантаження є важливою задачею.

Аналіз сучасної наукової літератури показує, що напружений стан скінченних і нескінчених циліндричних тіл з тріщинами при статичному навантаженні вивчений достатньо повно. Приклади розв'язання подібних задач представлені в роботах [1-6]. При розв'язанні динамічних задач, в основному, розглядалися необмежені тіла з тріщинами, частіше за все круговими. Детальний аналіз результатів поданий в оглядовій статті [7] і монографії [8]. У випадку гармонічних коливань є ряд статей, наприклад [9,10], де кругові тріщини розглянуті у плитах та нескінченних циліндрах, а також стаття [11], у якій розглянута кругова тріщина у скінченному циліндрі.

Останнім часом для визначення КІН у циліндричних тілах із зовнішніми кільцевими тріщинами пропонується використовувати змішані числово-експериментальні методи. Так у [12] розглянуто динамічний закрут циліндричних зразків з такими тріщинами. Але цим методам, як і всім експериментальним, властиві недоліки, пов'язані з тим, що для кожного конкретного зразка необхідно проводити експерименти. Це ускладнює дослідження впливу геометричних розмірів циліндра на значення КІН.

Складність теоретичних досліджень динамічних задач зумовлена необхідністю використання інтегрального перетворення Лапласа за часом з подальшим числовим оберненням. А ця задача не тільки математично складна, але й не коректна. Останнім часом з'явилися праці, де застосовано модифікований метод скінченних різниць за часом. За допомогою цього методу, у нашому дослідженні розв'язано задачу про визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) в околі плоскої кругової тріщини у скінченному циліндрі за умови дії крутного моменту.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу висотою  $a$  і радіусом  $r_0$ . З циліндром пов'язана циліндрична система координат, центр якої збігається з центром нижньої основи (рис. 1).

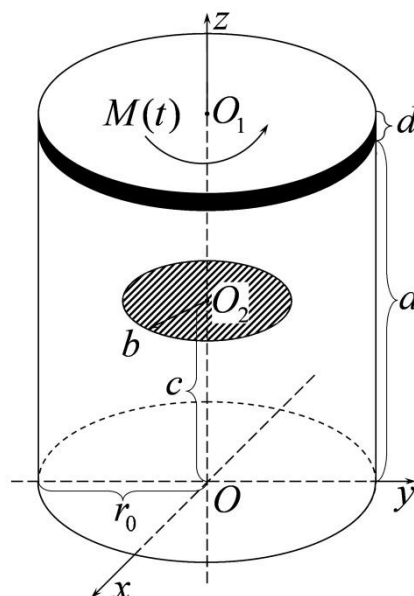


Рис. 1. Циліндр з тріщиною

Нижня основа вважається нерухомою, а з верхньою зчеплена жорстка накладка товщиною  $d$  і того ж радіусу, що і циліндр. До накладки в початковий момент часу  $t=0$  прикладений момент  $M(t)$ . Усередині циліндра міститься кругова тріщина радіусу  $b < r_0$ , центр якої знаходиться на осі циліндра і має координату  $z=c$ ,  $0 < c < a$ . За таких умов, циліндр знаходиться у стані вісесиметричної деформації крутіння і відмінним від 0 буде тільки кутове переміщення  $w(r, z, t)$ , яке знаходиться з рівняння (1) за нульових початкових умов:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < z < a, \quad t \in (0, +\infty), \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho},$$

де  $\rho$  – густина,  $G$  – модуль зсуву матеріалу циліндра.

На торцевих поверхнях циліндра виконуються рівності

$$w(r, 0, t) = 0, \quad w(r, a, t) = \alpha(t)r, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad t \in (0, +\infty),$$

де  $\alpha(t)$  – невідомий кут повороту жорсткої накладки, який визначається з рівняння:

$$j_0 \ddot{\alpha} = \tilde{M}(t) - \tilde{M}_R(t),$$

де  $j_0$  – момент інерції накладки відносно осі,  $\tilde{M}_R(t)$  – момент сил реакції, які діють на накладку з боку циліндра. Зазначені моменти дорівнюють:

$$j_0 = \frac{r_0^2 m_n}{2}, \quad \tilde{M}_R(t) = 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \tilde{\tau}_{\varphi z}(r, a, t) dr,$$

де  $m_n$  – маса накладки,  $\tilde{\tau}_{\varphi z}(r, a, t)$  – дотичні напруження під накладкою. Бічна поверхня циліндру вважається незавантаженою

$$\tilde{\tau}_{\varphi r}(r_0, z, t) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 \leq z \leq a, \quad t \in (0, +\infty).$$

Поверхня тріщини також вважається вільною від напружень

$$\tilde{\tau}_{\varphi z}(r, c, t) = G \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} = 0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \in (0, +\infty),$$

а переміщення на поверхні тріщини розривне і має стрибок

$$w(r, c+0, t) - w(r, c-0, t) = \chi(r, t), \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \in (0, +\infty).$$

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

**Скінченно-різницеve формулювання задачі.** Для розв'язання динамічної задачі доцільно буде перейти до безрозмірних величин за формулами (2):

$$\begin{aligned} w(r, z, t) &= r_0 \cdot w(\eta, \zeta, \tau), \quad \gamma = a/r_0, \quad l = c/a, \quad \beta = b/r_0, \\ r &= r_0 \eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad z = a\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad t = r_0 \tau / c_2, \quad \tau \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Після цього рівняння (1) набуває вигляду:

$$\Delta_{\eta\zeta} w = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad \Delta_{\eta\zeta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \quad (3)$$

Граничні умови на поверхнях циліндру в позначеннях (2) переписуться так:

$$\begin{aligned} w|_{\zeta=0} &= 0, \quad w|_{\zeta=1} = \alpha(\tau)\eta, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty), \\ \tau_{\varphi r}(1, \zeta, \tau) &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{w}{\eta} \right) \Big|_{\eta=1} = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Для умов на тріщині маємо:

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}(\eta, l, \tau) &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=l} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad \tau \in [0, +\infty), \\ w|_{\zeta=l+0} - w|_{\zeta=l-0} &= \langle w \rangle|_{\zeta=l} = \chi(\eta, \tau). \end{aligned}$$

Рівняння крутильних коливань накладки набуває вигляду:

$$\frac{\pi \gamma m_0}{2} \ddot{\alpha}(\tau) = M_0(\tau) - M_R(\tau), \quad \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad (4)$$

де  $m_0 = \frac{\rho_n}{\rho_c} \cdot \frac{d}{a}$ ,  $M_0 = \frac{\tilde{M}}{Gr_0^3}$ ,  $M_R = \frac{\tilde{M}_R}{Gr_0^3}$  – безрозмірні моменти.

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі застосуємо метод, що ґрунтується на різницеvій апроксимації похідних за часом, детально викладений у [13].

З цією метою утворюємо часову сітку,  $\tau_k$ :

$$\tau_k = \sum_{v=1}^k h_v, \quad h_v = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad (\tau_0 = 0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad h_i \neq h_j, \quad \forall (i, j).$$

Введемо позначення для кутового переміщення у фіксований момент часу  $w(\eta, \zeta, \tau_k) = w_k(\eta, \zeta)$ . Скористаємось лівими різницеvими похідними за часом:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_k} = \frac{w_k - w_{k-1}}{h_k}, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=\tau_k} = \frac{w_k}{h_k^2} + \frac{w_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{w_{k-1}}{h_k^2} - \frac{w_{k-1}}{h_k h_{k-1}}.$$

Отже, рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w_0 = 0, \quad \Delta_{\eta\zeta} w_1 = \frac{w_1}{h_1^2}, \quad \Delta_{\eta\zeta} w_k - \frac{w_k}{h_k^2} = \frac{w_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{w_{k-1}}{h_k} \left( \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k-1}} \right), \quad k = 2, 3, \dots$$

Запишемо кутове переміщення у вигляді лінійної комбінації нових функцій:

$$w_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} U_\nu. \tag{5}$$

У роботі [13] показано, якщо обрати коефіцієнти у формулі (5), згідно з формулами (6):

$$C_{kk} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C_{k,k-1} = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} - h_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$C_{k,\nu} = \frac{h_\nu^2}{h_k^2 - h_\nu^2} \cdot \left( \frac{h_k}{h_{k-1}} C_{k-2,\nu} - \left( 1 + \frac{h_k}{h_{k-1}} \right) C_{k-1,\nu} \right), \quad k = 3, 4, \dots; \quad \nu = 1, 2, \dots, k-2, \tag{6}$$

то функції  $U_\nu$  задовольняють однорідному рівнянню (7):

$$\Delta_{\eta\zeta} U_\nu - \chi_\nu^2 U_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad \chi_\nu = \frac{1}{h_\nu} \tag{7}$$

Тепер здійснимо дискретизацію рівняння коливання накладки (4)

$$\frac{\pi \gamma t_0}{2} \left\{ \frac{\alpha_k}{h_k^2} + \frac{\alpha_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{\alpha_{k-1}}{h_k} \left( \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k-1}} \right) \right\} = M_{0k} - M_{Rk}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Запишемо  $\alpha_k, M_{0k}, M_{Rk}, \chi_k$  у вигляді лінійної комбінації нових функцій:

$$\alpha_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} A_\nu, \quad M_{0k} = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \mu_{0\nu}, \quad M_{Rk} = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \mu_{R\nu}, \quad \chi_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} \chi_\nu.$$

У результаті граничні умови на торцевих поверхнях циліндру запишуться у вигляді:

$$U_\nu \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad U_\nu \Big|_{\zeta=1} = A_\nu \eta, \tag{8}$$

а на бічній поверхні циліндру у вигляді:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{U_\nu}{\eta} \right) \right|_{\eta=1} = 0. \tag{9}$$

Умови на тріщині набудуть вигляду:

$$\left. \frac{\partial U_\nu}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=l} = 0, \quad \langle U_\nu \rangle \Big|_{\zeta=l} = \chi_\nu. \tag{10}$$

Якщо коефіцієнти  $C_{k\nu}$  обрати згідно з формулами (6), то з рівняння крутильних коливань накладки (4) знаходимо:

$$\frac{\pi \gamma m_0}{2} \chi_v^2 A_v = \mu_{0v} - \mu_{Rv}, \quad (11)$$

де  $\mu_{0v}$  – є розв'язком системи  $\sum_{v=1}^k C_{kv} \mu_{0v} = M_{0k}$ , а  $\mu_{Rv}(\tau) = \frac{2\pi}{\gamma} \int_0^1 \eta^2 \frac{\partial U_v}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} d\eta$ .

**Розв'язання задачі.** Розв'язок отриманої граничної задачі (5), (8)-(11) у вигляді суми:

$$U_v(\eta, \zeta) = U_v^0(\eta, \zeta) + U_v^1(\eta, \zeta).$$

Перший доданок є розв'язком задачі за відсутності тріщини, задовольняє умовам на торцях і бічній поверхні та подається формулою:

$$U_v^0(\eta, \zeta) = A_v \eta \frac{\text{sh}(\gamma \zeta \chi_v)}{\text{sh}(\gamma \chi_v)}.$$

Другий доданок є розв'язком, який задовольняє нульовим умовам на торцях і бічній поверхні, а на поверхні тріщини є розривним зі стрибком (10) і задовольняє умові:

$$\tau_{\varphi z v}^1(\eta, l) = -\tau_{\varphi z v}^0(\eta, l), \quad \tau_{\varphi z v}^0(\eta, l) = A_v \eta \chi_v \frac{\text{ch} \gamma l \chi_v}{\text{sh} \gamma \chi_v}, \quad 0 \leq \eta \leq \beta. \quad (12)$$

Розв'язок крайової задачі (5), (8), (9), (11), (12) побудуємо методом інтегральних перетворень, узагальненим на розривні задачі [14]. Застосуємо скінченне синус-перетворення Фур'є за змінною  $\zeta$  [15]:

$$U_{jv}^1(\eta) = \int_0^1 U_v^1(\eta, \zeta) \sin \lambda_j \zeta d\zeta, \quad U_v^1(\eta, \zeta) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} U_{jv}^1(\eta) \sin \lambda_j \zeta, \quad \lambda_j = \pi j. \quad (13)$$

Отримали одномірну крайову задачу:

$$U_{jv}^{1''}(\eta) + \frac{1}{\eta} U_{jv}^{1'}(\eta) - \left( \frac{1}{\eta^2} + q_{jv}^2 \right) U_{jv}^1(\eta) = -\frac{\lambda_j}{\gamma^2} \chi_v(\eta) \cos \lambda_j l, \quad (14)$$

$$U_{jv}^1 \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{U_{jv}^1}{\eta} \right) \Big|_{\eta=1} = 0,$$

де  $q_{jv}^2 = \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} + \chi_v^2$ .

Функція Гріна цієї задачі має вигляд:

$$G_{jv}(\xi, \eta) = \xi \left[ g_{jv}(\xi, \eta) + Q_{jv}(\xi, \eta) \right],$$

$$g_{jv}(\xi, \eta) = -\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + q_{jv}^2} J_1(\eta \lambda) J_1(\xi \lambda) d\lambda, \quad Q_{jv}(\xi, \eta) = -\frac{K_2(q_{jv})}{I_2(q_{jv})} I_1(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta).$$

Розв'язок одномірної крайової задачі (14) має вигляд

$$U_{jv}^1(\eta) = \int_0^1 \xi f_{jv}(\xi) \left\{ g_{jv}(\xi, \eta) + Q_{jv}(\xi, \eta) \right\} d\xi, \quad f_{jv}(\xi) = -\frac{\lambda_j}{\gamma^2} \chi_v(\xi) \cos \lambda_j l.$$

Обернемо інтегральне перетворення Фур'є за другою формулою з (13) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
 U_v^1(\eta, \zeta) &= \int_0^1 \xi \chi_v(\xi) [S(\xi, \eta, \zeta) + D(\xi, \eta, \zeta)] d\xi, \\
 D(\xi, \eta, \zeta) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\gamma^2} \cos \lambda_j l \cdot \sin \lambda_j \zeta \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{I_2(q_{jv})} I_1(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta), \\
 S(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda J_1(\eta \lambda) J_1(\xi \lambda) [F(\lambda, \zeta - l) + F(\lambda, \zeta + l)] d\lambda, \\
 d_v(\lambda) &= \gamma \kappa_v \sqrt{\lambda^2 + \kappa_v^2}, \quad F(\lambda, \zeta \pm l) = \operatorname{sgn}(\zeta \pm l) \frac{\operatorname{sh}(d_v(\lambda)(1 - |\zeta \pm l|))}{\operatorname{sh}(d_v(\lambda))}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Залишилось визначити невідомий стрибок  $\chi_v$ . Підставивши (15) у (12), отримаємо інтегральне рівняння, яке після інтегрування частинами і введення нової функції:

$$\psi_v(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \chi_v(\xi))$$

набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\beta} \xi \psi_v(\xi) [F_1(\xi, \eta) + D_1(\xi, \eta)] d\xi &= A_v \eta \gamma \kappa_v \frac{\operatorname{ch}(\gamma l \kappa_v)}{\operatorname{sh}(\gamma \kappa_v)}, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \\
 D_1(\xi, \eta) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} \cos^2 \lambda_j l \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{q_{jv} I_2(q_{jv})} I_0(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta), \\
 F_1(\xi, \eta) &= - \int_0^{\infty} \frac{d_v(\lambda)}{\operatorname{sh}(d_v(\lambda))} \operatorname{ch}(d_v(\lambda)(1-l)) \cdot \operatorname{ch}(d_v(\lambda)l) \cdot J_1(\eta \lambda) J_0(\xi \lambda) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Отримане інтегральне рівняння можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма шляхом введення нових невідомих функцій і перетворень, аналогічних до викладених докладно у [11]. З цією метою введемо невідому функцію  $\varphi_v(\tau)$ :

$$\psi_v(\xi) = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\beta} \frac{\tau \cdot \varphi_v(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau$$

і застосуємо до обох частин рівняння оператор:

$$D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(\eta) d\eta.$$

Унаслідок цих перетворень інтегральне рівняння набуває вигляду:

$$g_v(s) - \frac{2\beta}{\pi \gamma} \int_{-1}^1 g_v(y) [B(y, s) + Q(y) - Q(y-s)] dy - g_v(0) = - \frac{2\beta \kappa_v A_v \operatorname{ch}(l \gamma \kappa_v)}{\operatorname{sh}(\gamma \kappa_v)} s^2, \tag{16}$$

де

$$B(y, s) = G(y, s) + R(y, s),$$

$$R(y, s) = 2\gamma\kappa_v \int_0^1 \frac{p \cdot \operatorname{ch} \gamma\kappa_v (1-l) p \cdot \operatorname{ch} \gamma\kappa_v lp}{u \cdot \operatorname{sh} \gamma\kappa_v p} \sin^2 \left( \frac{\beta\kappa_v u}{2} s \right) \cdot \cos(\beta\kappa_v uy) du,$$

$$G(y, s) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} A_{jv} \operatorname{sh}^2(\beta\theta_{jv} s) \operatorname{ch}(2\beta\theta_{jv} y), \quad A_{jv} = \frac{j^2 \cos^2(\pi jl) \cdot K_2(2\theta_{jv})}{\sigma_{jv}^2 I_2(2\theta_{jv})},$$

$$Q(Y) = \gamma\kappa_v \int_1^{\infty} \left( D(u) - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos(\beta\kappa_v uY) \cdot du, \quad D(u) = \frac{p \cdot \operatorname{ch}(\gamma\kappa_v (1-l) p) \cdot \operatorname{ch}(\gamma\kappa_v lp)}{u \cdot \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v p)}.$$

У цьому рівнянні були введені наступні позначення:

$$\sigma_{jv} = \sqrt{j^2 + \left( \frac{\gamma\kappa_v}{\pi} \right)^2}, \quad \theta_{jv} = \frac{\pi\sigma_{jv}}{2\gamma}, \quad \lambda = u\kappa_v, \quad p = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \tau = \beta y, \quad \varphi_v(\tau) = \beta g_v(y), \quad x = \beta s,$$

а функція  $g_v(y)$  парним чином продовжена на проміжок  $[-1; 0]$ .

Права частина рівняння (16) містить невідомий кут повороту накладки. Для його обчислення скористаємось рівнянням (11). Після перетворень, аналогічних до викладених вище, отримаємо формулу:

$$A_v = \frac{\mu_{0v}}{q_v} + \frac{\beta^2}{q_v \gamma} \int_{-1}^1 g_v(y) [Z_1(y) + Z_2(y)] dy, \quad q_v = \frac{\pi}{2} [\gamma m_0 \kappa_v^2 + \kappa_v \operatorname{cth}(\gamma\kappa_v)],$$

$$Z_1(y) = 2\gamma\kappa_v \int_0^{\infty} \frac{p \cdot \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v p)}{u \cdot \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v p)} J_2(\kappa_v u) \cos(\kappa_v u \beta y) du,$$

$$Z_2(y) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j^2 K_2(2\theta_{jv})}{\sigma_{jv}^2} \cos(\pi lj) \cdot \operatorname{ch}(2\beta\theta_{jv} y).$$

Наближений розв'язок рівняння (16) будемо шукати у вигляді інтерполяційного поліному:

$$g_v(y) = \sum_{m=1}^n g_{vm} \frac{P_n(y)}{(y-y_m) P'_n(y_m)}, \quad g_{vm} = g_v(y_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (17)$$

де  $P_n(y)$  – поліном Лежандра  $n$ -го степеню, а  $y_m$  – корені цього поліному.

Для отримання розв'язку рівняння (16), інтеграли у ньому наближаємо за квадратурною формулою Гауса-Лежандра [16] і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомої функції у вузлах інтерполяції:

$$g_{vj} - \frac{2\beta}{\pi\gamma} \sum_{m=1}^n g_{vm} A_m [B(y_m, y_j) + Q(y_m) - Q(y_m - y_j)] - \frac{\pi y_j^2 \beta^2 \kappa_v \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v)}{q \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v)} (Z_1(y_m) + Z_2(y_m)) \Bigg] - \sum_{m=1}^n b_m^0 g_{vm} = - \frac{2\mu_{0v} \beta \kappa_v \operatorname{ch}(l\gamma\kappa_v)}{q \operatorname{sh}(\gamma\kappa_v)} y_j^2, \quad (18)$$

$$A_m = \frac{2}{(1-y_m^2) [P'_n(y_m)]^2}, \quad b_m^0 = - \frac{P_n(0)}{y_m P'_n(y_m)}.$$



Після розв'язання системи, невідома функція апроксимується інтерполяційним поліномом за формулою (17). Отриманий розв'язок дозволяє визначити напружений стан у будь-якій точці циліндру.

Для опису полів напружень у лінійній механіці руйнування використовують коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). У цьому випадку він обчислюється за формулою:

$$\tilde{K}(t_k) = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{r-b} \cdot \tilde{\tau}_{\varphi zk}^I(r, c).$$

Безрозмірне значення КІН, після розв'язання системи (18), отримаємо за формулою:

$$K(\tau_k) = \frac{\tilde{K}(t_k)}{G\sqrt{r_0}}, \quad K(\tau_k) = \sum_{v=1}^k C_{kv} K_v, \quad K_v = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi\gamma}} \sum_{m=1}^n \frac{g_{vm}}{(1-y_m)^{P'_n}(y_m)}. \quad (19)$$

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою формули (19) проведене числове дослідження залежності КІН від безрозмірного часу  $\tau = c_2 t / r_0$ . Вузли часової сітки були згущені біля точки  $\tau = 0$ . При розрахунках вважали, що відносна товщина накладки  $\delta = d/a = 0.1$ , а тріщина розташована в серединній площині циліндру  $l = c/a = 0.5$  і має відносний радіус  $\beta = b/r_0 = 0.5$ .

Досліджувався вплив різних видів навантаження і маси накладки на значення КІН. Результати розрахунків наведені на рисунках 2-4 у вигляді графіків часових залежностей відносних КІН. При цих розрахунках вважали, що відносна висота циліндру  $\gamma = a/r_0 = 2$ . Графіки на рис. 2 побудовані для випадку дії постійного крутного моменту  $M_0(\tau) = 1$ , ( $\tau \geq 0$ ), на рис. 3 криві описують випадок, коли крутний момент задається одиничним імпульсом  $M_0(\tau) = 1$ , ( $0 \leq \tau \leq 1$ ), а на рис. 4. наведені графіки для випадку дії гармонічного крутного моменту  $M_0(\tau) = \cos(\omega\tau)$ , ( $\tau \geq 0$ ). При розрахунках вважалось, що безрозмірна частота дорівнює  $\omega = c_2 \varpi / r_0 = 3$ . На рис. 2-4 різним значенням відносної густини  $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_c : 0.25; 1; 4$  відповідають криві з номерами 1-3.

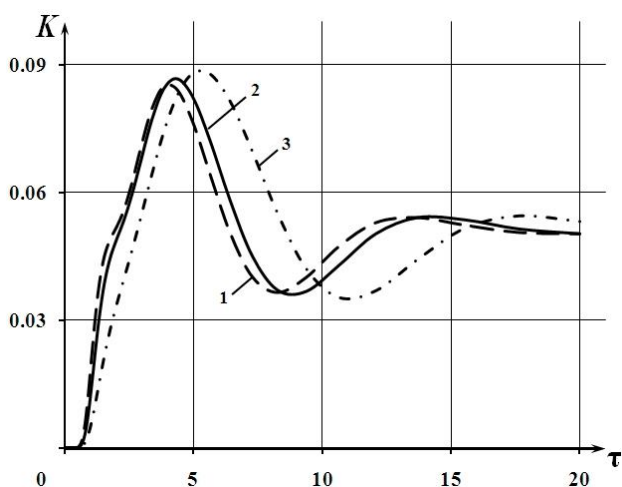


Рис. 2. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = 1, (\tau \geq 0)$

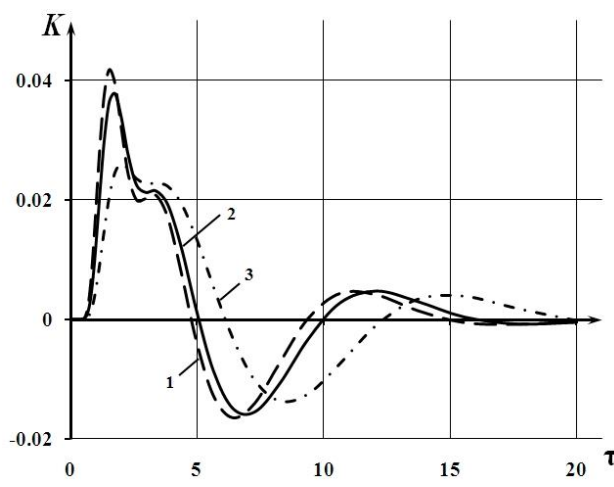


Рис. 3. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = 1, (0 \leq \tau \leq 1)$

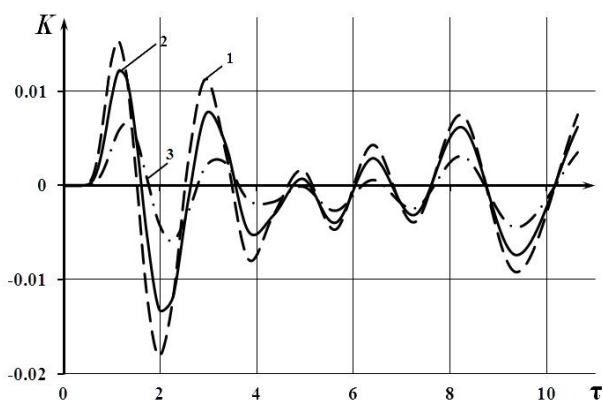


Рис. 4. Часові залежності відносних КІН при  $M_0(\tau) = \cos(3\tau)$ ,  $(\tau \geq 0)$

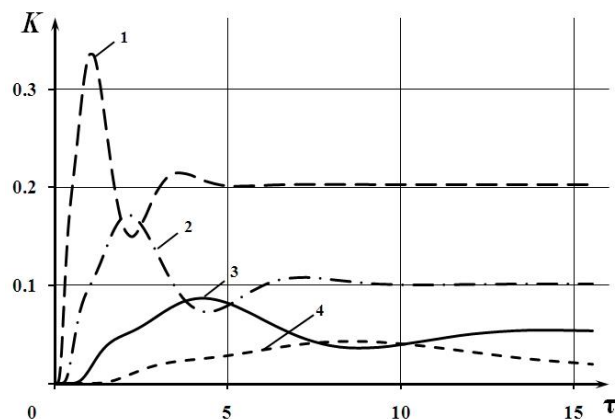


Рис. 5. Вплив геометричних параметрів циліндру на значення КІН при  $M_0(\tau) = 1$ ,  $(\tau \geq 0)$

З графіків на рис. 2 видно, що значення КІН спочатку зростають до максимального, а потім спадають зі слабкою осциляцією до рівня, який відповідає статичному навантаженню. Зі збільшенням маси накладки спостерігається збільшення тривалості перехідного процесу.

З рис.3 можна бачити, що під час дії навантаження значення КІН стрімко зростають до додатного максимуму, а по закінченні дії імпульсу стрімко спадають до від'ємного значення, потім має місце осцилююче затухання. Збільшення маси накладки спричиняє подовження перехідного процесу і зменшує значення максимуму КІН.

З рис. 4 видно, що за гармонічного навантаження поведінка КІН має осцилюючий характер. Як і на попередніх рисунках, спостерігається підвищене значення КІН під час перехідного процесу, порівняно із значенням КІН в усталеному режимі.

Було також оцінено вплив геометричних параметрів циліндру на значення КІН. Розрахунки проводились для значення відносної густини  $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_c = 1$  у випадку навантаження постійно діючим крутним моментом  $M_0(\tau) = 1$ ,  $(\tau \geq 0)$ . Результати наведені на рис. 5. Криві 1–4, відповідають різним значенням відносної висоти циліндру  $\gamma = a/r_0 : 0.5; 1; 2; 4$ .

З графіків на рис. 5 можна зробити висновок, що зі збільшенням висоти циліндру відбувається зменшення максимуму КІН, зменшується осциляція під час перехідного процесу і збільшується його тривалість.

Із аналізу усіх графіків можна зробити висновок, що оскільки максимуми КІН спостерігаються саме під час перехідного процесу, то руйнування матиме місце саме під час нього.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Akiyama T., Hara T., Shibuya T. Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.* 2001. Vol. 50. P. 137–143.
2. Lee D.-S. Penny-shaped crack in a long circular cylinder subjected to a uniform shearing stress. *Eur. J. Mech. – A/Solids.* 2001. Vol. 20, N 2. P. 227–239.
3. Huang G.-Y., Wang Y.-S., Yu S.-W. Stress concentration at a penny-shaped crack in a nonhomogeneous medium under torsion. *Acta Mech.* 2005. Vol. 180, N 1. P. 107–115.
4. Jia Z. H., Shippy D. J., Rizzo F. J. Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1989. Vol. 28, N 10. P. 2257–2273.
5. Kaman M. O., Gecit M. R. Cracked semi-infinite cylinder and finite cylinder problems. *Int. J. Eng. Sci.* 2006. Vol. 44, N 20. P. 1534–1555.

6. Wang Q. Note on the crack-plane stress field method for analyzing SIFs and its application to a concentric penny-shaped crack in a circular cylinder opened up by constant pressure. *Int. J. Fract.* 1994. Vol. 66. P. 73–76.
7. Martin P. A., Wickham G. R. Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. *Proc. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. The Royal Society.* 1983. Vol. 390, N 1798. P. 91–129.
8. Гузь А., Зозуля В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1993. 236 с.
9. Singh B. M. et al. Dynamic stress intensity factors for penny-shaped crack in twisted plate. *J. Appl. Mech.* 1980. Vol. 47, N 4. P. 963–965.
10. Srivastava K. N., Palaiya R. M., Gupta O. P. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder. *J. Elast. Kluwer Academic Publishers.* 1982. Vol. 12, N 1. P. 143–152.
11. Попов В. Г. Напряженное состояние конечного упругого цилиндра с круговой трещиной при крутильных колебаниях. *Прикладная Механика.* 2012. Т. 48, № 4. С. 86–93.
12. Ivanyts'kyi Y. L. et al. Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion. *Mater. Sci., Springer US.* 2007. Vol. 43, N 2. P. 203–214.
13. Savruk M. P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Mater. Sci., Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers.* 2003. Vol. 39, N 4. P. 465–471.
14. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 341 с.
15. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень: навч. посібник. Одеса: Астропринт, 2005. 184 с.
16. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Москва: Наука, 1967. 500 с.

## REFERENCES

1. Akiyama, T., Hara, T. & Shibuya, T. (2001). Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 137-143.
2. Lee, D.-S. (2001). Penny-shaped crack in a long circular cylinder subjected to a uniform shearing stress. *Eur. J. Mech. - A/Solids*, Vol. 20, No. 2, pp. 227-239.
3. Huang, G.-Y., Wang, Y.-S. & Yu, S.-W. (2005). Stress concentration at a penny-shaped crack in a nonhomogeneous medium under torsion. *Acta Mech.*, Vol. 180, No. 1, pp. 107-115.
4. Jia, Z. H., Shippy, D. J. & Rizzo, F. J. (1989). Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, No. 10, pp. 2257-2273.
5. Kaman, M. O. & Gecit, M. R. (2006). Cracked semi-infinite cylinder and finite cylinder problems. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 44, No. 20, pp. 1534-1555.
6. Wang, Q. (1994). Note on the crack-plane stress field method for analyzing SIFs and its application to a concentric penny-shaped crack in a circular cylinder opened up by constant pressure. *Int. J. Fract.*, Vol. 66, pp. 73-76.
7. Martin, P. A. & Wickham, G. R. (1983). Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. *Proc. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. The Royal Society*, Vol. 390, No. 1798, pp. 91-129.
8. Guz, A. & Zozulja, V. (1993). Brittle fracture of materials under dynamic loads. Kyiv: Naukova dumka, Ukraine.
9. Singh, B. M., Haddow, J. B., Vrbik, J. & Moodie, T. B. (1980). Dynamic stress intensity factors for penny-shaped crack in twisted plate. *J. Appl. Mech.*, Vol. 47, No. 4, pp. 963-965.
10. Srivastava, K. N., Palaiya, R. M. & Gupta, O. P. (1982). Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder. *J. Elast. Kluwer Academic Publishers*, Vol. 12, No. 1, pp. 143-152.
11. Popov, V. G. (2012). Stress state of a finite elastic cylinder with a circular crack at torsional oscillations. *International Applied Mechanics*, Vol. 48, Iss. 4, pp. 86-93.
12. Ivanytskyi, Ya. L., Boiko, V. M., Khodan', I. V. & Shtayura, S. T. (2007). Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion. *Mater. Sci., Springer US*, Vol. 43, No. 2, pp. 203-214.
13. Savruk, M. P. (2003). New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Mater. Sci., Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers*, Vol. 39, No. 4, pp. 465-471.

14. Popov, G. Ya. (1982). The elastic stress concentration near the cliches, incisions, thin inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka, Russia.
15. Popov, G. Ya., Reut, V. V. & Vaisfeld, N. D. (2005). Equations of Mathematical Physics. Method of Integral Transformations. Odessa: Astroprint, Ukraine.
16. Krylov, V. I. (1967). Approximate calculation of integrals. Moscow: Nauka, Russia.

УДК 378

## **С. П. ТИМОШЕНКО ТА СУЧАСНА ІНЖЕНЕРНА ОСВІТА В УКРАЇНІ: ДЕЯКІ РЕАЛІЇ, ПРОБЛЕМИ, ТЕНДЕНЦІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВИ**

Дем'яненко А. Г.

*Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,  
вул. Ворошилова, 25, м. Дніпро, Україна*

anatdem@ukr.net

Наведено деякі міркування, погляди та думки одного з найвидатніших механіків світу, нашого співвітчизника С. П. Тимошенка, стосовно інженерної освіти, яку він створював і знав зсередини, та які є актуальними і для сьогодення. Обговорюються деякі питання сучасного стану та перспектив вищої інженерної освіти в Україні. Наголос робиться на необхідності збереження її фундаментальності.

*Ключові слова: інженерна освіта, стан, перспективи, фундаментальність.*

## **S. P. TIMOSHENKO И СОВРЕМЕННОЕ ИНЖЕНЕРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УКРАИНЕ: НЕКОТОРЫЕ РЕАЛИИ, ПРОБЛЕМЫ, ТЕНДЕНЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ**

Демьяненко А. Г.

*Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,  
ул. Ворошилова, 25, г. Днепр, Украина*

anatdem@ukr.net

Приведены некоторые соображения, мысли и взгляды одного из выдающихся механиков XX века, нашего соотечественника С. П. Тимошенко, касающиеся инженерного образования, которые актуальны и сегодня. Обсуждается состояние, проблемы, тенденции и перспективы высшего инженерного образования в Украине. Акцент делается на необходимости сохранения его фундаментальности.

*Ключевые слова: инженерное образование, состояние, перспектива, фундаментальность.*

## **S.P. TIMOSHENKO AND HIGHER ENGINEERING EDUCATION: SOME PROBLEMS, CURRENT STATUS AND PERSPECTIVES OF ENGINEERING EDUCATION IN UKRAINE**

Demianenko A. G.

*Dnipropetrovsk State Agrarian and economics University of Ukraine,  
Voroshilova str., 25, Dniepr, Ukraine*

anatdem@ukr.net

Shows some thoughts, opinions and ideas of one of the founders of engineering education on a global scale, our fellow S.P. Tymoshenko regarding engineering education, which he created and knew from the inside, and that are relevant for today. Some problems of education engineering and of current status and perspectives of higher education engineering in Ukraine are discussed. Saving fundamental bases of agrarian engineering higher education system and its intensification of the self instruction learning are accented.

*Key words: engineering education, status, fundamental, perspectives.*