УДК 533.6.013.42

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

[1]Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, [2]Лимарь А. А.

[1]*Донецкий национальный университет им. Васыля Стуса, ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

[2]*Николаевский национальный аграрный университет, ул. Георгия Гонгадзе, 9, г. Николаев, 54020, Украина*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Выведено частотное уравнение собственных колебаний упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями в виде прямоугольных пластин. Рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин и различные случаи вырождения пластин. На примере отсутствия нижней жидкости и двух мембран показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты. В этом случае частотный спектр для несимметричных частот состоит из двух наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего основания, а частотный спектр для симметричных частот состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего основания, а также колебаниям столба жидкости как одного целого. На основании проведенных аналитических исследований сделаны общие выводы о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями.

Ключевые слова: гидроупругость, прямоугольные упругие пластины, идеальная жидкость, плоские колебания.

КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ

[1]Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, [2]Лимар О. О.

[1]*Донецький національний університет ім. Василя Стуса, вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

[2]*Миколаївський національный аграрний університет, вул. Георгія Гонгадзе, 9, м. Миколаїв, 54020, Україна*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Виведено частотне рівняння власних коливань пружної пластини, яка горизонтально поділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з пружними основами у вигляді прямокутних пластин. Розглянуто довільні випадки закріплення контурів пластин і різні випадки виродження пластин. На прикладі відсутності нижньої рідини і двох мембран показано, що частотне рівняння розпадається на два рівняння, що описують непарні і парні частоти. У цьому випадку частотний спектр для несиметричних частот складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої і нижньої основ, а частотний спектр для симетричних частот складається з трьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої і нижньої основ, а також коливань стовпа рідини як одного цілого. На підставі проведених аналітичних досліджень зроблено загальні висновки про коливання прямокутної пластини, що розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з пружними основами.

Ключові слова: гідропружність, прямокутні пружні пластини, ідеальна рідина, плоскі коливання.

OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR PLATE SEPARATING IDEAL LIQUID OF DIFFERENT DENSITY IN A RECTANGULAR CHANNEL AND AN ELASTIC BASE

[1]Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, professor, [2]Lymar A. A.

[1]*Vasyl' Stus Donetsk National University,*
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine

[2]*Mykolayiv National Agrarian University,*
Heorhiia Honhadze str., 9, ,Mykolayiv, 54020, Ukraine
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, aleksandr1402a@mail.ru

Was investigated the frequency equation of the natural oscillations of elastic plate, horizontally dividing the perfect liquid of varying density in a rectangular channel with an elastic bases in the form of rectangular plates. We consider an arbitrary contours the case of fixed plates and various cases of degeneration of the plates in the membrane in an absolutely rigid, the lack of one of the plates, no top or bottom of the liquid. For example, the lack of a lower fluid and the two membranes shows that the frequency equation splits into two equations describing the odd and even frequency. In this case, the frequency spectrum of frequencies for asymmetrical consists of two sets of frequencies corresponding to oscillations of the upper and lower bases, and the frequency spectrum of frequencies for symmetrical consists of three sets of frequencies corresponding to oscillations of the upper and lower bases as well as fluctuations of the liquid column as a whole. On the basis of analytical studies to draw general conclusions about the oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with an elastic foundation.

Consider a flat oscillations of an elastic rectangular plate horizontally separating ideal incompressible heavy fluid of different density in a hard rectangular channel with elastic top and bottom of the base. Elastic bases are presented in the form of rectangular plates. All three plates are considered to be thin and isotropic. The plates are under an action of tensile forces acting on a middle surface. The contours of the plates can be clamped, simply supported or free. The movement of the liquid is potential. The problem is considered in the linear formulation. Plates bending problem is represented as a sum of static and dynamic bending. Joint oscillations of plates and liquid are considered unseparated. Spectral problem is represented as a system of three inhomogeneous equations. These equations govern coupled vibrations of plates and liquid. The general solution to each equation is the sum of the general solution of the related homogeneous equation and the particular solution of inhomogeneous . Mechanical parameters of the plates and the density of the liquid define the general solution of the homogeneous equation which contains an unknown frequency. Particular solution of the inhomogeneous equation takes the form of a series expansion in the eigenfunctions of ideal liquid oscilation in the rectangular channel. From the condition of fixing of contours of the plates, compatibility condition and condition of incompressibility of the liquid follows the frequency equation of natural oscillations of plate, elastic bases and the ideal liquid. In general this transcendental equation takes the form of a determinant of the fifteenth order. On the basis of analytical investigations it may be concluded that:

1. **C**lamped plates or membranes frequency equation is divided into odd and even frequency.

2. The equation for the even more complex frequency. It includes a main part of the equation for odd frequencies recorded for the even indices, as well as the oscillations of the liquid column as one whole.

4. The frequency spectrum of asymmetric oscillations consists of three sets of frequencies corresponding to oscillations of three plates.

5. The frequency spectrum of the symmetric oscillations is comprised of four sets of frequencies corresponding to oscillations of the three plates of the liquid column as one whole.

Key words: hydroelasticity, rectangular elastic plates, ideal liquid, plane oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о колебании прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была исследована в [1] на основании единого Лагранжевого подхода. В работе [2] эта задача была рассмотрена на основании Эйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [3]. В работе [4] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [5] – на случай упругого дна. Колебания мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жестким основаниями, были подробно исследованы в работе [6], а колебания пластины – в [7]. Вопросы устойчивости колебаний прямоугольной пластины, разделяющей жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, были исследованы в [7-9]. В статье [10] исследованы осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. В работе [11] сделана общая постановка задачи о колебании упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями. Из последних работ ближнего зарубежья следует отметить статьи [12-14], в которых рассматриваются осесимметричные колебания двухслойной жидкости в цилиндрическом резервуаре применительно к проблеме капиллярных фазоразделителей.

В данной статье, на основе общего подхода, предложенного в [11], исследована задача о плоских колебаниях упругой пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с упругим нижним и верхним основаниями. Данная задача обобщает результаты работ [6-9] на случай двух упругих оснований. В статье выведено частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих пластин и жидкости, рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин, различные случаи вырождения пластин в абсолютно жесткие мембраны, отсутствие одной из пластин, отсутствие верхней или нижней жидкости. Показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты. Частотный спектр для несимметричных частот состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластин, а частотный спектр для симметричных частот состоит из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям пластин и колебаниям столба жидкости как одного целого.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности ρ_i $(i=1,2)$ в жестком прямоугольном канале с упругими основаниями в виде прямоугольных пластин. Все три пластины будем считать изотропными, с постоянной изгибной жесткостью D_i и растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности $(i=\overline{1,3})$. Индекс $i=1$ будет соответствовать верхней пластине, $i=2$ – внутренней, а $i=3$ – нижней пластине. Ширину канала обозначим через $2a$. Контуры пластин могут быть защемлены, оперты или свободны. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет сосуд до глубин h_1, а нижняя жидкость плотности ρ_2 до – h_2. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности внутренней пластины, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz – противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Колебания пластин и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластин и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [2, 4-7, 11]

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}+D_i\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4}-T_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}=P_i-P_{i-1} \quad \text{при} \quad z=z_i \quad (i=\overline{1,3}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0, \quad (i=1,2), \tag{2}$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=h_1, \quad \frac{\partial W_2}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_2, \tag{4}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}\left[W_i\right]\right)\Big|_{\gamma_j} = 0, \quad \left(i = \overline{1,3};\ j, p = 1,2\right), \tag{5}$$

$$\int_{-a}^{a} W_1 dx = \int_{-a}^{a} W_2 dx = \int_{-a}^{a} W_3 dx, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{\gamma_j} = 0, \quad \left(i, j = 1,2\right). \tag{7}$$

Здесь W_i, ρ_{0i}, δ_{0i} – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина i -ой пластины, $k_{0i} = \rho_{0i} \cdot \delta_{0i}$ ($i = \overline{1,3}$); $\Phi_i\left(x, y, z, t\right)$ – потенциал скоростей i -ой жидкости ($i = 1,2$); $P_i\left(x, y, t\right)$ – гидродинамическое давление в i -ой жидкости; $P_0\left(x, t\right)$ и $P_3\left(x, t\right)$ – соответственно внешнее давление на верхнее и нижнее основания; $z_i = \begin{cases} h_1 & \text{при} \quad i = 1, \\ 0 & \text{при} \quad i = 2, \\ -h_2 & \text{при} \quad i = 3 \end{cases}$; $\mathfrak{L}_{j1}$ и $\mathfrak{L}_{j2}$ – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины на контуре γ_j ($j = 1,2$). Здесь для удобства записи введено обозначение контуров через γ_j (индекс $j = 1$ соответствует контуру $x = -a$, а $j = 2$ – $x = a$). Так, например, для наиболее интересного случая жесткого защемления пластины оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ будет единичным, а $\mathfrak{L}_{j2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$.

Гидродинамическое давление $P_i\left(x, z, t\right)$ находится из интеграла Коши-Лагранжа $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \dfrac{P_i}{\rho_i} = Q_i$, где Q_i – произвольные функции времени, которые подлежат определению. С учетом интеграла Коши-Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + g \Delta \rho_i W_i =$$

$$= \left.\left(\rho_{i-1} \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)\right|_{z = z_i} + g z_i \Delta \rho_i + \rho_i Q_i - \rho_{i-1} Q_{i-1} - \delta_{i1} P_0 + \delta_{i3} P_3, \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{8}$$

где $\Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ $\left(\rho_0 = \rho_3 = 0\right)$; δ_{ik} – символ Кронекера.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим нормальный прогиб пластин W_i в виде суммы динамического и статического прогибов

$$W_i = W_{id} + W_{is} \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{9}$$

Статический прогиб находится из следующей краевой задачи:

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_{is}}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_{is}}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_{is}}{\partial x^2} + g \Delta \rho_i W_{is} = \Delta C_i, \tag{10}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}w_i\right)\Big|_{\gamma_j} = 0, \quad \left(i=\overline{1,3};\ j,p=1,2\right), \tag{11}$$

$$\int_{-a}^{a} W_{1s}dx = \int_{-a}^{a} W_{2s}dx = \int_{-a}^{a} W_{3s}dx, \tag{12}$$

где $\Delta C_i = C_i - C_{i-1}$ $\left(C_0 = C_3 = 0\right)C_1$. Константы C_1 и C_2 являются неизвестными и подлежат определению.

Для определения динамического прогиба $W_{id}\left(x,t\right)$ потенциал скоростей жидкости $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ представим в виде обобщенного ряда Фурье по собственным функциям $\psi_n\left(x\right)$

$$\Phi_i = a_{0i} + a_{1i}z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{in}\,\mathrm{e}^{k_n z} + B_{in}\,\mathrm{e}^{-k_n z}\right)\psi_n\left(x\right). \tag{13}$$

Здесь функции

$$\psi_n\left(x\right) = \cos k_n\left(x+a\right), \tag{14}$$

а соответствующие им собственные числа $k_n = \dfrac{\pi n}{2a}$ описывают колебания идеальной жидкости в прямоугольном канале. Представление функций $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ в виде (13) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (7). Коэффициенты a_{0i}, a_{1i}, A_{in} и B_{in} являются функциями времени. Следует отметить, что в выражении (13) входят слагаемые a_{0i} и $a_{1i}z$, которые возникают из-за статического прогиба пластин и возможности вертикальных колебаний столба жидкости как одного целого. Это происходит из-за того, что все пластинки считаются упругими. Если одна из пластин становится жесткой, то задача существенно упрощается, так как отсутствует статический прогиб пластин и возможность вертикальных колебаний столба жидкости.

Из граничных условий (3)-(4), условий несжимаемости жидкости (6) и ортогональности функции ψ_n вытекают следующие соотношения:

$$A_{1n} = \frac{\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = \frac{\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}},$$

$$A_{2n} = \frac{\ddot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}} - \ddot{W}_{3n}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\ddot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}} - \ddot{W}_{3n}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}. \tag{15}$$

$$a_{11} = a_{12} = \dot{W}.$$

Здесь

$$W_{in} = \frac{1}{N_n^2}\int_{-a}^{a} W_i\psi_n dx, \tag{16}$$

$$W = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} W_{1d}dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} W_{2d}dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} W_{3d}dx, \tag{17}$$

$$N_n^2 = \int_{-a}^{a} \psi_n^2 dx = a, \quad \kappa_{in} = h_i k_n.$$

На основании выведенных соотношений (15) и представления (16)-(17), запишем систему интегро-дифференциальных уравнений для определения динамического прогиба $W_{id}\left(x,t\right)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_{id}}{\partial t^2}+D_i\frac{\partial^4 W_{id}}{\partial x^4}-T_i\frac{\partial^2 W_{id}}{\partial x^2}+g\Delta\rho_i W_{id}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\left(b_{i-1,n}\ddot{W}_{i-1,n}-a_{in}\ddot{W}_{in}+b_{in}\ddot{W}_{i+1,n}\right)\psi_n+\Delta Q_i^*-\delta_{i,1,3}\ddot{W}-\delta_{i1}P_0+\delta_{i3}P_3\,, \tag{18}$$

где $b_{in}=\rho_i/\sinh\kappa_{in}$, $\Delta Q_i^*=\rho_i Q_i^*-\rho_{i-1}Q_{i-1}^*$, $Q_i^*=Q_i-\dot{a}_{0i}$, $\delta_{i,1,3}=\rho_1 h_1\delta_{i1}+\rho_2 h_2\delta_{i3}$, $a_{in}=\rho_i\coth\kappa_{in}+\rho_{i-1}\coth\kappa_{i-1n}$.

Таким образом, совместные колебания упругих пластин и жидкости находятся из интегро-дифференциальных уравнений (17)-(18), граничных условий (5) и статической задачи (10)-(12).

ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ЖИДКОСТИ

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругих пластин и жидкости положим $P_0=P_3=0$ и

$$W_{id}\left(x,y,t\right)=w_i\left(x,y\right)\mathrm{e}^{i\omega t},\quad W=w\mathrm{e}^{i\omega t},\quad Q_i^*=\omega^2\tilde{Q}_i\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,. \tag{19}$$

В выражениях (19) следует различать нижний индекс $i=\overline{1,3}$ от мнимой единицы i в показателе степени экспоненты.

Подставив (19) в (16)-(18) и граничные условия (5), получим:

$$D_i\frac{d^4 w_i}{dx^4}-T_i\frac{d^2 w_i}{dx^2}+\left(g\Delta\rho_i-k_{0i}\omega^2\right)w_i=$$

$$=\omega^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\left(-b_{i-1,n}w_{i-1,n}+a_{in}w_{in}-b_{in}w_{i+1,n}\right)\psi_n+\Delta\tilde{Q}_i+\delta_{i,1,3}w\right],\quad\left(i=\overline{1,3}\right), \tag{20}$$

$$w_{in}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}w_i\psi_n dx\,, \tag{21}$$

$$w=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}w_1 dx=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}w_2 dx=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}w_3 dx\,, \tag{22}$$

$$\left.\left(\mathfrak{L}_{jp}\left[w_i\right]\right)\right|_{\gamma_j}=0,\quad\left(i=\overline{1,3};\ j,p=1,2\right). \tag{23}$$

Здесь $\Delta\tilde{Q}_i=\rho_i\tilde{Q}_i-\rho_{i-1}\tilde{Q}_{i-1}$.

Общее решение уравнения (20) будем искать в виде линейной комбинации четырех независимых решений w_{ik}^0 соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w_i=\sum_{k=1}^{4}A_{ik}^0 w_{ik}^0+\omega^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_{i-1,n}w_{i-1,n}+a_{in}w_{in}-b_{in}w_{i+1,n}}{k_n d_{in}}\psi_n+\left(\Delta\tilde{Q}_i+\delta_{i13}w\right)\tilde{k}_{0i}\right],\quad\left(i=\overline{1,3}\right). \tag{24}$$

Подставив (24) в (21) и разрешив полученную систему относительно w_{in}, будем иметь

$$w_i = \sum_{k=1}^{4} A_{ik}^0 w_{ik}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{in}\psi_n + \left(\Delta\tilde{Q}_i + \delta_{i13} w\right)\tilde{k}_{0i}\,, \tag{25}$$

где $\tilde{C}_{in}$ координаты вектора $\tilde{C}_n = \left(D_n^{-1}T_n - E\right)A_n$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$, T_n – диагональная матрица с элементами T_{in}, E – единичная матрица, вектор A_n состоит из элементов A_{in}

$$A_{in} = \sum_{k=1}^{4} A_{ik}^0 E_{ikn}^0\,,$$

$$D_n^{-1} = \frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix} \tilde{T}_{2n}\tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2 & -b_{1n}\tilde{T}_{3n} & b_{1n}b_{2n} \\ -b_{1n}\tilde{T}_{3n} & \tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{3n} & -\tilde{T}_{1n}b_{2n} \\ b_{1n}b_{2n} & -\tilde{T}_{1n}b_{2n} & \tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}\,,$$

$$T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\omega^2}, \quad d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i\right)k_n^2 + g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2, \quad \tilde{k}_{0i} = \frac{\omega^2}{g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2}\,,$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w_{ik}^0 \psi_n dx\,. \tag{27}$$

С учетом (25) и (26) окончательное выражение для формы колебаний i -ой пластинки примет вид

$$w_i = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}\left(w_{ik}^0\delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln}E_{lkn}^0\psi_n\right)A_{lk}^0 + \left(\Delta\tilde{Q}_i + \delta_{i,1,3}w\right)\tilde{k}_{0i}\,. \tag{28}$$

Здесь a_{iln} элементы матрицы $D_n^{-1}T_n - E$

$$a_{11n} = \frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\tilde{T}_{2n}\tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2\right)a_{1n} + b_{1n}^2\tilde{T}_{3n}\right], \quad a_{12n} = -\frac{1}{\Delta_n}T_{2n}\tilde{T}_{3n}b_{1n}\,, \quad a_{13n} = \frac{1}{\Delta_n}T_{3n}b_{1n}b_{2n}\,,$$

$$a_{21n} = -\frac{1}{\Delta_n}T_{1n}\tilde{T}_{3n}b_{1n}\,, \quad a_{22n} = \frac{1}{\Delta_n}\left(\tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{3n}a_{2n} + b_{1n}^2\tilde{T}_{3n} + b_{2n}^2\tilde{T}_{1n}\right), \quad a_{23n} = -\frac{1}{\Delta_n}\tilde{T}_{1n}T_{3n}b_{2n}\,, \tag{29}$$

$$a_{31n} = \frac{1}{\Delta_n}T_{1n}b_{1n}b_{2n}, \quad a_{32n} = -\frac{1}{\Delta_n}\tilde{T}_{1n}T_{2n}b_{2n}\,, \quad a_{33n} = \frac{1}{\Delta_n}\left[\left(\tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2\right)a_{3n} + b_{2n}^2\tilde{T}_{1n}\right],$$

$$a_{1n} = \rho_1 \coth\kappa_{1n}, \quad a_{3n} = \rho_2 \coth\kappa_{2n}\,, \quad a_{2n} = a_{1n} + a_{3n} = a_n\,,$$

$$\Delta_n = \tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n}\tilde{T}_{3n} - b_{2n}^2\tilde{T}_{1n} - b_{1n}^2\tilde{T}_{3n}\,.$$

В формулу (28) входит 15 неизвестных констант: $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, w и 12 констант A_{lk}^0. Из граничных условий закрепления пластин (23) имеем 12 линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}\left(\mathfrak{L}_{ijpk}^0\delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln}E_{lkn}^0\mathfrak{L}_{jpn}\right)A_{lk}^0 + \left(\Delta\tilde{Q}_i + \delta_{i,1,3}w\right)\tilde{k}_{0i}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp} = 0\,, \tag{30}$$

где

$$\mathfrak{L}_{jpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[w_k^0\right]\right)\Big|_{\gamma_j}, \quad \mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[\psi_n\right]\right)\Big|_{\gamma_j}, \quad \tilde{\mathfrak{L}}_{jp} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[1\right]\right)\Big|_{\gamma_j}, \quad (i = \overline{1,3};\ j, p = 1, 2\,).$$

Подставив (28) в (22), получим следующие два линейно независимых уравнения:

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\tilde{w}_{1k}^{0}A_{1k}^{0}-\tilde{w}_{2k}^{0}A_{2k}^{0}\right)+\tilde{k}_{01}\rho_1 h_1 w+$$
$$+\rho_1\left(\tilde{k}_{01}+\tilde{k}_{02}\right)\tilde{Q}_1-\rho_2\tilde{k}_{02}\tilde{Q}_2=0\ , \qquad (31)$$
$$\sum_{k=1}^{4}\left(\tilde{w}_{1k}^{0}A_{1k}^{0}-\tilde{w}_{3k}^{0}A_{3k}^{0}\right)+\left(\rho_1 h_1\tilde{k}_{01}+\rho_2 h_2\tilde{k}_{03}\right)w+\rho_1\tilde{k}_{01}\tilde{Q}_1-\rho_2\tilde{k}_{03}\tilde{Q}_2=0\ ,$$

где

$$\tilde{w}_{ik}^{0}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}w_{ik}^{0}dx\,. \qquad (32)$$

Из (28) и (22) следует последнее недостающее уравнение

$$\sum_{k=1}^{4}\tilde{w}_{1k}^{0}A_{1k}^{0}+\left(\rho_1 h_1\tilde{k}_{01}-1\right)w+\rho_1\tilde{k}_{01}\tilde{Q}_1=0\,. \qquad (33)$$

Таким образом, собственные частоты и формы совместных колебаний упругих пластин и идеальной жидкости определяются из линейной однородной системы (30)-(31) и (33). Из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение

$$\left|\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{15}\right|=0\,. \qquad (34)$$

где

$$C_{qk}=\mathfrak{L}_{ijpk}^{0}\delta_{i1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i1n}E_{1kn}^{0}\mathfrak{L}_{jpn},\quad C_{q,k+4}=\mathfrak{L}_{ijpk}^{0}\delta_{i2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i2n}E_{2kn}^{0}\mathfrak{L}_{jpn},$$

$$C_{q,k+8}=\mathfrak{L}_{ijpk}^{0}\delta_{i3}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i3n}E_{3kn}^{0}\mathfrak{L}_{jpn},\ C_{q,13}=\rho_{1i}\tilde{k}_{0i}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp},\ C_{q,14}=\rho_{2i}\tilde{k}_{0i}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp}, \qquad (35)$$

$$C_{q,15}=\delta_{i,1,3}\tilde{k}_{0i}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp}\,,\quad (q=\overline{1,i\cdot p\cdot j};\ i=\overline{1,3};\ \ j,p=1,2;\ k=\overline{1,4}),$$

$$C_{13,\mathrm{k}}=\tilde{w}_{1k}^{0},\ C_{13,\mathrm{k}+4}=-\tilde{w}_{2k}^{0},\ C_{13,\mathrm{k}+8}=0,\ C_{13,13}=\rho_1\left(\tilde{k}_{01}+\tilde{k}_{02}\right),\ C_{13,14}=-\rho_2\tilde{k}_{02},\ C_{13,15}=\rho_1 h_1\tilde{k}_{01},$$

$$C_{14,\mathrm{k}}=\tilde{w}_{1k}^{0},\ C_{14,\mathrm{k}+4}=0,\ C_{14,\mathrm{k}+8}=-\tilde{w}_{3k}^{0},\ C_{14,13}=\rho_1\tilde{k}_{01},\ C_{14,14}=-\rho_2\tilde{k}_{03},\ C_{14,15}=\rho_1 h_1\tilde{k}_{01}+\rho_2 h_2\tilde{k}_{03},$$

$$C_{15,\mathrm{k}}=\tilde{w}_{1k}^{0},\ C_{15,\mathrm{k}+4}=0,\ C_{15,\mathrm{k}+8}=0,\ C_{15,13}=\rho_1\tilde{k}_{01},\ C_{15,14}=0,\ C_{15,15}=\rho_1 h_1\tilde{k}_{01}-1,\ (k=\overline{1,4}),$$

$$\rho_{1i}=\begin{cases}\rho_1, & i=1,\\ -\rho_1, & i=2,\\ 0, & i=3.\end{cases}\quad \rho_{2i}=\begin{cases}0, & i=1,\\ \rho_2, & i=2,\\ -\rho_2, & i=3.\end{cases}$$

Собственные формы колебаний будут найдены из линейной однородной системы (30)-(33) и соотношений (28).

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2 с единственной предельной точкой на бесконечности, а соответствующие им собственные функции w_l образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке $[-a,a]$. Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров, рассматриваемой механической системы, частотное уравнение (34) может не иметь положительных корней и равновесная форма упругих пластин может быть неустойчивой. Так, например, если нижнее основание становится абсолютно жестким, то плоская форма равновесия пластины, разделяющей жидкости, может быть неустойчивой [1-2, 7-9].

Частотное уравнение (34) является довольно общим, т.к. позволяет рассматривать различные случаи закрепления контуров пластин, случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие (наличие свободной поверхности или поверхности раздела жидкостей), отсутствие верхней или нижней жидкости. Если обозначить через N порядок определителя уравнения (34), то при вырождении одной, двух или трех пластин в мембраны значение N соответственно будет равно 13, 11 и 9. При отсутствии верхнего основания (наличие свободной поверхности) $N=11$. Если отсутствует пластина, разделяющая жидкости разной плотности, то $N=10$ ($\tilde{Q}_1=\tilde{Q}_2$, $A_{2k}^0=0$). В этом случае можно рассмотреть задачу о влиянии стратификации (разделение жидкости на слои различной плотности) на собственные частоты колебаний упругих оснований. Как было отмечено ранее, наибольшее упрощение рассматриваемой задачи и соответственно частотного уравнения (34) происходит, когда одна из пластин становится жесткой. В этом случае отпадает необходимость в решении статической задачи $\left(W_{is}\equiv 0\right)$, отсутствуют вертикальные колебания столба жидкости как одного целого ($a_{0i}\equiv 0$, $a_{1i}\equiv 0$), функции $Q_1\left(t\right)$ и $Q_2\left(t\right)$ можно считать равными нулю и порядок определителя частотного уравнения $N=8$.

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Нижнее основание абсолютно жесткое (*$T_3=\infty$ *или* $D_3=\infty$*). Переходя к пределу в формулах (29) при $T_3\to\infty$, получим

$$a_{11n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(\tilde{T}_{2n}a_{1n}+b_{1n}^2\right),\quad a_{12n}=-\frac{1}{\Delta_n}T_{2n}b_{1n},\quad a_{13n}=\frac{1}{\Delta_n}b_{1n}b_{2n},$$

$$a_{21n}=-\frac{1}{\Delta_n}T_{1n}b_{1n},\quad a_{22n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(\tilde{T}_{1n}a_{2n}+b_{1n}^2\right),\quad a_{23n}=-\frac{1}{\Delta_n}T_{1n}b_{2n}, \tag{36}$$

$$a_{31n}=0,\ a_{32n}=0,\ a_{33n}=0,\quad \Delta_n=\tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n}-b_{1n}^2.$$

Из соотношений (28) и (36) будем иметь

$$w_1=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(w_{1k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right],$$

$$w_2=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0+\left(w_{2k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right], \tag{37}$$

$$w_3\equiv 0.$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 9–15 строки и 9–15 столбцы.

Верхнее основание абсолютно жесткое (*$T_1=\infty$ *или* $D_1=\infty$*). Переходя к пределу в формулах (29) при $T_1\to\infty$, получим

$$a_{11n}=0,\ a_{12n}=0,\ a_{13n}=0,$$

$$a_{21n}=-\frac{1}{\Delta_n}\tilde{T}_{3n}b_{1n},\quad a_{22n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(\tilde{T}_{3n}a_{2n}+b_{2n}^2\right),\quad a_{23n}=-\frac{1}{\Delta_n}T_{3n}b_{2n}, \tag{38}$$

$$a_{31n}=\frac{1}{\Delta_n}b_{1n}b_{2n},\quad a_{32n}=-\frac{1}{\Delta_n}T_{2n}b_{2n},\quad a_{33n}=\frac{1}{\Delta_n}\left(\tilde{T}_{2n}a_{3n}+b_{2n}^2\right),$$

$$\Delta_n=\tilde{T}_{2n}\tilde{T}_{3n}-b_{2n}^2.$$

Из формул (28) и (38) следует, что

$$w_1\equiv 0,$$

$$w_2=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(w_{2k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{3k}^0\right],\tag{39}$$

$$w_3=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{32n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0+\left(w_{3k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{33n}E_{3kn}^0\psi_n\right)A_{3k}^0\right].$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 1–4, 13–15 строки и 1–4, 13–15 столбцы.

Как и следовало ожидать, формулы (36)-(37) и (38)-(39) совпадают с соответствующими формулами статьи [9], а если будут жесткими и верхнее и нижнее основания ($T_1=\infty$ и $T_3=\infty$), то эти формулы совпадают с соответствующими формулами статьи [7].

Случай отсутствия нижней жидкости ($\rho_2=0$). Из соотношений (28) будем иметь

$$w_1=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(w_{1k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right]+\rho_1\tilde{k}_{01}\tilde{Q}_1+\rho_1h_1\tilde{k}_{01}w,$$

$$w_2=\sum_{k=1}^{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0+\left(w_{2k}^0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right]-\rho_1\tilde{k}_{02}\tilde{Q}_1.$$

В этом случае в определителе уравнения (34) нужно вычеркнуть 9–12, 14 строки и 9–12, 14 столбцы, а в соотношениях (35) положить $\rho_2=0$. Частотное уравнение запишется так

$$\left|\,\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{10}\right|=0.\tag{40}$$

$$C_{qk}=\mathfrak{L}_{ijpk}^0\delta_{i1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i1n}E_{1kn}^0\mathfrak{L}_{jpn},\ C_{q,k+4}=\mathfrak{L}_{ijpk}^0\delta_{i2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i2n}E_{2kn}^0\mathfrak{L}_{jpn},\quad C_{q,9}=(-1)^{i+1}\rho_1\tilde{k}_{0i}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp},$$

$$C_{q,10}=(2-i)\rho_1h_1\tilde{k}_{01}\tilde{\mathfrak{L}}_{jp},\quad (q=\overline{1,i\cdot p\cdot j};\ i,j,p=1,2;\ k=\overline{1,4}),\tag{41}$$

$$C_{9,\mathrm{k}}=\tilde{w}_{1k}^0,\ C_{9,\mathrm{k}+4}=-\tilde{w}_{2k}^0,\ C_{9,9}=\rho_1\left(\tilde{k}_{01}+\tilde{k}_{02}\right),\ C_{9,10}=\rho_1h_1\tilde{k}_{01}C_{10,\mathrm{k}}=\tilde{w}_{1k}^0,$$

$$C_{10,\mathrm{k}+4}=0,\ C_{9,9}=\rho_1\tilde{k}_{01},\ C_{10,10}=\rho_1h_1\tilde{k}_{01}-1,\ (k=\overline{1,4}).$$

В случае отсутствия верхней жидкости ($\rho_1=0$) следует провести аналогичные преобразования в определителе уравнения (34).

Операторы $\mathfrak{L}_{jp}$ и значения функций $\mathfrak{L}_{jpn}$ для защемленного, опертого и свободного края имеют вид [7]:

защемленный край –

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x},\quad \mathfrak{L}_{11n} = 1,\quad \mathfrak{L}_{21n} = \left(-1\right)^n,\quad \mathfrak{L}_{12n} = 0,\quad \mathfrak{L}_{22n} = 0;$$

опертый край –

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2},\quad \mathfrak{L}_{11n} = 1,\quad \mathfrak{L}_{21n} = \left(-1\right)^n,\quad \mathfrak{L}_{12n} = -k_n^2,\quad \mathfrak{L}_{22n} = \left(-1\right)^{n+1} k_n^2;$$

свободный край –

$$\mathfrak{L}_{j1} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2},\quad \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3},\quad \mathfrak{L}_{11n} = -k_n^2,\quad \mathfrak{L}_{21n} = \left(-1\right)^{n+1} k_n^2,\quad \mathfrak{L}_{11n} = 0,\quad \mathfrak{L}_{22n} = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{L}_{j1}\left[1\right] = \begin{cases} 1, \text{ защемленный}, \\ 1, \text{ опертый}, \\ 0, \text{ свободный}, \end{cases}$, $\mathfrak{L}_{j2}\left[1\right] \equiv 0$.

В дальнейшем наибольший интерес будет представлять случай защемленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. В этом случае $\mathfrak{L}_{11n} = 1$, $\mathfrak{L}_{21n} = \left(-1\right)^n$, $\mathfrak{L}_{j2n} = 0$, $\tilde{\mathfrak{L}}_{j1} = 1$, $\tilde{\mathfrak{L}}_{j2} = 0$, а коэффициенты (35) для нечетных ($q = 1, 3, ..., 11$) и четных ($q = 2, 4, ..., 12$) рядов соответственно примут вид

$$C_{qk} = B_{ijk}\delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\ C_{q,k+4} = B_{ijk}\delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{q,k+8} = B_{ijk}\delta_{i3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i3n} E_{3kn}^0 B_{jn}^*,\quad C_{q,13} = \rho_{1i}\tilde{k}_{0i},\ C_{q,14} = \rho_{2i}\tilde{k}_{0i},$$

$$C_{q,15} = \delta_{i,1,3}\tilde{k}_{0i},\quad (i = \overline{1,3};\ j = 1,2;\ k = \overline{1,4}), \tag{42}$$

$$C_{2,\mathrm{k}} = C_{11\mathrm{k}},\ C_{2,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{2,\mathrm{k}+8} = 0,\ C_{2,13} = C_{2,14} = C_{2,15} = 0,$$

$$C_{4,\mathrm{k}} = C_{12\mathrm{k}},\ C_{4,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{4,\mathrm{k}+8} = 0,\ C_{2,13} = C_{2,14} = C_{2,15} = 0,$$

$$C_{6,\mathrm{k}} = 0,\ C_{6,\mathrm{k}+4} = C_{21\mathrm{k}},\ C_{6,\mathrm{k}+8} = 0,\ C_{6,13} = C_{6,14} = C_{6,15} = 0,$$

$$C_{8,\mathrm{k}} = 0,\ C_{8,\mathrm{k}+4} = C_{22\mathrm{k}},\ C_{8,\mathrm{k}+8} = 0,\ C_{8,13} = C_{8,14} = C_{8,15} = 0,$$

$$C_{10,\mathrm{k}} = 0,\ C_{10,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{10,\mathrm{k}+8} = C_{31\mathrm{k}},\ C_{10,13} = C_{10,14} = C_{10,15} = 0,$$

$$C_{12,\mathrm{k}} = 0,\ C_{12,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{12,\mathrm{k}+8} = C_{32\mathrm{k}},\ C_{12,13} = C_{12,14} = C_{12,15} = 0,\quad k = \overline{1,4}.$$

Здесь

$$B_{ijk} = w_{ik}^0\Big|_{\gamma_j},\ C_{ij\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{d}\,w_{ik}^0}{\mathrm{d}\,x}\bigg|_{\gamma_j},\ B_{jn}^* = \psi_n\Big|_{\gamma_j} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \left(-1\right)^n, & j = 2. \end{cases} \tag{43}$$

Для защемленных контуров коэффициенты (41) для нечетных ($q = 1, 3, ..., 7$) и четных ($q = 2, 4, ..., 8$) рядов, с учетом (43), запишутся так:

$$C_{qk} = B_{ijk}\delta_{i1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\ C_{q,k+4} = B_{ijk}\delta_{i2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{q,9} = (-1)^{i+1} \rho_1 \tilde{k}_{0i},\ C_{q,10} = (2-i)\rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},\quad (i, j = 1,2;\ k = \overline{1,4}),$$

$$C_{2,\mathrm{k}} = C_{11\mathrm{k}},\ C_{2,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{2,9} = C_{2,10} = 0,\ C_{4,\mathrm{k}} = C_{12\mathrm{k}},\ C_{4,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{4,9} = C_{4,10} = 0, \tag{44}$$

$$C_{6,\mathrm{k}} = 0,\ C_{6,\mathrm{k}+4} = C_{21\mathrm{k}},\ C_{6,9} = C_{6,10} = 0,\ C_{8,\mathrm{k}} = 0,\ C_{8,\mathrm{k}+4} = C_{22\mathrm{k}},\ C_{6,9} = C_{6,10} = 0,$$

$$C_{9,\mathrm{k}} = \tilde{w}^0_{1k},\ C_{9,\mathrm{k}+4} = -\tilde{w}^0_{2k},\ C_{9,9} = \rho_1\left(\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}\right),\ C_{9,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},$$

$$C_{10,\mathrm{k}} = \tilde{w}^0_{1k},\ C_{10,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{9,9} = \rho_1 \tilde{k}_{01},\ C_{10,10} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1,\ (k = \overline{1,4}).$$

В случае двух мембран ($D_1 = D_2 = 0$) частотное уравнение (40) и коэффициенты (44) примут вид:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^{6}_{q,r=1} \right| = 0. \tag{45}$$

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E^0_{1kn},\ C_{1,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn},\ C_{15} = \rho_1 \tilde{k}_{01},\ C_{16} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},$$

$$C_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E^0_{1kn} (-1)^n,\ C_{2,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn} (-1)^n,\ C_{25} = \rho_1 \tilde{k}_{01},\ C_{26} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{21n} E^0_{1kn},\ C_{3,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E^0_{2kn},\ C_{35} = -\rho_1 \tilde{k}_{02},\ C_{36} = 0, \tag{46}$$

$$C_{4k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{21n} E^0_{1kn} (-1)^n,\ C_{4,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E^0_{2kn} (-1)^n,\ C_{45} = -\rho_1 \tilde{k}_{02},\ C_{46} = 0,$$

$$C_{5\mathrm{k}} = \tilde{w}^0_{1k},\ C_{5,\mathrm{k}+4} = -\tilde{w}^0_{2k},\ C_{55} = \rho_1\left(\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}\right),\ C_{56} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01},$$

$$C_{6\mathrm{k}} = \tilde{w}^0_{1k},\ C_{6,\mathrm{k}+4} = 0,\ C_{65} = \rho_1 \tilde{k}_{01},\ C_{66} = \rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - 1,\ (k = \overline{1,2}).$$

Здесь для упрощения уравнения (45) функции w^0_{ik}, согласно (27), были разложены в ряд по собственным функциям $\psi_n(x) = \cos k_n (x + a)$ и поэтому коэффициент $\tilde{a}_{ijn} = 1 + a_{ijn}$. Этот прием будет и далее использоваться для упрощения частотных уравнений. Он был ранее использован в работах [6-9].

Пусть $p_1^2 = \dfrac{k_{01}\omega^2 - g\rho_1}{T_1}$, $p_2^2 = \dfrac{k_{02}\omega^2 + g\rho_1}{T_2}$. Так как $k_{02}\omega^2 + g\rho_1 > 0$, то будем считать, что и $k_{01}\omega^2 - g\rho_1 > 0$ (в противном случае, все рассуждения повторяются аналогично). В этом случае решения, соответствующего уравнению (20), однородного уравнения, и выражения для формул (27) и (32) будут иметь вид:

$$w^0_{ik} = \left\{\sin p_i x,\ \cos p_i x\right\},\ \tilde{w}^0_{ik} = \left\{0,\ \frac{\sin p_i a}{p_i a}\right\}, \tag{47}$$

$$E^0_{ikn} = \frac{T_i p_i}{a d_{in}} \left\{ \left[(-1)^n - 1 \right] \cos p_i a,\ \left[(-1)^n + 1 \right] \sin p_i a \right\}. \tag{48}$$

Подставим выражения (47) и (48) в (46) и произведем со строками и столбцами определителя уравнения (45) преобразования, аналогичные работам [6-7]: из первой строки вычтем вторую, а из третьей четвертую; ко второй строке прибавим первую, а к четвертой третью;

далее меняем местами вторую и третью строки, и второй и третий столбцы и приводим определитель к блочному виду с нулевыми диагональными элементами. В этом случае определитель представляется в виде произведения двух определителей. Воспользовавшись тем, что в рядах с множителем $\left[(-1)^n-1\right]^2$ остаются только нечетные члены, а в рядах с множителем $\left[(-1)^n+1\right]^2$ только нечетные члены замечаем, что уравнение (45) распадается на два уравнения, описывающие нечетные и четные частоты

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{11,2m-1}}{d_{1,2m-1}}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{22,2m-1}}{d_{2,2m-1}}\right)-\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{12,2m-1}}{d_{2,2m-1}}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{21,2m-1}}{d_{1,2m-1}}\right)=0$$

или

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega^2 a_{2m-1}-k_{2m-1}d_{1,2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega^2 a_{2m-1}-k_{2m-1}d_{2,2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right)-\omega^4\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_{2m-1}b_{2m-1}}{\tilde{\Delta}_{2m-1}}\right)^2=0 \qquad (49)$$

и

$$4\left(C_{33}C_{44}-C_{34}C_{43}\right)\left(b\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}-\tilde{k}_{01}-\tilde{k}_{02}\right)+$$

$$+2\tilde{k}_{01}\left(b\tilde{k}_{02}-1\right)C_{34}+2\tilde{k}_{02}\left(b\tilde{k}_{01}-1\right)C_{43}-2\tilde{k}_{01}C_{33}-2\tilde{k}_{02}C_{44}=0\,, \qquad (50)$$

где

$$C_{33}=T_1p_1^2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{21,2m}}{d_{1,2m}},\ C_{34}=T_2p_2^2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{22,2m}}{d_{1,2m}},\ C_{43}=T_1p_1^2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{11,2m}}{d_{1,2m}},\ C_{44}=T_2p_2^2a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{12,2m}}{d_{2,2m}}\,,$$

$$\tilde{\Delta}_{2m-1}=\omega^4b_{2m-1}^2-\left(\omega^2a_{2m-1}-k_{2m-1}d_{1,2m-1}\right)\left(\omega^2a_{2m-1}-k_{2m-1}d_{2,2m-1}\right),$$

$$b=\rho_1h_1\,,\quad a_{2m-1}=a_{1,2m-1},\ b_{2m-1}=b_{1,2m-1}\,.$$

Следует заметить, что уравнение (49), описывающее несимметричные частоты, не зависит от p_1^2, т.е. от знака величины $k_{01}\omega^2-g\rho_1$ и совпадает с соответствующим уравнением для случая абсолютно жесткого нижнего основания. В этом случае, как известно [4-7], частотный спектр для несимметричных колебаний будет состоять из двух наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований.

Уравнение (50), описывающее симметричные частоты, более сложное. Оно зависит от p_1^2, т.е. от знака величины $k_{01}\omega^2-g\rho_1$, включает в себя составляющую уравнения (49) для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого. В этом случае частотный спектр для симметричных колебаний будет состоять из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований, и колебаниям столба жидкости как одного целого. В этом проявляется особенность совместных осесимметричных колебаний упругих оснований и жидкости.

Проведя аналогичные вычисления для одной мембраны ($D_i=0$) и одной пластины ($D_i\neq 0$) или двух пластин ($D_1\neq 0,\ D_2\neq 0$), можно утверждать, что для защемления контуров частотное уравнение (40) вновь распадается на нечетные и четные частоты с сохранением основных свойств, которые были отмечены ранее для двух мембран.

Также можно показать, что и в случае трех защемленных пластин или различных комбинаций пластин и мембран частотное уравнение (34) распадается на нечетные и четные частоты. Уравнение, описывающее несимметричные частоты, не зависит от знака величины $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$. Частотный спектр для несимметричных колебаний будет состоять из трех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего и нижнего оснований, и пластины, разделяющей жидкости. Уравнение, описывающее симметричные частоты, более сложное. Оно зависит от знака величины $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$, включает в себя основную часть уравнения для нечетных частот, записанную для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого. Частотный спектр для симметричных колебаний будет состоять из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям верхнего, нижнего оснований, колебаниям пластины, разделяющей жидкости и колебаниям столба жидкости как одного целого.

На основании проведенных аналитических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Для защемленных пластин или мембран частотное уравнение распадается на нечетные и четные частоты.
2. Уравнение, описывающее несимметричные частоты, не зависит от знака величины $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$.
3. Уравнение для четных частот более сложное. Оно зависит от знака величины $k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i$ и включает в себя основную часть уравнения для нечетных частот, записанную для четных индексов, а также описание колебания столба жидкости как одного целого.
4. Частотный спектр несимметричных колебаний состоит из трех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластины.
5. Частотный спектр симметричных колебаний состоит из четырех наборов частот, отвечающих колебаниям трех пластины и колебаниям столба жидкости как одного целого.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М. А., Сахабутдинов Ж. М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности. *Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея*. Москва: Машиностроение, 1974. С. 341–346.
2. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале. *Теор. и прикл. механика*. 2002. Вып. 36. С. 170–176.
3. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности. *Прикл. механика*. 1995. Т. 31, №8. С. 74–80.
4. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях. *Акустичний вісник*. 2003. Т. 6, № 4. С. 44–52.
5. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном. *Прикл. гідромеханіка*. 2008. № 1. С. 33–38.
6. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. 2015. № 1–2. С. 97–108.
7. Кононов Ю. Н., Лимарь А. А. Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2016. Том 25. С. 69–84.
8. Кононов Ю. М., Лимарь А. А. Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016». URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf.
9. Kononov Yu. M., Lymar A. Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel. Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine. Vinnytsa, 2016. P. 79–80.

10. Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. *Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук*. 2016. № 1. С. 103–115.

11. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями. *Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки*. 2013. № 2. С. 33–36.

12. Гончаров Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. 2012. № 4. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html. (Дата обращения: 19.02.2014).

13. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. 2013. № 11. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html. (Дата обращения: 19.02.2014).

14. Пожалостин А. А., Гончаров Д. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: Наука и инновации*. 2013. Вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html. (Дата обращения: 19.02.2014).

REFERENCES

1. Il’gamov, M. A. & Sahabutdinov, J. M. (1974). On the stability of elastic plates between liquids of different density, Izbrannie problemi prikladnoy mekhaniki. Sbornik statiy k shistidesyatiletiyu Acad. Chelomei, Mashinostroenie, Moskau, pp. 341-346.

2. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2002). Free oscillations of a two-layer fluid divided elastic plate in a rectangular channel, Teoret. i prikladnaya mekhanika, No. 36, pp. 170-176.

3. Trotsenko, V. A. (1995). Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface, Prikladnaya mekhanika, Vol. 31, No. 8, pp. 74-80.

4. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2003). Free oscillations of a two-layer fluid with elastic membranes on the “free” and the inner surfaces, Akustichesky vestnik, Vol. 6, No. 4, pp. 44-52.

5. Kononov, Yu. N. & Tatarenko, K. A. (2008). Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel with elastic bottom, Prikladnaya gidromehanika, No. 1, pp. 33-38.

6. Kononov, Yu. N. & Lymar, A. A. (2015). Oscillations of a rectangular membrane separating the ideal fluid of different density in a rectangular channel with rigid bases, Visnik Donetskogo natsionalnogo universitetu. Ser. A, No. 1-2, pp. 97-108.

7. Kononov, Yu. N. & Lymar, A. A. (2016). On the stability of oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with rigid bases, Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy, Vol. 25, pp. 69-84.

8. Kononov, Yu. M. & Lymar, O. O. (2016). Stability oscillation plate that separates the ideal fluid varying density in a rectangular channel. Conference of Young Scientists “Pidstryhachivski chitannia”. Retrieved from http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf.

9. Kononov, Yu. M. & Lymar, A.A. (2016). Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel. Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, (pp. 79-80), Kyiv.

10. Kononov, Yu. N. & Dzhukha, Yu. A. (2016). Axisymmetric oscillations of elastic bases and an ideal fluid in a rigid circular cylindrical tank, Visnuk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Ser. Phiz.-math. nauk, No. 1, pp. 103-115.

11. Karnaukh, A. Yu. (2013). Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation. Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki, 2, Russian, pp. 33-36.

12. Goncharov, D. A. (2012). Axisymmetric vibrations of two-density liquid in a cylindrical tank. Elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie: Nauka i obrazovanie, 4. Retrieved from http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html.

13. Goncharov, D. A. (2013). Dynamics of a two-layer liquid divided with elastic baffle with allowance for surface tension. Elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie: Nauka i obrazovanie, 11. Retrieved from http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html.

14. Pozhalostin, A. A. (2013). Free axisymmetrical vibrations of a two-layer liquid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension. Inzhenernyiy zhurnal: Nauka i innovatsii, Iss. 12. Retrieved from http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html.