

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ

Кострова М. М., аспирант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., профессор

*Національна металургічна академія України,
просп. Гагарина, 4, г. Дніпр, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Изучали деформирование свободно вращающегося цилиндра, эластичная матрица которого двоякопериодически армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала. Решение задачи осуществляли на основе модели кусочно-однородной среды, исходя из общих уравнений нелинейной теории упругости. Для решения задачи применяли метод конечных разностей с использованием конечно-разностных соотношений второго порядка точности и метод продолжения решения по скорости вращения цилиндра.

Ключевые слова: цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, силы центробежные, вращение свободное, деформирование нелинейное, метод конечных разностей.

ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТИЧНОГО ЦИЛІНДРУ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ЗА ВІЛЬНОЇ ПОСАДКИ

Кострова М. М., аспірант, Ахундов В. М., д. ф.-м. н., професор

*Національна металургійна академія України,
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49005, Україна*

akhundov@ua.fm

Вивчали деформування вільно обертового циліндра, еластична матриця якого двоякоперіодично армована кільцевими волокнами квадратного перетину з більш жорсткого еластичного матеріалу. Рішення задачі здійснювали на основі моделі кусково-однорідного середовища, виходячи із загальних рівнянь нелінійної теорії пружності. Для вирішення задачі застосовували метод кінцевих різниць з використанням кінцево-різницевої співвідношень другого порядку точності і метод продовження рішення за швидкістю обертання циліндра.

Ключові слова: циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, сили відцентрові, обертання вільне, деформування нелінійне, метод кінцевих різниць.

DEFORMING THE ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER THE ACTION OF ROTATION AT FREE SITE

Kostrova M. M., Graduate student, Akhundov V. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

*National Metallurgical Academy of Ukraine,
Gagarin ave., 4, Dnepr, Ukraine*

akhundov@ua.fm

The deformation of a freely rotating cylinder was studied, the elastic matrix of which was doubly repetitively reinforced with circular fibers of square section made of a more rigid elastic material. The solution of the problem was carried out on the basis of a model of a piecewise homogeneous medium, starting from the general equations of the nonlinear theory of elasticity. To solve the problem, the finite difference method was used with the use of finite-difference relations of the second order of accuracy and the method of continuation of the solution with respect to the rotation speed of the cylinder.

Key words: piecewise homogeneous cylinder, circular fibers, centrifugal forces, free rotation, nonlinear deformation, finite difference method.

ВВЕДЕНИЕ

Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [1]. В [2] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [3] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрически ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [4] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в работе [5]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [6].

Исследование больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил вращательного движения представлено в работах [7-9]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявили. В [7] решены задачи в плоской постановке для однородных цилиндров и цилиндров, слабо армированных нитями по осевым, окружным и радиальным направлениям. Исследование производили по прикладной теории волокнистых сред [10], основанной на модели материала, в которой макроскопические напряжения определяются аддитивными вкладками напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия волокон. В [8] рассмотрели также по прикладной теории осесимметричное деформирование цилиндров с расположением волокон по окружным и радиальным направлениям при разных посадках по внутренней поверхности.

В [9] на базе одноуровневой прикладной и двухуровневой каркасной теорий решены задачи о цилиндрах с двух- и трехортогональными схемами армирования. Каркасная теория [11] включает макромеханический уровень, на котором для тела в целом решается макрокраявая задача. На микромеханическом уровне для узловых блоков представления армированного материала тела решаются микрокраевые задачи по модели кусочно-однородной среды и условиям из макромеханического уровня в итерационной процедуре взаимодействия уровней анализа.

Модель кусочно-однородной среды методологически наиболее точно отражает поведение тела волокнистого строения. В данном подходе матрица и волокна рассматриваются как контактно взаимодействующие тела на базе уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) для матрицы и каждого из волокон систем армирования. Но из-за ограниченности вычислительных ресурсов модель кусочно-однородной среды в "чистом" виде может быть применена лишь для небольшого перечня тел с однонаправленным армированием при частных нагружениях. В качестве такого объекта по данной модели исследовали цилиндр под воздействием вращения, эластичная матрица которого армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения из более жесткого эластичного материала.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решали задачу о деформации эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра двоякопериодически с одинаковыми периодами армирования по осевому и радиальному направлениям. Цилиндр моделировали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляли в виде колец квадратного сечения из матричного материала, включающих кольцевые волокна квадратного сечения в качестве их армирующей сердцевин.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом $r = a$ и внешним $r = b$. Цилиндр включает цилиндрические слои с одинаковой толщиной h , армированные кольцевыми волокнами одинакового квадратного сечения с длиной сторон δ . Цилиндр также рассматривали как совокупность дисковых слоев толщиной h , в которых concentрически располагаются кольцевые волокна по одному от каждого цилиндрического слоя (квадратная упаковка).

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра, отвечающую макроскопически плоскому деформированию, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий симметрии задачу решали для половинного дискового слоя толщиной $h/2$. Такой слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу между волокнами, при расстоянии между сечениями, равном половине периода армирования по осевому направлению (см. также рис. 2).

Применяли лагранжевую систему цилиндрических координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, из которых $\hat{\theta}^1$ – осевая, $\hat{\theta}^2$ – окружная, $\hat{\theta}^3$ – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как t, φ, r соответственно. Осевую координату t отсчитывали от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой r использовали «толщинную» координату $z = r - a$, отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Физические компоненты векторных и тензорных величин относительно отсчетной системы координат сопровождаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки.

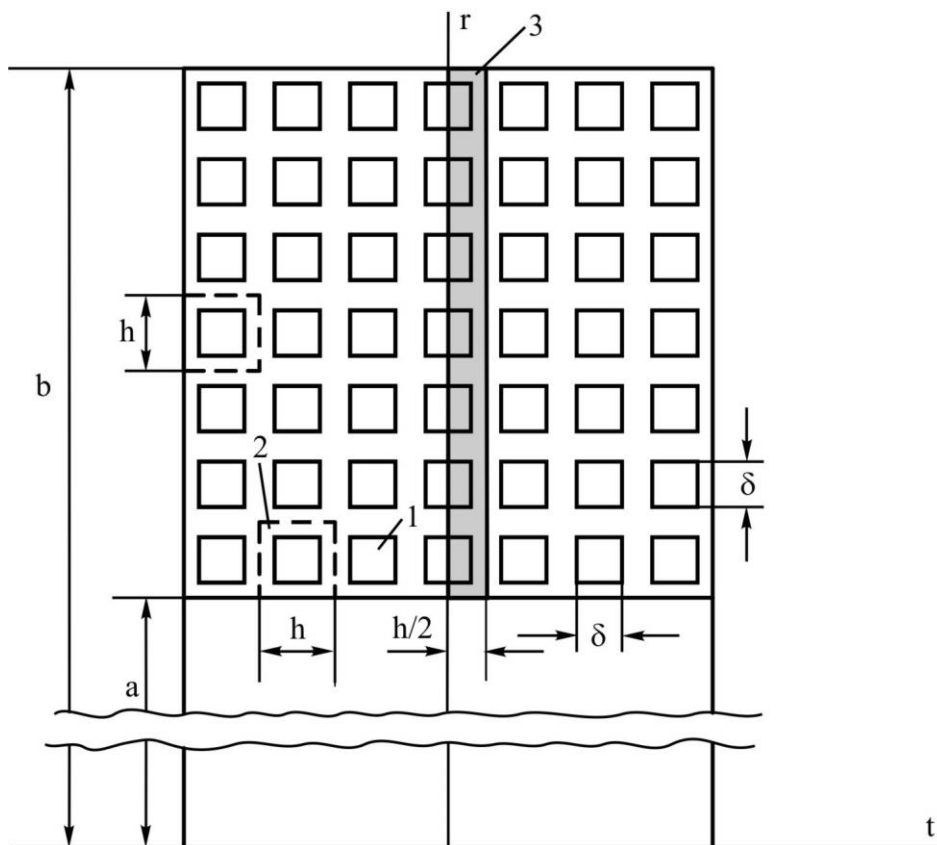


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Исходили из общих геометрических и физических уравнений и уравнений равновесия в нелинейной теории упругости [12] для описания на их основе осесимметричного деформирования рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Отличительной особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, действующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения

цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности массовых сил, действующих на составляющие цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{(3)} = (r + u_{(3)})\omega^2,$$

где $u_{(3)}$ – радиальная компонента вектора перемещения; $\omega = 2\pi \cdot f$ – угловая скорость вращения; f – число оборотов вращения в секунду.

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам t и r в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [13]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2$, $a \leq r \leq b$. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [14]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представляем результаты для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматриваем как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра $a = 100$ мм, внешний радиус $b = 200$ мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения $\delta = 0,6$ мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон $h = 1$ мм, коэффициент наполнения волокнами $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$. Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона-Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [15]. Для матрицы принимали значения упругих параметров $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0,46$, $\beta_m = 1$; для волокон – $E_f = 68$ МПа, $\nu_f = 0,4$. Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой $\rho = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³.

Приводим результаты на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках $0 \leq t \leq 0,3$ мм и $0,3$ мм $\leq t \leq 0,5$ мм по 7-мь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по z во внутреннем $0 \leq z \leq 0,2$ мм и внешнем $99,8$ мм $\leq z \leq 100$ мм покровных слоях и в волокнах и между волокнами также по 7-мь узловых точек. На рис. 3 показаны координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек. Исключением являются покровные слои, в которых координатные линии $z = z_i$ проведены через одну из применяемых узловых точек.

На рис. 2 представлены контурные линии цилиндра в исходном состоянии и при угловой скорости $\omega = 2\pi \cdot 80$ с⁻¹ и график изменения радиальных перемещений $u_{(3)}$ в поперечных сечениях цилиндра в зависимости от радиальной координаты r . Образующие внутренней и внешней граничных поверхностей деформированного цилиндра в пределах погрешности изображения представляют собой прямые линии, параллельные его оси. Радиальное перемещение для центрального сечения $t = 0$ изменяется от значения $u_{(3)} = 66,1$ мм при $r = a = 100$ мм до $u_{(3)} = 45,6$ мм при $r = b = 200$ мм. Внутренний и внешний его радиусы в деформированном состоянии становятся

$$a^* = a + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=a} = 166,1 \text{ мм}, \quad b^* = b + u_{(3)} \Big|_{t=0, r=b} = 245,6 \text{ мм}.$$

Толщина цилиндра по месту центрального сечения при этом $H^*|_{t=0} = b^* - a^* = 79,5$ мм вместо прежней $H = b - a = 100$ мм.

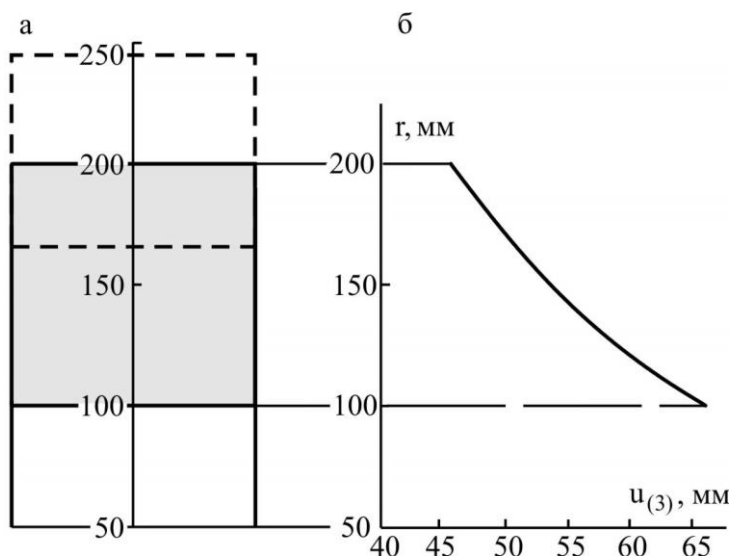


Рис. 2. Контур осевого сечения цилиндра в исходном (—) и при вращении $\omega = 2\pi \cdot 80 \text{ c}^{-1}$ (---) состояниях (а) и распределение радиальных перемещений в поперечных сечениях цилиндра (б)

На рис. 3 представлены зависимости радиальных перемещений во внутренней и внешней поверхностях цилиндра от скорости вращения $\omega/2\pi$. При используемом масштабе изображения кривые зависимостей отражают изменения внутреннего и внешнего радиусов поперечных сечений цилиндра для всего интервала их положений $0 \leq t \leq h/2$. Расстояния между данными кривыми вдоль вертикального направления определяют уменьшения толщины стенки цилиндра с увеличением скорости его вращения.

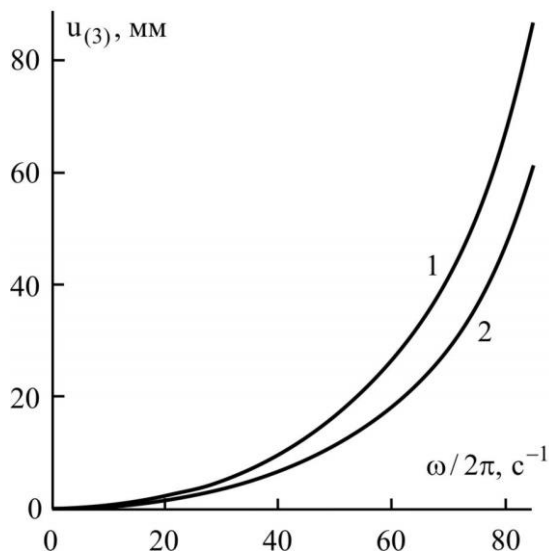


Рис. 3. Зависимости радиальных перемещений $u_{(3)}$ во внутренней (1) и внешней (2) поверхностях цилиндра от скорости вращения $\omega/2\pi$

На рис. 4 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половин сборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения. Каждая из данных сборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация ее осевого сечения не зависят от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированных сборок.

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$. Вторая сборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями $z = 0$ и $z = 3h$. Третья сборка образована из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями $z = 48,5h$ и $z = 51,5h$. Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и 100-го элементов между поверхностями $z = 97h$ и $z = 100h$.

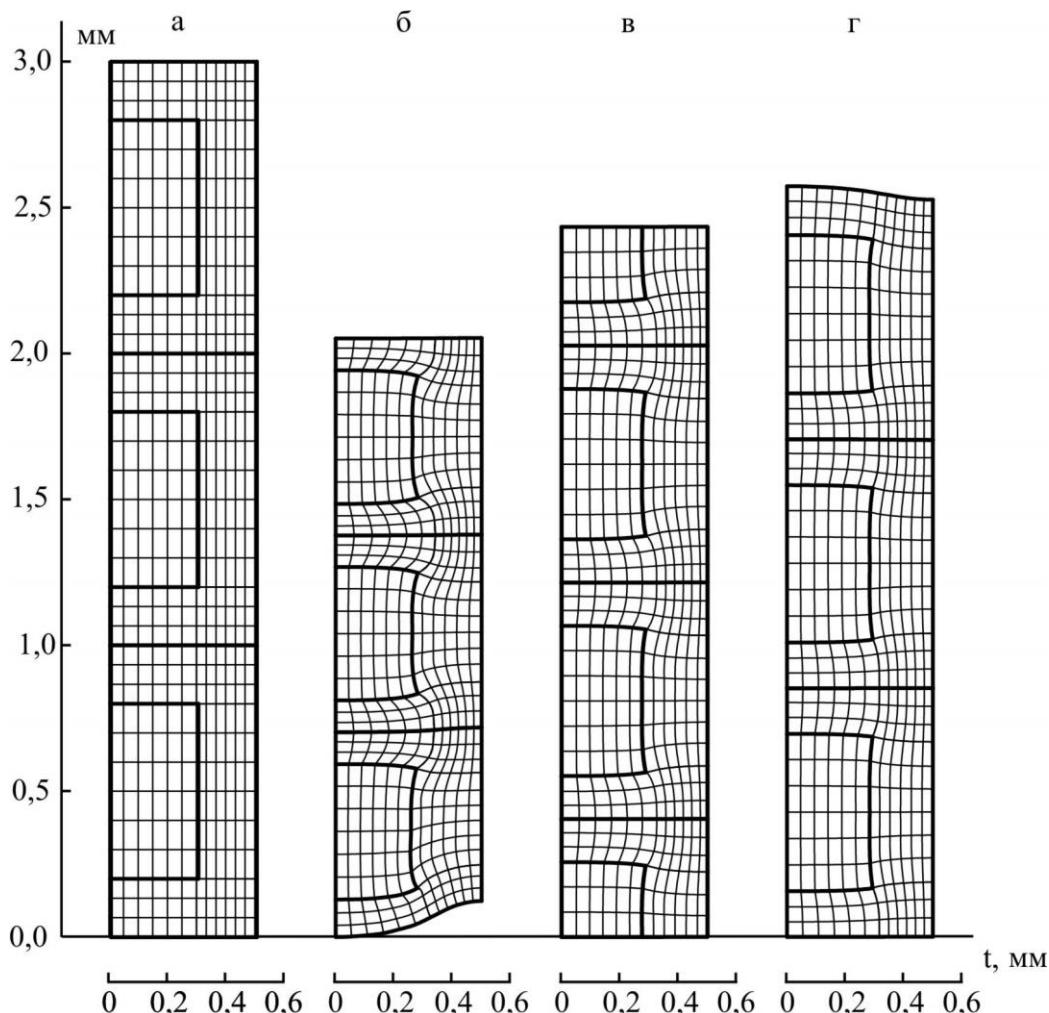


Рис. 4. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра: а) – сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) – сборки при вращении $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$, включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий $t = t_i$, $z = z_i$, проходящих через узловые точки (t_i, z_i) конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют насколько более интенсивно деформируются кольцевые элементы, расположенные ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами. Отметим при этом отражение конфигурациями вытеснения связующего между волокнами в дисковом слое в область слоя за волокнами.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Для 2-го и 3-го элементов различия в их конфигурациях выражены менее существенно. Что касается 3-го и 4-го и последующих пар смежных элементов, то их конфигурации близки между собой в пределах погрешности представления графического материала. Это продолжается включительно до пары 98-го и 99-

го элементов. И только конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го. Приходим к заключению, что приповерхностный эффект возле внутренней поверхности цилиндра проникает на глубину одного или двух периодов армирования кольцевыми волокнами в зависимости от применяемого критерия (данный вопрос здесь оставляем без внимания), а возле его внешней поверхности – на глубину одного периода армирования.

На рис. 5 представлены распределения окружных напряжений p_{22} в центральном сечении $t = 0$. Распределения напряжений показаны на протяжениях в цилиндре $0 \leq z \leq 3h$, $48,5h \leq z \leq 51,5h$, $97h \leq z \leq 100h$ трех сборок кольцевых элементов, которые изображены на рис. 3, б, в, г. Эти напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного кольцевого элемента к выше расположенному другому эти напряжения в матрице и волокнах убывают. Для матрицы напряжение уменьшается от значения $p_{22} = 3,1$ МПа во внутренней поверхности $z = 0$ до $p_{22} = 1,2$ МПа во внешней $z = 100$ мм. В срединной поверхности $z = 0,5h$ первого волокна $p_{22} = 47,1$ МПа, а в срединной поверхности $z = 99,5h$ 100-го волокна $p_{22} = 15,8$ МПа. С переходом от матрицы к волокну данное напряжение для 1-го элемента увеличивается в 22 и 17 раз по месту его внутренней и внешней цилиндрических поверхностей раздела, для 100-го элемента – в 25 и 17 раз соответственно и в 14 раз для элементов возле срединной поверхности цилиндра в обеих для каждого из них поверхностей раздела.

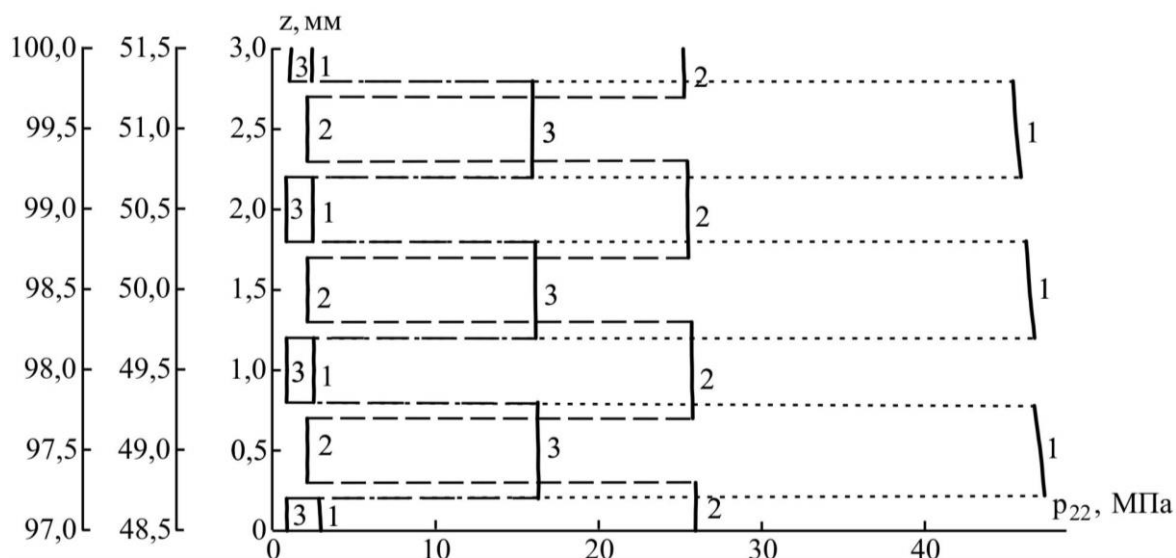


Рис. 5. Распределения окружных напряжений p_{22} в центральном сечении $t = 0$ на протяжениях $0 \leq z \leq 3h$, $48,5h \leq z \leq 51,5h$, $97h \leq z \leq 100h$ трехборок кольцевых элементов цилиндра

ВЫВОДЫ

Провели исследование эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения. Цилиндр изучали при макроскопически плоском деформировании под воздействием вращения вокруг его осевой линии на основе модели кусочно-однородной среды. Установили факт вытеснения матричного материала из областей между волокнами в дисковых слоях в области слоев за волокнами. Изучили приповерхностный эффект, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов цилиндра, прилегающих к его внутренней и внешней поверхностям. При задаваемом развитии конфигурации цилиндра его скорость вращения, равно как и запас кинетической энергии, можно эффективно регулировать армированием волокнами по окружным направлениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loffer K. Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
2. Композиционные материалы: Справочник: Васильев В. В., Тарнопольский Ю. М. (ред.). Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Tervonen M., Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32, No. 6. P. 835–841.
4. Portnov G. G., Bakis Ch. E. Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36, No. 1. P. 87–94.
5. Джонсон У., Меллор П. Б. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Термopрочность деталей машин: Биргер И. А., Шор Б.Ф. (ред.). Москва: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. *Механика композит. материалов*. 2009. Т. 45, № 3. С. 347–366.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов. *Механика композит. материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 301–316.
9. Ахундов В. М. Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение. *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50, № 6. С. 1131–1142.
10. Ахундов В. М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7, № 1. С. 3–15.
11. Ахундов В. М. Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях. *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51, № 6. С. 971–990.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
13. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
14. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
15. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

REFERENCES

1. Loffer, K. (1961). Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG.
2. Vasil'ev, V. V., Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). (1990). *Composite Materials: Handbook*. Moscow: Mashinostroenie.
3. Tervonen, M. & Pramila, A. (1996). Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 32, No. 6, pp. 835-841.
4. Portnov, G. G. & Bakis, Ch. E. (2000). Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 36, No. 1, pp. 87-94.
5. Dzhonson, U. & Mellor, P. B. (1979). *Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov*. Mosvow: Mashinostroenie.
6. Birger, I. A., Shor, B. F. (Eds.). (1975). *Thermal strength of machine parts*. Moscow: Mashinostroenie.
7. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2009). Large deformations of homogeneous and thread-reinforced cylinders under the influence of centrifugal forces. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 45, No. 3, pp. 347-366.
8. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2011). Axisymmetric deformation of rotating cylinders from homogeneous and reinforced elastic materials. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 47, No. 2, pp. 301-316.
9. Ahundov, V. M. (2014). Modeling of large deformations of fibrous bodies of revolution on the basis of applied and framework theories. 3. Rotational motion. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 50, No. 6, pp. 1131-1142.
10. Ahundov, V. M. (2001). Applied theory of composites with small filament fillings at large deformations. *Mekhanika kompozitsionnyh materialov i konstrukcij*, Vol. 7, No. 1, pp. 3-15.
11. Ahundov, V. M. (2015). The framework theory of fibrous media with uncorrelated and locally curved fibers for large deformations. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 51, No. 6, pp. 971-990.
12. Lur'e, A. I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
13. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
14. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns*. Moscow: Mir.
15. Chernyh, K. F. (1986). *Nonlinear theory of elasticity in machine-building calculations*. Leningrad: Mashinostroenie.