

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ

Кострова М. М., аспирант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., профессор

*Національна металургічна академія України,  
просп. Гагарина, 4, г. Дніпр, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Изучали деформирование свободно вращающегося цилиндра, эластичная матрица которого двоякопериодически армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала. Решение задачи осуществляли на основе модели кусочно-однородной среды, исходя из общих уравнений нелинейной теории упругости. Для решения задачи применяли метод конечных разностей с использованием конечно-разностных соотношений второго порядка точности и метод продолжения решения по скорости вращения цилиндра.

*Ключевые слова: цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, силы центробежные, вращение свободное, деформирование нелинейное, метод конечных разностей.*

## ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТИЧНОГО ЦИЛІНДРУ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ЗА ВІЛЬНОЇ ПОСАДКИ

Кострова М. М., аспірант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., професор

*Національна металургійна академія України,  
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Вивчали деформування вільно обертового циліндра, еластична матриця якого двоякоперіодично армована кільцевими волокнами квадратного перетину з більш жорсткого еластичного матеріалу. Рішення задачі здійснювали на основі моделі кусково-однорідного середовища, виходячи із загальних рівнянь нелінійної теорії пружності. Для вирішення задачі застосовували метод кінцевих різниць з використанням кінцево-різницевої співвідношень другого порядку точності і метод продовження рішення за швидкістю обертання циліндра.

*Ключові слова: циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, сили відцентрові, обертання вільне, деформування нелінійне, метод кінцевих різниць.*

## DEFORMING THE ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER THE ACTION OF ROTATION AT FREE SITE

Kostrova M. M., Graduate student, Akhundov V. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

*National Metallurgical Academy of Ukraine,  
Gagarin ave., 4, Dnepr, Ukraine*

akhundov@ua.fm

The deformation of a freely rotating cylinder was studied, the elastic matrix of which was doubly repetitively reinforced with circular fibers of square section made of a more rigid elastic material. The solution of the problem was carried out on the basis of a model of a piecewise homogeneous medium, starting from the general equations of the nonlinear theory of elasticity. To solve the problem, the finite difference method was used with the use of finite-difference relations of the second order of accuracy and the method of continuation of the solution with respect to the rotation speed of the cylinder.

*Key words: piecewise homogeneous cylinder, circular fibers, centrifugal forces, free rotation, nonlinear deformation, finite difference method.*

## ВВЕДЕНИЕ

Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [1]. В [2] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [3] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрически ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [4] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в работе [5]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [6].

Исследование больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил вращательного движения представлено в работах [7-9]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявили. В [7] решены задачи в плоской постановке для однородных цилиндров и цилиндров, слабо армированных нитями по осевым, окружным и радиальным направлениям. Исследование производили по прикладной теории волокнистых сред [10], основанной на модели материала, в которой макроскопические напряжения определяются аддитивными вкладками напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия волокон. В [8] рассмотрели также по прикладной теории осесимметричное деформирование цилиндров с расположением волокон по окружным и радиальным направлениям при разных посадках по внутренней поверхности.

В [9] на базе одноуровневой прикладной и двухуровневой каркасной теорий решены задачи о цилиндрах с двух- и трехортогональными схемами армирования. Каркасная теория [11] включает макромеханический уровень, на котором для тела в целом решается макрокраявая задача. На микромеханическом уровне для узловых блоков представления армированного материала тела решаются микрокраевые задачи по модели кусочно-однородной среды и условиям из макромеханического уровня в итерационной процедуре взаимодействия уровней анализа.

Модель кусочно-однородной среды методологически наиболее точно отражает поведение тела волокнистого строения. В данном подходе матрица и волокна рассматриваются как контактно взаимодействующие тела на базе уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) для матрицы и каждого из волокон систем армирования. Но из-за ограниченности вычислительных ресурсов модель кусочно-однородной среды в "чистом" виде может быть применена лишь для небольшого перечня тел с однонаправленным армированием при частных нагружениях. В качестве такого объекта по данной модели исследовали цилиндр под воздействием вращения, эластичная матрица которого армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решали задачу о деформации эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра двоякопериодически с одинаковыми периодами армирования по осевому и радиальному направлениям. Цилиндр моделировали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляли в виде колец квадратного сечения из матричного материала, включающих кольцевые волокна квадратного сечения в качестве их армирующей сердцевин.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом  $r = a$  и внешним  $r = b$ . Цилиндр включает цилиндрические слои с одинаковой толщиной  $h$ , армированные кольцевыми волокнами одинакового квадратного сечения с длиной сторон  $\delta$ . Цилиндр также рассматривали как совокупность дисковых слоев толщиной  $h$ , в которых concentрически располагаются кольцевые волокна по одному от каждого цилиндрического слоя (квадратная упаковка).

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра, отвечающую макроскопически плоскому деформированию, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий симметрии задачу решали для половинного дискового слоя толщиной  $h/2$ . Такой слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу между волокнами, при расстоянии между сечениями, равном половине периода армирования по осевому направлению (см. также рис. 2).

Применяли лагранжевую систему цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , из которых  $\hat{\theta}^1$  – осевая,  $\hat{\theta}^2$  – окружная,  $\hat{\theta}^3$  – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как  $t, \varphi, r$  соответственно. Осевую координату  $t$  отсчитывали от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой  $r$  использовали «толщинную» координату  $z = r - a$ , отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Физические компоненты векторных и тензорных величин относительно отсчетной системы координат сопровождаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки.

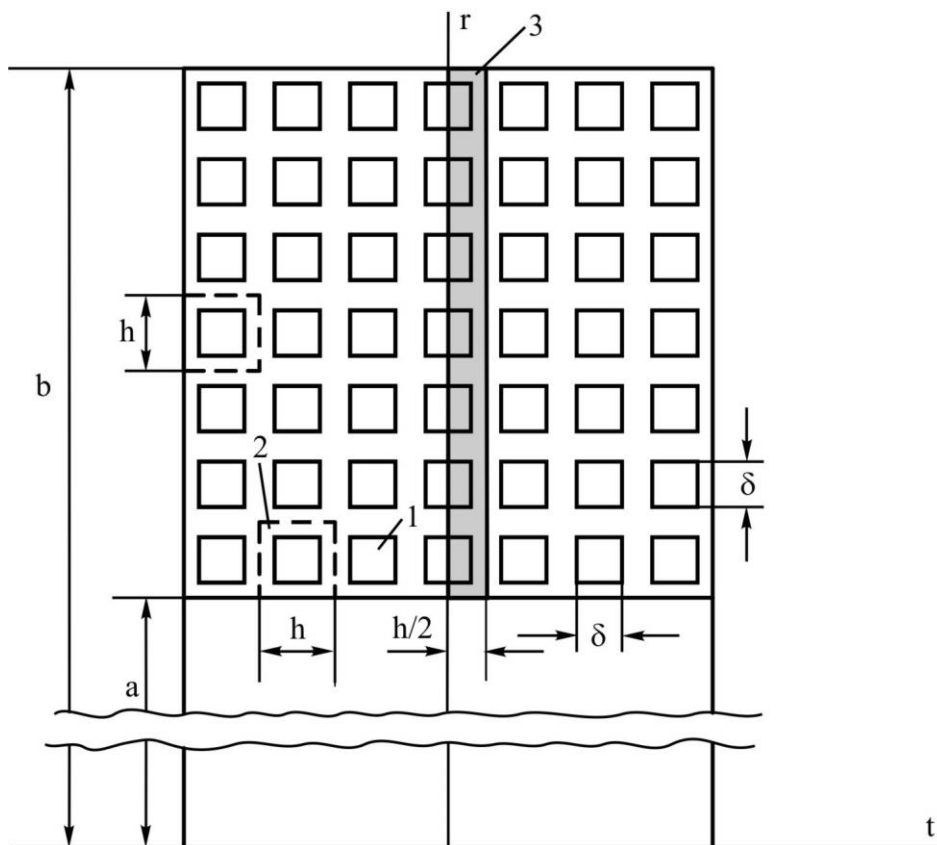


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Исходили из общих геометрических и физических уравнений и уравнений равновесия в нелинейной теории упругости [12] для описания на их основе осесимметричного деформирования рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Отличительной особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, действующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения

цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности массовых сил, действующих на составляющие цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{(3)} = (r + u_{(3)})\omega^2,$$

где  $u_{(3)}$  – радиальная компонента вектора перемещения;  $\omega = 2\pi \cdot f$  – угловая скорость вращения;  $f$  – число оборотов вращения в секунду.

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [13]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2$ ,  $a \leq r \leq b$ . Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [14]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представляем результаты для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматриваем как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра  $a = 100$  мм, внешний радиус  $b = 200$  мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения  $\delta = 0,6$  мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон  $h = 1$  мм, коэффициент наполнения волокнами  $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$ . Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона-Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [15]. Для матрицы принимали значения упругих параметров  $E_m = 4$  МПа,  $\nu_m = 0,46$ ,  $\beta_m = 1$ ; для волокон –  $E_f = 68$  МПа,  $\nu_f = 0,4$ . Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой  $\rho = 1,1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Приводим результаты на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках  $0 \leq t \leq 0,3$  мм и  $0,3$  мм  $\leq t \leq 0,5$  мм по 7-мь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по  $z$  во внутреннем  $0 \leq z \leq 0,2$  мм и внешнем  $99,8$  мм  $\leq z \leq 100$  мм покровных слоев и в волокнах и между волокнами также по 7-мь узловых точек. На рис. 3 показаны координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек. Исключением являются покровные слои, в которых координатные линии  $z = z_i$  проведены через одну из применяемых узловых точек.

На рис. 2 представлены контурные линии цилиндра в исходном состоянии и при угловой скорости  $\omega = 2\pi \cdot 80$  с<sup>-1</sup> и график изменения радиальных перемещений  $u_{(3)}$  в поперечных сечениях цилиндра в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Образующие внутренней и внешней граничных поверхностей деформированного цилиндра в пределах погрешности изображения представляют собой прямые линии, параллельные его оси. Радиальное перемещение для центрального сечения  $t = 0$  изменяется от значения  $u_{(3)} = 66,1$  мм при  $r = a = 100$  мм до  $u_{(3)} = 45,6$  мм при  $r = b = 200$  мм. Внутренний и внешний его радиусы в деформированном состоянии становятся

$$a^* = a + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=a} = 166,1 \text{ мм}, \quad b^* = b + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=b} = 245,6 \text{ мм}.$$

Толщина цилиндра по месту центрального сечения при этом  $H^*|_{t=0} = b^* - a^* = 79,5$  мм вместо прежней  $H = b - a = 100$  мм.

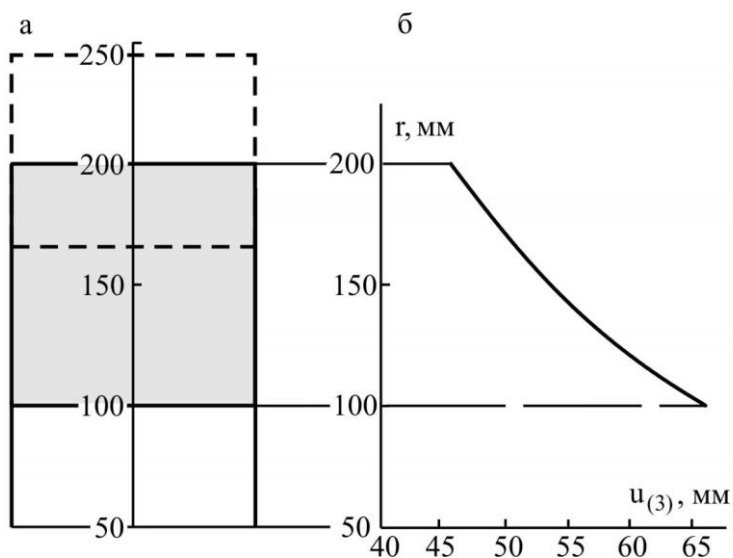


Рис. 2. Контур осевого сечения цилиндра в исходном ( — ) и при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$  ( - - - ) состояниях (а) и распределение радиальных перемещений в поперечных сечениях цилиндра (б)

На рис. 3 представлены зависимости радиальных перемещений во внутренней и внешней поверхностях цилиндра от скорости вращения  $\omega/2\pi$ . При используемом масштабе изображения кривые зависимостей отражают изменения внутреннего и внешнего радиусов поперечных сечений цилиндра для всего интервала их положений  $0 \leq t \leq h/2$ . Расстояния между данными кривыми вдоль вертикального направления определяют уменьшения толщины стенки цилиндра с увеличением скорости его вращения.

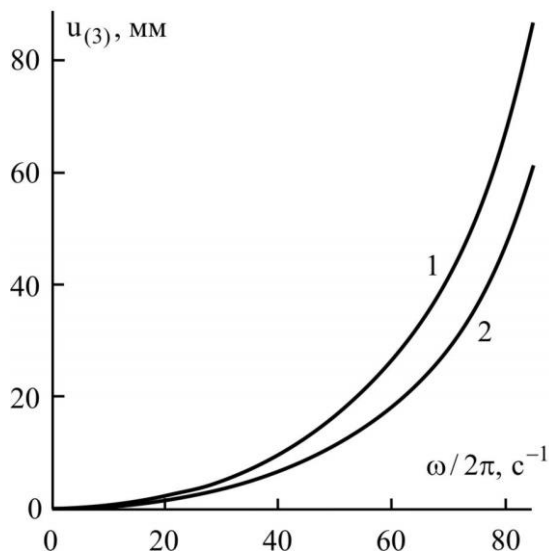


Рис. 3. Зависимости радиальных перемещений  $u_{(3)}$  во внутренней (1) и внешней (2) поверхностях цилиндра от скорости вращения  $\omega/2\pi$

На рис. 4 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половин сборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения. Каждая из данных сборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация ее осевого сечения не зависят от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированных сборок.

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ . Вторая сборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями  $z = 0$  и  $z = 3h$ . Третья сборка образована из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями  $z = 48,5h$  и  $z = 51,5h$ . Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и 100-го элементов между поверхностями  $z = 97h$  и  $z = 100h$ .

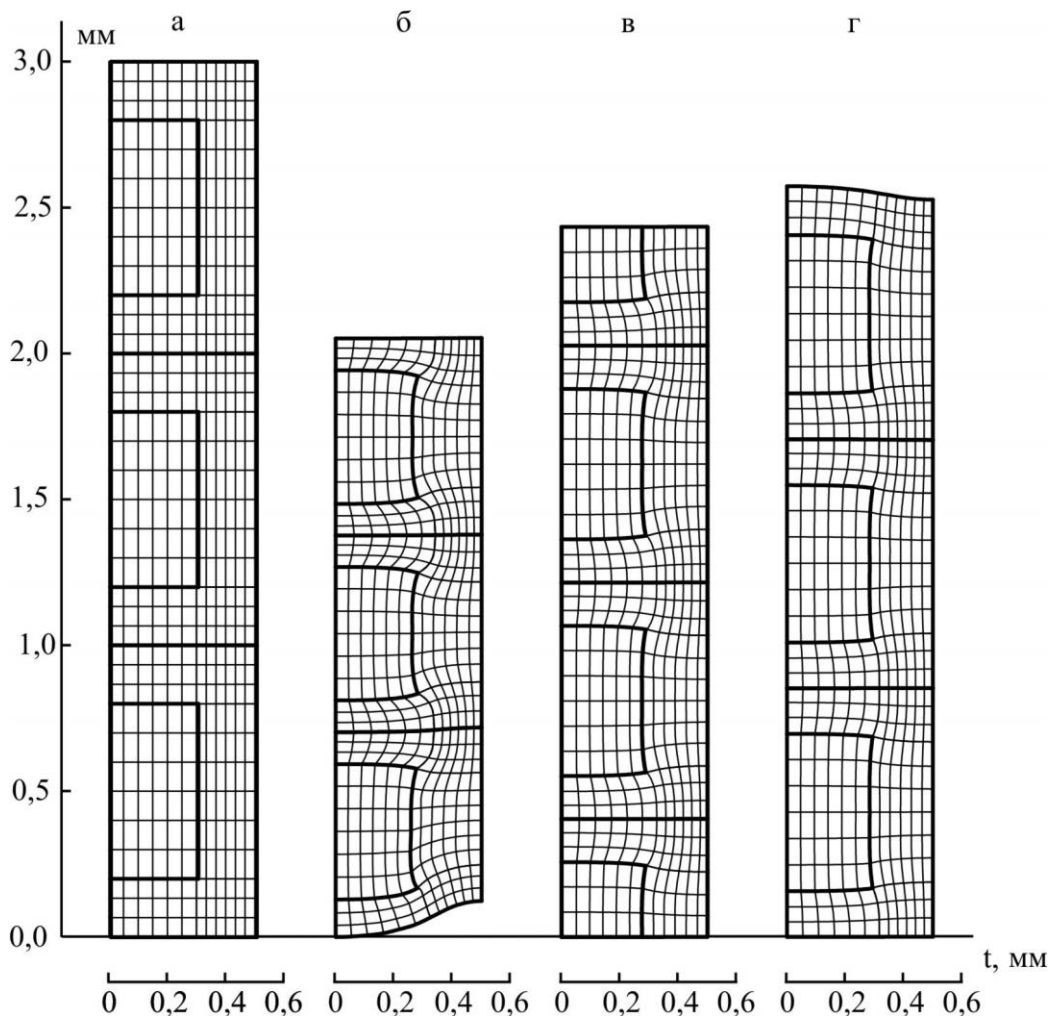


Рис. 4. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра: а) – сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) – сборки при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$ , включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий  $t = t_i$ ,  $z = z_i$ , проходящих через узловые точки  $(t_i, z_i)$  конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют насколько более интенсивно деформируются кольцевые элементы, расположенные ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами. Отметим при этом отражение конфигурациями вытеснения связующего между волокнами в дисковом слое в область слоя за волокнами.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Для 2-го и 3-го элементов различия в их конфигурациях выражены менее существенно. Что касается 3-го и 4-го и последующих пар смежных элементов, то их конфигурации близки между собой в пределах погрешности представления графического материала. Это продолжается включительно до пары 98-го и 99-

го элементов. И только конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го. Приходим к заключению, что приповерхностный эффект возле внутренней поверхности цилиндра проникает на глубину одного или двух периодов армирования кольцевыми волокнами в зависимости от применяемого критерия (данный вопрос здесь оставляем без внимания), а возле его внешней поверхности – на глубину одного периода армирования.

На рис. 5 представлены распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в центральном сечении  $t = 0$ . Распределения напряжений показаны на протяжениях в цилиндре  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок кольцевых элементов, которые изображены на рис. 3, б, в, г. Эти напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного кольцевого элемента к выше расположенному другому эти напряжения в матрице и волокнах убывают. Для матрицы напряжение уменьшается от значения  $p_{22} = 3,1$  МПа во внутренней поверхности  $z = 0$  до  $p_{22} = 1,2$  МПа во внешней  $z = 100$  мм. В срединной поверхности  $z = 0,5h$  первого волокна  $p_{22} = 47,1$  МПа, а в срединной поверхности  $z = 99,5h$  100-го волокна  $p_{22} = 15,8$  МПа. С переходом от матрицы к волокну данное напряжение для 1-го элемента увеличивается в 22 и 17 раз по месту его внутренней и внешней цилиндрических поверхностей раздела, для 100-го элемента – в 25 и 17 раз соответственно и в 14 раз для элементов возле срединной поверхности цилиндра в обеих для каждого из них поверхностей раздела.

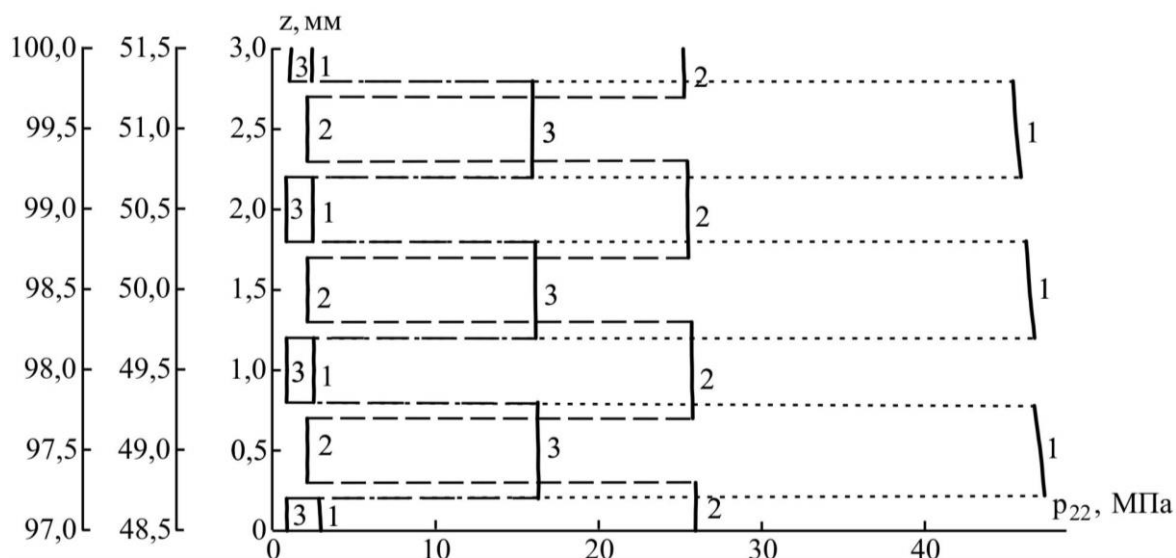


Рис. 5. Распределения окружных напряжений  $p_{22}$  в центральном сечении  $t = 0$  на протяжениях  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех сборок кольцевых элементов цилиндра

### ВЫВОДЫ

Провели исследование эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения. Цилиндр изучали при макроскопически плоском деформировании под воздействием вращения вокруг его осевой линии на основе модели кусочно-однородной среды. Установили факт вытеснения матричного материала из областей между волокнами в дисковых слоях в области слоев за волокнами. Изучили приповерхностный эффект, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов цилиндра, прилегающих к его внутренней и внешней поверхностям. При задаваемом развитии конфигурации цилиндра его скорость вращения, равно как и запас кинетической энергии, можно эффективно регулировать армированием волокнами по окружным направлениям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Loffer K. Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
2. Композиционные материалы: Справочник: Васильев В. В., Тарнопольский Ю. М. (ред.). Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Tervonen M., Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32, No. 6. P. 835–841.
4. Portnov G. G., Bakis Ch. E. Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36, No. 1. P. 87–94.
5. Джонсон У., Меллор П. Б. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Термopрочность деталей машин: Биргер И. А., Шор Б.Ф. (ред.). Москва: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. *Механика композит. материалов*. 2009. Т. 45, № 3. С. 347–366.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов. *Механика композит. материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 301–316.
9. Ахундов В. М. Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение. *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50, № 6. С. 1131–1142.
10. Ахундов В. М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7, № 1. С. 3–15.
11. Ахундов В. М. Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях. *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51, № 6. С. 971–990.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
13. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
14. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
15. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

## REFERENCES

1. Loffer, K. (1961). Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG.
2. Vasil'ev, V. V., Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). (1990). *Composite Materials: Handbook*. Moscow: Mashinostroenie.
3. Tervonen, M. & Pramila, A. (1996). Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 32, No. 6, pp. 835-841.
4. Portnov, G. G. & Bakis, Ch. E. (2000). Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 36, No. 1, pp. 87-94.
5. Dzhonson, U. & Mellor, P. B. (1979). *Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov*. Mosvow: Mashinostroenie.
6. Birger, I. A., Shor, B. F. (Eds.). (1975). *Thermal strength of machine parts*. Moscow: Mashinostroenie.
7. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2009). Large deformations of homogeneous and thread-reinforced cylinders under the influence of centrifugal forces. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 45, No. 3, pp. 347-366.
8. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2011). Axisymmetric deformation of rotating cylinders from homogeneous and reinforced elastic materials. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 47, No. 2, pp. 301-316.
9. Ahundov, V. M. (2014). Modeling of large deformations of fibrous bodies of revolution on the basis of applied and framework theories. 3. Rotational motion. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 50, No. 6, pp. 1131-1142.
10. Ahundov, V. M. (2001). Applied theory of composites with small filament fillings at large deformations. *Mekhanika kompozitsionnyh materialov i konstrukcij*, Vol. 7, No. 1, pp. 3-15.
11. Ahundov, V. M. (2015). The framework theory of fibrous media with uncorrelated and locally curved fibers for large deformations. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 51, No. 6, pp. 971-990.
12. Lur'e, A. I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
13. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
14. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns*. Moscow: Mir.
15. Chernyh, K. F. (1986). *Nonlinear theory of elasticity in machine-building calculations*. Leningrad: Mashinostroenie.