УДК 539.3

# ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ИЗОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., д. т. н., доцент,
Богуславская А. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,*
*ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

В работе предлагается методика определения эффективных термоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропного волокна и изотропной матрицы, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. Применение предложенной методики позволяет получить термоупругие характеристики композита в виде функций термоупругих характеристик его составляющих.

*Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, температурные коэффициенты линейного расширения, термоупругие постоянные.*

## ТЕРМОМЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ІЗОТРОПНОЮ МАТРИЦЕЮ І ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент,
Богуславська А. М., аспірант

*Запорізький національний університет,*
*вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

У роботі пропонується методика визначення эфективних термопружних характеристик однонаправленого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізотропного волокна та ізотропної матриці, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. Застосування пропонованої методики дозволяє отримати термопружні характеристики композита у вигляді функцій термопружних характеристик його складових.

*Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, температурні коефіцієнти лінійного розширення, термопружні константи.*

## THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THE FIBER COMPOSITE MATERIAL WITH ISOTROPIC MATRIX AND TRANSVERSE ISOTROPIC FIBER

Klymenko M. I., PhD in Math and Physics, Associate Professor,
Grebeniuk S. M., PhD in Engineering, Associate Professor,
Boguslavska A.M., postgraduate student

*Zaporizhzhya National University,*
*Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gsm1212@ukr.net

In this work we describe the definition of thermoelastic response of composite material. The subject of research is the UD composite with hexagonal fibers. We suppose that the matrix is an isotropic material and the fiber is a transverse isotropic material, whereby the isotropic plane is situated vertical to the fiber axis.

The element of fiber composite material is represented as the combination of two cylinders of infinite length – isotropic hollow cylinder modeling matrix and transverse isotropic solid cylinder modeling the fiber.

Thermoelastic constants are found as a result of solution of two boundary values. At first we solve the boundary value of joint deformation of isotropic matrix and transverse isotropic fiber. As a result of the solution we obtain the components of the stress-strain state as the function of the thermoelastic constants of the matrix material, fiber material as well as a volume fraction of each of them in the composite. Next we obtain the solution of an analogous boundary value for a composite which is represented by a homogenous transverse isotropic material with yet unknown thermoelastic constants. As a result of the solution we obtain the components of the stress-strain state as the function of unknown thermoelastic constants of a homogenous transverse isotropic material modeling the composite. From the matching condition, as a rule such condition is the equality of any components of displacement vector, we obtain unknown thermoelastic constants of transverse isotropic material as the function of the thermoelastic constants of the matrix material, fiber material as well as a volume fraction of each of them in the composite.

From abovementioned it is clear that the more accurately the boundary value is solved the more accurately unknown thermoelastic constants of the composite will be obtained. Analytic solutions for such a combination can be obtained only for a limited number of boundary values. Such problems include uniform longitudinal stretching.

As a result of the calculations we obtained the formulas for unsymmetrical stress-strain state of a composite material with an isotropic matrix and transverse isotropic fiber. We found all the components of the stresses, deformations and displacements as the functions of thermoelastic material response and as the functions of the constants which are found from the boundary conditions taking into account the volume fraction of the fiber in the composite material.

The prospects for further research in this direction are related to the determination of all the effective characteristics of composite materials with a transversely isotropic matrix and fiber and their application to solving the problems of the mechanics of thermoelastic composites.

*Key words: composite material, matrix, fiber, temperature coefficients of inear expansion, thermoelastic constants.*

## ВВЕДЕНИЕ

При решении температурных задач механики волокнистых композитов, композиционный материал, как правило, представляется однородным анизотропным материалом. Свойства такого материала зависят от термоупругих характеристик матрицы и волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Учет анизотропии термоупругих свойств составляющих композита позволяет уточнить результаты и построить более адекватные модели, подтвержденные экспериментальными исследованиями. Задачи данного типа, как правило, решаются в два этапа. Сначала необходимо определить термоупругие свойства матрицы и волокна, а потом решить аналогичную краевую задачу, где композит представлен в виде однородной сплошной среды с термоупругими постоянными.

Необходимость учета термоупругих свойств при моделировании процессов деформирования композитов определяет актуальность задач определения их эффективных термоупругих характеристик по известным характеристикам составляющих. Этим задачам посвящено значительное число исследований. В частности, задачи расчета физических свойств композиционных материалов по свойствам компонентов рассмотрены в работах [1, 3, 4]. В работах [1, 3] для композита построены зависимости его температурных коэффициентов линейного расширения от объемного содержания волокна в композите и термоупругих констант его составляющих. Механические характеристики композитов при продольном деформировании рассмотрены в [2]. В работе [5] исследовано влияние технологических параметров на механические свойства нескольких типов углепластиков при автоклавном формовании. Связанная нестационарная задача термоупругости для неоднородного тела, описываемая системой из четырех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с переменными по координатам коэффициентами, рассматривается в [6]. Проблемы прогнозирования реологических свойств композитов с термовязкоупругими характеристиками рассмотрены в работе [7]. Для решения этой задачи предлагается методика, основанная на базе совместного применения метода квазиконстантных операторов и метода конечных элементов.

Целью данного исследования является определение компонент напряженно-деформированного состояния композита как функции термоупругих постоянных изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна, а также объемной доли каждого из них в композите.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

В работе рассматривается задача определения термоупругих характеристик композитного материала. Объектом исследования является однонаправленный композит с гексагональным расположением волокон. Предположим, что матрица представлена изотропным материалом, а волокно – трансверсально-изотропным, причем плоскость изотропии направлена перпендикулярно оси волокна.

Элемент волокнистого композиционного материала представим в виде комбинации двух цилиндров бесконечной длины – изотропного полого, моделирующего матрицу и трансверсально-изотропного сплошного, моделирующего волокно.

Для этого аппроксимируем объем элементарной гексагональной ячейки объемом цилиндра (рис. 1), причем радиус цилиндра примем таким, чтобы объем содержания волокна в гексагональной ячейке, и объем содержания волокна в цилиндрической ячейке, были бы одинаковыми.

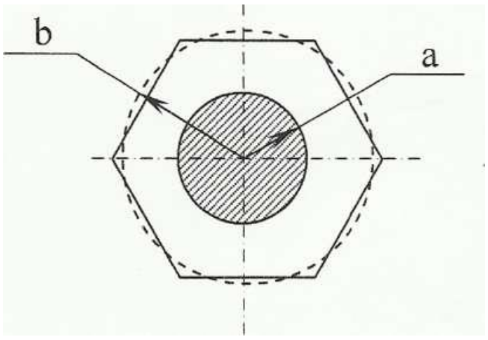


Рис. 1. Гексагональная ячейка

Если объемное содержание волокон в композите равно $f$, то учитывая, что область, занимаемая матрицей в элементарной ячейке, и область, занимаемая волокном в элементарной ячейке, имеют одинаковую высоту, то справедливо следующее соотношение:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Термоупругие постоянные находятся из решения двух краевых задач. Сначала решается краевая задача совместного деформирования изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна. В результате решения, получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции термоупругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Далее получаем решение аналогичной краевой задачи для композита, который представляется однородным трансверсально-изотропным материалом с пока еще неизвестными термоупругими постоянными. В результате решения получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции неизвестных термоупругих постоянных однородного трансверсально-изотропного материала, моделирующего композит. В качестве условия согласования обычно выступает равенство каких-либо компонент вектора перемещений. Из таких условий находят неизвестные термоупругие постоянные трансверсально-изотропного материала как функции термоупругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите.

Получить аналитические решения для такой комбинации можно лишь для ограниченного числа краевых задач. К числу таких задач относят: равномерное продольное растяжение, равномерное поперечное растяжение, чистый поперечный сдвиг и чистый продольный сдвиг.

Рассмотрим осесимметричное напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, тогда $\sigma_{zz} = \sigma_0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, $\sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$. Тогда два уравнения равновесия для данной задачи термоупругости:

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}+G_\theta=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}+G_z=0$$

выполнятся тождественно, а третье уравнение при массовой силе $G_r=0$ принимает вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0. \tag{2}$$

Закон Гука с учетом влияния постоянной температуры $T$ для трансверсально-изотропного материала запишется в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}-\alpha_{rr}T&=\frac{1}{E_2}\left(\sigma_{rr}-\left(\nu_{21}\sigma_{zz}+\nu_{23}\sigma_{\theta\theta}\right)\right),\\ \varepsilon_{\theta\theta}-\alpha_{\theta\theta}T&=\frac{1}{E_2}\left(\sigma_{\theta\theta}-\left(\nu_{21}\sigma_{zz}+\nu_{23}\sigma_{rr}\right)\right),\\ \varepsilon_{zz}-\alpha_{zz}T&=\frac{1}{E_1}\left(\sigma_{zz}-\nu_{12}\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Если считать осевое напряжение постоянным, в частности нулевым, то, тогда из (3) следует, что $\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}(r)$ и, следовательно, $\varepsilon_{zz}=const$. Тогда с учетом обратного закона Гука для трансверсально-изотропного материала и уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r},\\ \varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\end{aligned} \tag{4}$$

для осесимметричного напряженно-деформированного состояния уравнение (2) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\left(\alpha_{rr}+\frac{\left(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-$$
$$-\frac{T\left(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(\alpha_{\theta\theta}-\alpha_{rr}\right)}{r\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)}.$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$u_{rr}(r)=\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r}\int Trdr+C_1r+\frac{C_2}{r},$$

где $C_1$ и $C_2$ – постоянные, определяемые из граничных условий. Отсюда, используя (4), получаем:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}=-\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2}\int Trdr-T\right)+C_1-\frac{C_2}{r^2},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}=\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr+C_1+\frac{C_2}{r^2}.$$

Воспользовавшись обратным законом Гука для трансверсально-изотропного материала получаем:

$$\sigma_{rr}=\frac{E_2\left[\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{zz}+\left(1+\nu_{23}\right)C_1+\left(\nu_{23}+2\nu_{21}\nu_{12}-1\right)\frac{C_2}{r^2}\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}}-$$

$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr;$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E_2\left[\nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\varepsilon_{zz}+\left(1+\nu_{23}\right)C_1+\left(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12}\right)\frac{C_2}{r^2}\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}}+$$

$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr-\frac{E_2T\left(\alpha_{\theta\theta}+\nu_{12}\alpha_{zz}\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}.$$

Подставим полученные соотношения и значения $\sigma_{zz}=\sigma_0$ в выражение (3) и найдем соотношение для $\varepsilon_{zz}$:

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\sigma_0\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{E_1\left(1-\nu_{23}\right)}-\frac{2\nu_{21}C_1}{\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{T\left(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta}+\alpha_{zz}\right)\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}.$$

Учитывая соотношение

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

получим выражение для осевых перемещений:

$$u_z\left(z\right)=\int\varepsilon_{zz}dz=\left(\frac{\sigma_0\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{E_1\left(1-\nu_{23}\right)}-\frac{2\nu_{21}C_1}{\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{T\left(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta}+\alpha_{zz}\right)\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}\right)z+C_3. \qquad (5)$$

При условии

$$u_z\left(0\right)=0,$$

имеем $C_3=0$. Соотношение (5) запишется в виде:

$$u_z\left(z\right)=\left(\frac{\sigma_0\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{E_1\left(1-\nu_{23}\right)}-\frac{2\nu_{21}C_1}{\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{T\left(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta}+\alpha_{zz}\right)\left(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}\right)z. \qquad (6)$$

С учетом полученного соотношения (6) выражения для напряжений примут вид:

$$\sigma_{rr}=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{C_1}{\left(1-\nu_{23}\right)}-\frac{C_2}{r^2\left(1+\nu_{23}\right)}\right)+\frac{E_2T\nu_{12}\left(\nu_{21}\alpha_{\theta\theta}+\alpha_{zz}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}-$$

$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr;$$

$$\sigma_{\theta\theta}=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{C_1}{\left(1-\nu_{23}\right)}+\frac{C_2}{r^2\left(1+\nu_{23}\right)}\right)+\frac{E_2T\left(\left(\nu_{12}\nu_{21}+\nu_{23}-1\right)\alpha_{\theta\theta}+\nu_{12}\nu_{23}\alpha_{zz}\right)}{\left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\left(1-\nu_{23}\right)}+$$

$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}\left(\nu_{23}+1\right)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr.$$

Таким образом, для напряженно-деформированного состояния получены все компоненты напряжений, деформаций и перемещений, как функции термоупругих характеристик материала и постоянных.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрим совместную температурную деформацию сплошного цилиндра $0 \le r \le a,$ моделирующего волокно, и полого цилиндра $a \le r \le b,$ моделирующего матрицу.

Краевые условия подберем таким образом, чтобы они соответствовали экспериментальным данным, полученным для композиционного материала. В месте сцепления волокна с матрицей радиальные перемещения и напряжения являются непрерывными, осевые перемещения и волокна и матрицы постоянны и одинаковы:

$$\sigma_{rr}^{\circ}(a)=\sigma_{rr}^{*}(a),\quad u_r^{\circ}(a)=u_r^{*}(a),\quad u_z^{\circ}(h)=u_z^{*}(h). \tag{7}$$

Здесь и далее символом $^{\circ}$ обозначаются величины, относящиеся к волокну, а символом $^{*}$ – величины, относящиеся к матрице.

При совместном деформировании матрицы и волокна:

$$\sigma_{rr}^{*}(b)=0. \tag{8}$$

Радиальные перемещения трансверсально-изотропного волокна описываются соотношением:

$$u_{rr}(r)=\left(\alpha_{rr}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{\theta\theta}+\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{zz}\right)\cdot\frac{1}{r}\int Trdr+C_1 r+\frac{C_2}{r},$$

а с учетом того, что при $r=0,$ $u_r^{\circ}(0)=0$ следует, что $C_2=0$, тогда данное соотношение запишется в виде (переобозначим $C_1$ на $C$):

$$u_r^{\circ}(r)=\left(\alpha_{rr}^{\circ}+\frac{\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\frac{\nu_{12}^{\circ}(\nu_{23}^{\circ}+1)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{zz}^{\circ}\right)\cdot\frac{1}{r}\int_0^r Trdr+Cr. \tag{9}$$

Выражения для $u_r^{\circ}(r),$ $\sigma_{rr}^{\circ}(r),$ $\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r)$ принимают вид:

$$u_z^{\circ}(z)=\left(\frac{\sigma_0^{\circ}(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}(1-\nu_{23}^{\circ})}-\frac{2\nu_{21}^{\circ}C}{1-\nu_{23}^{\circ}}+\frac{T(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\alpha_{zz}^{\circ})(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})}{(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1-\nu_{23}^{\circ})}\right)z, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{\circ}(r)&=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C\right)+\frac{E_2^{\circ}T\nu_{12}^{\circ}(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\alpha_{zz}^{\circ})}{(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1-\nu_{23}^{\circ})}-\\&-\frac{E_2^{\circ}}{\nu_{23}^{\circ}+1}\cdot\left(\alpha_{rr}^{\circ}+\frac{\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\frac{\nu_{12}^{\circ}(\nu_{23}^{\circ}+1)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{zz}^{\circ}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_0^r Trdr,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r)&=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C\right)+\frac{E_2^{\circ}T\left((\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}+\nu_{23}^{\circ}-1)\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\nu_{12}^{\circ}\nu_{23}^{\circ}\alpha_{zz}^{0}\right)}{(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ})(1-\nu_{23}^{\circ})}+\\&+\frac{E_2^{\circ}}{\nu_{23}^{\circ}+1}\cdot\left(\alpha_{rr}^{\circ}+\frac{\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\frac{\nu_{12}^{\circ}(\nu_{23}^{\circ}+1)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{zz}^{\circ}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int Trdr.\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично запишем соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние изотропной матрицы (переобозначив $C_1$ на $A$, $C_2$ на $B$):

$$u_r^*(r)=\frac{1+\nu^*}{1-\nu^*}\alpha^*\cdot\frac{1}{r}\int_a^r Trdr+Ar+\frac{B}{r}. \tag{13}$$

$$u_z^*(z)=\left(\frac{\sigma_0^*\left(1-\nu^*-2\left(\nu^*\right)^2\right)}{E^*\left(1-\nu^*\right)}-\frac{2\nu^*A}{1-\nu^*}+\frac{T\alpha^*\left(1-\nu^*-2\left(\nu^*\right)^2\right)}{\left(1-\nu^*\right)^2}\right)z, \tag{14}$$

$$\sigma_{rr}^*(r)=E^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*\left(1-\nu^*\right)}+\frac{A}{1-\nu^*}-\frac{B}{r^2\left(\nu^*+1\right)}\right)+\frac{E^*T\nu^*\alpha^*}{\left(1-\nu^*\right)^2}-\frac{E^*\alpha^*}{1-\nu^*}\cdot\frac{1}{r^2}\int_a^r Trdr; \tag{15}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r)=E^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*\left(1-\nu^*\right)}+\frac{A}{1-\nu^*}+\frac{B}{r^2\left(\nu^*+1\right)}\right)+\frac{E^*T\cdot\left(2\left(\nu^*\right)^2+\nu-1\right)\alpha}{\left(1-\nu^*\right)^2\left(1+\nu^*\right)}+.\frac{E^*\alpha^*}{1-\nu^*}\cdot\frac{1}{r^2}\int_a^r Trdr. \tag{16}$$

Исходя из краевых условий (7) и (8), находим постоянные $A$, $B$ и $C$ и зависимость между $\sigma_0^\circ$ и $\sigma_0^*$. Из второго равенства (7) имеем:

$$C=A+\frac{B}{a^2}-\frac{T}{2}\cdot\left(\alpha_{rr}^\circ+\frac{\nu_{23}^\circ+\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\alpha_{\theta\theta}^\circ+\frac{\nu_{12}^\circ\left(\nu_{23}^\circ+1\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\alpha_{zz}^\circ\right). \tag{17}$$

Из равенства (8) получается:

$$A=\frac{B\left(1-\nu^*\right)}{b^2\left(1+\nu^*\right)}-\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}-\frac{T\nu^*\alpha}{1-\nu^*}+\frac{T\left(1-f\right)\alpha^*}{2}. \tag{18}$$

Тогда (17) запишется в виде:

$$\begin{gathered}C=B\left(\frac{f\left(1-\nu^*\right)+\left(1+\nu^*\right)}{a^2\left(1+\nu^*\right)}\right)-\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}-\frac{T\nu^*\alpha^*}{1-\nu^*}+\frac{T\left(1-f\right)\alpha^*}{2}-\\-\frac{T}{2}\cdot\left(\alpha_{rr}^\circ+\frac{\nu_{23}^\circ+\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\alpha_{\theta\theta}^\circ+\frac{\nu_{12}^\circ\left(\nu_{23}^\circ+1\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}\alpha_{zz}^\circ\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Из первого равенства (7), обозначив

$$d_1=E^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^\circ\right), \tag{20}$$

$$d_2=E_2^\circ\left(f\left(1-\nu^*\right)+\left(1+\nu^*\right)\right), \tag{21}$$

имеем:

$$\begin{gathered}B=\frac{a^2E_2^\circ\left(1+\nu^*\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ}-\frac{\sigma_0^*\nu^*}{E^*}\right)+\\+\frac{a^2T\alpha^*\left(1+\nu^*\right)\left(E_2^\circ\left(1-3\nu^*-f\left(1-\nu^*\right)\right)+E^*\left(1-\nu_{23}^\circ\right)\left(f-1\right)\right)}{2\left(d_1-d_2\right)\left(1-\nu^*\right)}-\frac{a^2TE_2^\circ\left(1+\nu^*\right)\alpha_{rr}^\circ}{d_1-d_2}.\end{gathered}$$

Тогда

$$C=\frac{d_2\nu_{12}^{\circ}}{\left(d_1-d_2\right)E_1^{\circ}}\sigma_0^{\circ}-\frac{d_1\nu^*}{\left(d_1-d_2\right)E^*}\sigma_0^*+\frac{T\left(\alpha^*d_1+\alpha_{rr}^{\circ}d_2\right)}{\left(d_1-d_2\right)}-$$
$$-\frac{T}{2}\cdot\left(\alpha_{rr}^{\circ}+\frac{\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{\theta\theta}^{\circ}+\frac{\nu_{12}^{\circ}\left(\nu_{23}^{\circ}+1\right)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\alpha_{zz}^{\circ}\right),$$

$$A=\frac{\nu_{21}^{\circ}f\left(1-\nu^*\right)}{d_1-d_2}\sigma_0^{\circ}-\frac{\nu^*}{E^*}\frac{fE_2^{\circ}\left(1-\nu^*\right)+d_1-d_2}{d_1-d_2}\sigma_0^*+\frac{fTE_2^{\circ}\left(1-\nu^*\right)\left(\alpha^*-\alpha_{rr}^{\circ}\right)}{d_1-d_2}+\frac{T\alpha^*\left(1-3\nu^*\right)}{2\left(1-\nu^*\right)}.$$

И наконец из третьего равенства (7) находим соотношение между $\sigma_0^*$ и $\sigma_0^o$. Приняв

$$d^{\circ}=\frac{E^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)-E_2^{\circ}\left(f\left(1-\nu^*-2\nu_{12}^{\circ}\nu^*\right)+\left(1+\nu^*\right)\right)}{E_1^{\circ}},\tag{22}$$

$$d^*=\frac{E^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu^*\nu_{21}^{\circ}\right)-E_2^{\circ}\left(f\left(1-\nu^*-2\left(\nu^*\right)^2\right)+\left(1+\nu^*\right)\right)}{E^*},\tag{23}$$

получаем

$$d^{\circ}\sigma_0^{\circ}-d^*\sigma_0^*=T\left(2\nu^*fE_2^{\circ}\alpha_{rr}^{\circ}+\left(d_1-d_2-2fE_2^{\circ}\nu^*\right)\alpha^*-\left(d_1-d_2\right)\alpha_{zz}^{\circ}-\frac{2\nu_{21}^{\circ}d_1\left(\alpha_{rr}^{\circ}-\alpha^*\right)}{\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}\right).\tag{24}$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для однородного трансверсально-изотропного материала, моделирующего поведение композиционного материала. В этом случае поле напряжений будет определяться следующими соотношениями:

$$\sigma_{zz}=const,\quad \sigma_{rr}=0,\quad \sigma_{\theta\theta}=0,\quad \sigma_{zr}=\sigma_{\theta z}=\sigma_{r\theta}=0,\tag{25}$$

причем, для того, чтобы совпадали условия равновесия для обеих задач необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\pi a^2\sigma_0^{\circ}+\pi\left(b^2-a^2\right)\sigma_0^*=0,\quad \text{или}\quad \sigma_0^{\circ}f+\sigma_0^*\left(1-f\right)=0.\tag{26}$$

Используя (24), получаем:

$$\sigma_0^*=\frac{\gamma Tf}{d^{\circ}+f\left(d^*-d^{\circ}\right)},\tag{27}$$

$$\sigma_0^{\circ}=-\frac{\gamma T\left(1-f\right)}{d^{\circ}+f\left(d^*-d^{\circ}\right)},\tag{28}$$

где

$$\gamma=\frac{2\nu_{21}^{\circ}d_1\left(\alpha_{rr}^{\circ}-\alpha^*\right)}{\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}+\left(d_1-d_2\right)\alpha_{zz}^{\circ}+2\nu^*fE_2^{\circ}\left(\alpha^*-\alpha_{rr}^{\circ}\right)-\alpha^*\left(d_1-d_2\right).$$

С учетом (25) соотношения (3) примут вид:

$$\varepsilon_{rr}=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0+\alpha_{rr}T,\tag{29}$$

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

$$\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E_1}\sigma_0+\alpha_{zz}T. \tag{30}$$

Тогда перемещения будут определяться формулами

$$u_r\left(r\right)=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0 r+\alpha_{rr}Tr+C_1;$$

$$u_z\left(z\right)=\frac{1}{E_1}\sigma_0 z+\alpha_{zz}Tz+C_2.$$

Постоянные $C_1=C_2=0$ с учетом, что для рассматриваемой задачи будут выполняться условия $u_r\left(0\right)=0$ и $u_z\left(0\right)=0$, тогда

$$u_r\left(r\right)=\alpha_{rr}Tr; \tag{31}$$

$$u_z\left(z\right)=\alpha_{zz}Tz. \tag{32}$$

Будем предполагать, что в качестве условий согласования для рассматриваемой задачи о температурном деформировании однородного композита и задачи о температурном деформировании изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна будет выступать равенство осевых перемещений для произвольной осевой координаты и равенство радиальных перемещений на наружной части цилиндрической поверхности:

$$u_r\left(b\right)=u_r^*\left(b\right), \tag{33}$$

$$u_z\left(h\right)=u_z^{\circ}\left(h\right)=u_z^*\left(h\right). \tag{34}$$

Тогда соотношение (34) с учетом (14), (32) запишем в виде:

$$\frac{1}{1-\nu^*}\left(\frac{\sigma_0^*\left(1-\nu^*-2\left(\nu^*\right)^2\right)}{E^*}-2\nu^*A+\frac{T\alpha^*\left(1-\nu^*-2\left(\nu^*\right)^2\right)}{\left(1-\nu^*\right)}\right)=\alpha_{zz}T\cdot$$

Используя (27) и выражение для $A$, получим:

$$\alpha_{zz}=\frac{\gamma fd^*}{\left(d^{\circ}+f\left(d^*-d^{\circ}\right)\right)\left(d_1-d_2\right)}+\frac{2fE_2^{\circ}\nu^*\left(\alpha_{rr}^{\circ}-\alpha^*\right)}{d_1-d_2}+\alpha^*. \tag{35}$$

Из условия (34) найдем выражение для $\alpha_{rr}$. Тогда

$$\frac{1+\nu^*}{1-\nu^*}\cdot\frac{\alpha^*T}{2}\left(1-f\right)+A+\frac{B}{b^2}=\alpha_{rr}T.$$

Подставив выражения для констант $A$ и $B$, получим:

$$\alpha_{rr}=-\frac{Lf}{\left(d_1-d_2\right)\left(d^{\circ}+f\left(d^*-d^{\circ}\right)\right)}\left(2\nu_{21}^{\circ}\left(1-f\right)+\frac{\nu^*\left(2fE_2^{\circ}+d_1-d_2\right)}{E^*}\right)+$$
$$+\frac{2fE_2^{\circ}\left(\alpha^*-\alpha_{rr}^{\circ}\right)}{d_1-d_2}+\alpha^*. \tag{36}$$

Определим термомеханические характеристики для волокнистого композита. Материал матрицы: модуль упругости $E^*=10^6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu^*=0,4$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha^*=1\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$. Материал волокна: модуль упругости

$E_1^{\circ} = E_2^{\circ} = 10^9$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_{12}^{\circ} = \nu_{21}^{\circ} = \nu_{23}^{\circ} = 0,3$, температурные коэффициенты линейного расширения $\alpha_{rr}^{\circ} = \alpha_{\theta\theta}^{\circ} = \alpha_{zz}^{\circ} = 1 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

Воспользовавшись формулами (35), (36) для объемного содержания волокна от 0,1 до 0,9, получим зависимости изображенные на рис. 2, 3 соответственно:

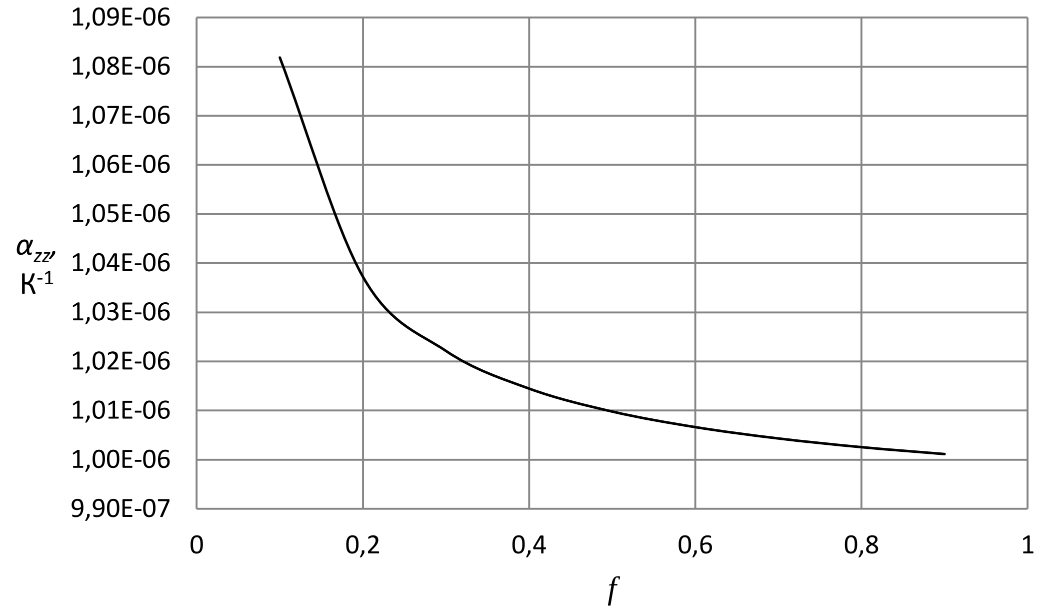


Рис. 2. Изменение коэффициента $\alpha_{zz}$ в зависимости от объемной доли волокна

Анализируя рис. 2, можно заметить, что с увеличением объемной доли волокна в композите значение коэффициента линейного термоупругого расширения уменьшается и при $f = 0,9$ приближается к $1 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

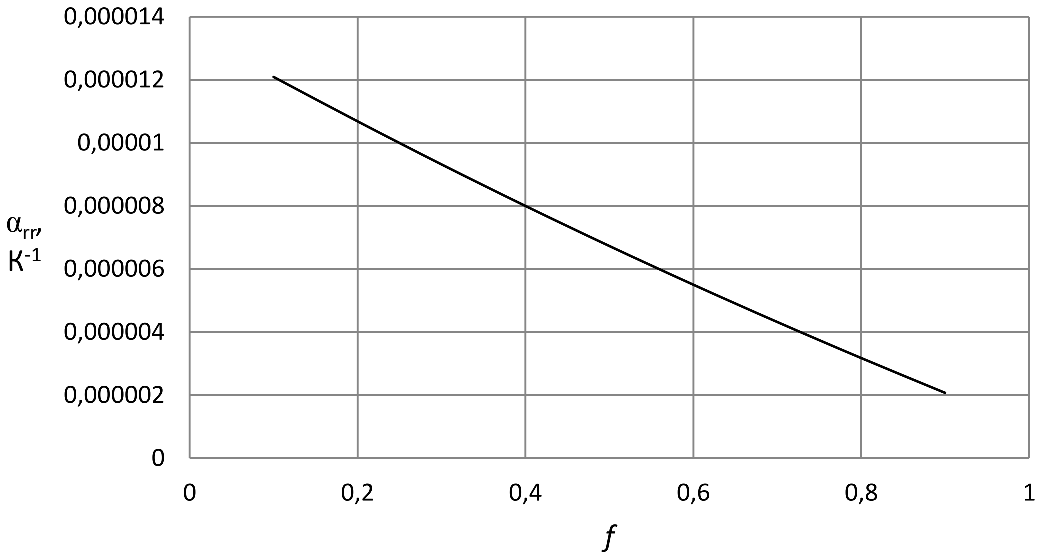


Рис. 3. Изменение коэффициента $\alpha_{rr}$ в зависимости от объемной доли волокна

Из рис. 3. видно, что данная зависимость близка к линейной и с увеличением объемной доли волокна в композите значение коэффициента линейного термоупругого расширения уменьшается.

# ВЫВОДЫ

Предложена методика гомогенизации термоупругих характеристик однонаправленного композита с трансверсально-изотропным волокном и изотропной матрицей. Получены аналитические соотношения для температурных коэффициентов линейного расширения композита как функции характеристик его составляющих и объемной доли волокна в композите. Согласно предложенной методике проведен расчет температурных коэффициентов для композита с изотропными матрицей и волокном. Перспективы дальнейших исследований в данном направлении связаны с определением всех эффективных характеристик композиционных материалов с трансверсально-изотропными матрицей и волокном и применением их к решению задач термоупругости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наукова думка, 1985. 593 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 572 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982. 336 с.
4. Бойко Л. А., Ксендзенко Л. С., Василенко Н. Ю., Баева Д. С. Зависимость температурных напряжений в компонентах стекловолокнистого композита от процентного содержания стеклянных волокон в материале. *Вестник инженерной школы ДВФУ. Строительство и технологии материалов*. 2013. № 4(17). С. 76–81.
5. Аношкин А. Н., Зуйко В. Ю., Шипунов Г. С, Третьяков А. А. Технологии и задачи механики композиционных материалов для создания лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя. *Вестник ПНИПУ*. 2014.
6. Горбачев В. И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов. *Прикладная механика и математика*. 2014. Т. 78. № 2. С. 277–299.
7. Куимова Е. В., Труфанов Н. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2009. № 4(70). С. 129–148.
8. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности трансверсально-изотропного композита с изотропными эллипсоидальными включениями. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*. 2015. № 3(60). С. 99–110.

## REFERENCES

1. Karpinos, D. M. (1985). Composite materials. Reference book. Kiev: Naukova Dumka.
2. Timoshenko, S. P. and Goodyer, J. (1975). Theory of Elasticity. Moscow: Science.
3. Christensen, R. (1982). Introduction to Composite Mechanics. Moscow: Mir.
4. Boyko, L. A., Ksendzenko, L. S., Vasilenko, N. Yu. & Baeva, D. S. (2013). Dependence of temperature stresses in the components of a fiberglass composite on the percentage of glass fibers in a material. Vestnik of the Engineering School of the FEFU. Building and Materials Technology, No. 4(17), pp. 76-81.
5. Anoshkin, A. N, Zuyko, V. Yu., Shipunov, G. S. & Tretyakov A. A. (2014). Technologies and problems of the mechanics of composite materials for creating a blade of a rectifying device for an aircraft engine. Vestnik PNIIP. Mechanika.
6. Gorbachev, V. I. (2014). Integral formulas in the related problem of thermoelasticity of an inhomogeneous body. Application in the Mechanics of Composites. Applied Mechanics and Mathematics, Vol. 78, No. 2, pp. 277-299.
7. Kuimova, E. V. & Trufanov, N. A. (2009). Numerical prediction of the effective thermoviscoelastic characteristics of a unidirectional fibrous composite with viscoelastic components. Bulletin of the SSU. Natural Science Series, No. 4(70), pp. 129-148.
8. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. N. & Savel'eva, I. Yu. (2015). Estimation of the effective thermal conductivity of a transversely isotropic composite with isotropic ellipsoidal inclusions by the method of self-correlation. Bulletin of the Moscow State Technical University N.E. Bauman. Series "Natural Sciences", No. 3(60), pp. 99-110.