

3. Kuz, I., Kuz, O. & Pyz, N. (2015). Stress-strain state of elastic-plastic linearly strengthenable plates with two perpendicular cuts under all-round stretching. Visnyk of TNTU, No. 2(78), pp. 110-116.
4. Плушин, А. (1963). Plasticity. Bases of General Mathematical Theory. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Science.
5. Pobedria, B. E. (1981). Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Publishing House of Moscow University.
6. Bozydarnyk, V. V. & Sulym, H. T. (1999). Elements of Theory of Plasticity and Strength. Vol. 1, 2. Lviv: Publishing House "Svit".

УДК 519.172

СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА И ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

lilili5050@rambler.ru

Данная работа посвящена одной из основополагающих структур в графе – реберному разрезу графа. В статье приведены формальные определения центрального и реберного разрезов графа. Показана связь между центральными разрезами и квалиразрезами в графе. На основании понятия реберного разреза и операции порождения строится спектр реберных разрезов, характеризующийся множеством ребер определенного уровня. Показано, что спектр реберных разрезов графа может быть применен для задачи распознавания изоморфизма графов.

Ключевые слова: граф, изоморфизм, центральные разрезы, реберные разрезы, квазициклы, спектр реберных разрезов.

СПЕКТР РЕБЕРНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА ТА ЗАДАЧА ІЗОМОРФІЗМУ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lilili5050@rambler.ru

Робота присвячена одній з основоположних структур у графі – реберному розрізу графа. У статті наведені формальні визначення центрального і реберного розрізів графа. Показано зв'язок між центральними розрізами і квалірозрізами у графі. На основі поняття реберного розрізу і операції породження будується спектр реберних розрізів, що характеризується множиною ребер визначеного рівня. Показано, що спектр реберних розрізів графа може бути застосований для задачі розпізнавання ізоморфізму графів.

Ключові слова: граф, ізоморфізм, центральні розрізи, реберні розрізи, квазіцикли, спектр реберних розрізів.

GRAPH EDGE CUT AND THE GRAPH ISOMORPHISM PROBLEM

Kurapov S. V., PhD in Physics and Maths, associate professor, Davidovsky M. V.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

lilili5050@rambler.ru

The presented research is devoted to one of the fundamental structures in graphs – the edge cut of a graph. In this article the authors provide formal definitions of central and edge cuts of a graph and show the relation between central cuts and quasi-cycles in a graph. For that they use the notion of a ring sum of graphs and prove three special lemmas. The first lemma states that the ring sum of all central cuts of a

graph is an empty set. The second one establishes that the same statement holds also for all edge cuts of a graph. In turn, the third lemma states that the ring sum of the intersection of central cuts for the edges of any quasi-cycle of a graph is a quasi-cycle. Further, based on the notion of edge cut and the generation operation, the authors show the process of constructing a spectrum of edge cuts. The spectrum is basically characterized by a set of edges of a determined level. Moreover, it is shown that the spectrum of graph edge cuts can be applied to the graph isomorphism recognition problem. In addition, the authors consider the specificity of isomorphism recognition in a case of strongly regular graphs. The detailed examples of solving the problem of isomorphism recognition using the spectrum of graph edge cuts are given in the final part of the article.

Keywords: graph, isomorphism, central cuts, edge cuts, quasicycles, spectrum of edge cuts.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И РЕБЕРНЫЕ РАЗРЕЗЫ В ГРАФЕ

Любой суграф, принадлежащий подпространству разрезом S , в общем случае является квалиразрезом [2].

Определение 1. *Центральным разрезом* будем называть квалиразрез, состоящий из инцидентных ребер, принадлежащих данной вершине, и будем его обозначать $s\{x_i\}$ для i – вершины (см. рис. 1,а).

Определение 2. *Реберным разрезом* будем называть квалиразрез, образованный из инцидентных ребер, принадлежащих двум конечным вершинам данного ребра, за исключением самого ребра, и будем его обозначать $w(u_{ij})$ для ребра u_{ij} соединяющего вершины x_i и x_j (см. рис. 1,б).

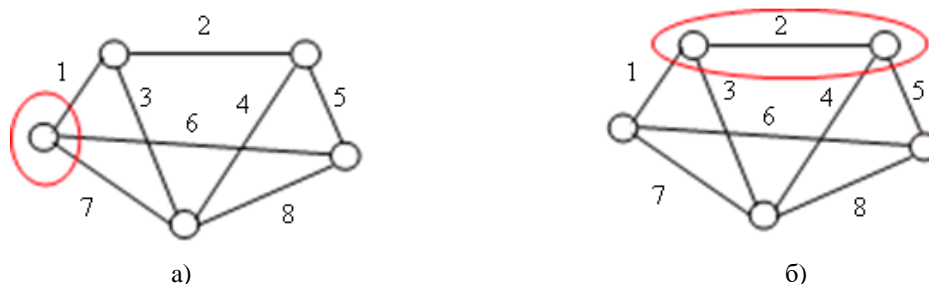


Рис. 1. Центральный разрез $\{u_1, u_6, u_7\}$ и реберный разрез $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$

Количество ребер в реберном разрезе будем называть *длиной разреза*.

СВЯЗЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ И РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ С КВАЗИЦИКЛАМИ ГРАФА

Между центральными разрезами и квазициклами графа существует связь, устанавливаемая следующими леммами:

Лемма 1. Кольцевая сумма множества центральных разрезом графа есть пустое множество.

Доказательство. Этот факт следует из линейной независимости любых $n-1$ вершин [3].

Лемма 2. Кольцевая сумма реберных разрезом для любого квазицикла графа есть пустое множество.

Доказательство. Пусть длина квазицикла равна p и реберный разрез равен кольцевой сумме единичных разрезом для конечных вершин ребра $w(u_{ij}) = w(x_i) \oplus w(x_j)$, тогда:

$$w(u_{12}) \oplus w(u_{23}) \oplus \dots \oplus w(u_{p1}) = (w(x_1) \oplus w(x_2)) \oplus (w(x_2) \oplus w(x_3)) \oplus \dots \oplus (w(x_p) \oplus w(x_1)) = \emptyset. \tag{1}$$

И кольцевая сумма есть пустое множество, так как центральные разрезом присутствуют в правой части выражения (1) дважды (см. рис. 2).

Лемма 3. Кольцевая сумма пересечения центральных разрезом для ребер любого квазицикла графа есть квазицикл.

Доказательство. Любое ребро графа можно представить в виде $u_{ij} = w(x_i) \cap w(x_j)$, а любой квазицикл можно представить как кольцевую сумму ребер, тогда:

$$c = u_{12} \oplus u_{23} \oplus \dots \oplus u_{p1} = (w(x_1) \cap w(x_2)) \oplus (w(x_2) \cap w(x_3)) \oplus \dots \oplus (w(x_p) \cap w(x_1)). \tag{2}$$

Отсюда следует:

$$c = \sum_{k=1}^p w(x_k) \cap w(x_{k+1}). \tag{3}$$

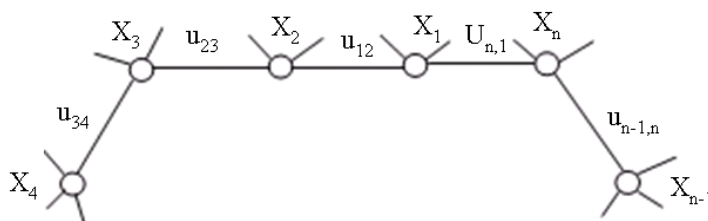


Рис. 2. Цикл графа

Пример 1. Для иллюстрации лемм рассмотрим следующий граф G , представленный на рис. 3.

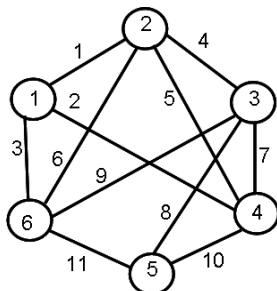


Рис. 3. Граф G

Множество центральных разрезов графа $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$, где:

$$\begin{aligned} s_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; & s_2 &= \{u_1, u_4, u_5, u_6\}; & s_3 &= \{u_4, u_7, u_8, u_9\}; \\ s_4 &= \{u_2, u_5, u_7, u_{10}\}; & s_5 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}\}; & s_6 &= \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\}. \end{aligned}$$

Кольцевая сумма центральных разрезов графа равна:

$$\{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_4, u_7, u_8, u_9\} \oplus \{u_2, u_5, u_7, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\} = \emptyset.$$

Выберем цикл $\{u_4, u_6, u_9\}$. Кольцевая сумма реберных разрезов равна:

$$\{u_1, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\} \oplus \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_9, u_{11}\} \oplus \{u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_{11}\} = \emptyset.$$

Цикл представляется как сумма пересечений центральных разрезов:

$$c = (\{u_1, u_4, u_5, u_6\} \cap \{u_4, u_7, u_8, u_9\}) \oplus (\{u_1, u_4, u_5, u_6\} \cap \{u_3, u_6, u_9, u_{11}\}) \oplus (\{u_3, u_6, u_9, u_{11}\} \cap \{u_4, u_7, u_8, u_9\}) = \{u_4\} \oplus \{u_6\} \oplus \{u_9\} = \{u_4, u_6, u_9\}.$$

В свою очередь, реберный разрез для ребра u_i есть элемент множества разрезов графа $S(G)$. В классической теории графов ребра реберного графа $L(G)$ порождают новый реберный граф $L(L(G))$ и т.д. [1,4]. В общем случае можно определить итерированный реберный граф рекуррентным соотношением $L^n(G) = L(L^{n-1}(G)), n \geq 2$. Можно заметить, что количество ребер при переходе от реберного графа $L^{n-1}(G)$ к графу $L^n(G)$ увеличивается. В отличие от порождения итерированных реберных графов, мы будем рассматривать цепочку порождения итерированных графов квалиразрезов исходного графа, определяемых рекуррентным

соотношением $W^k(G) = W(W^{k-1}(G)), k \geq 1$ по принципу – граф квалиразрезов n -го уровня $W^k(G)$ порождает граф квалиразрезов $k+1$ уровня $W^{k+1}(G)$. В отличие от цепочки структуры реберных графов, такая цепочка порождает разрезы всегда с количеством не более величины m – количества ребер, и такое порождение всегда конечно. И это свойство может использоваться для построения нового частично-ориентированного графа с петлями, характеризующего определенный уровень квалиразрезов $W^k(G)$ с количеством вершин, равным m .

С другой стороны, порождение цепочек квалиразрезов $k+1$ уровня графа G для каждого ребра осуществляется путем сложения по модулю 2 реберных разрезов k -го уровня этого ребра. Каждое новое подмножество ребер формируется рекурсивно, с помощью предыдущего множества:

$$w^{k+1}(G) = \theta(w^k(G)), \tag{4}$$

где количество слагаемых равно количеству ребер предыдущего подмножества, а θ – оператор порождения разреза. Такое построение и определяет строку для ребра u_i матрицы смежностей графа $W^k(G)$ разрезов уровня k .

Все уровневые подмножества также будут представлять собой квалиразрезы исходного графа G . Так, нулевой уровень будет состоять из реберных разрезов графа G , а все остальные порождаться им. При получении циклического повтора подмножества или подмножества нулевой мощности для ребра графа порождение прекращается.

На каждом уровне образуются m подмножеств, зависящих от ребер графа, что дает нам возможность построить квадратные матрицы размером $m \times m$ на каждом уровне, которые можно представлять как матрицы смежностей графа разрезов определенного уровня.

Как видно, реберные разрезы графа состоят из подмножества ребер и порождают ярусные квалиразрезы графа, так, как каждое ребро можно представить в виде реберного разреза.

СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ

Спектром реберных разрезов графа будем называть совокупность ярусных реберных разрезов.

Пример 2. В качестве примера выделения спектра реберных разрезов, рассмотрим следующий граф (см. рис. 4).

Множество единичных разрезов графа:

$$s(x_1) = s_1 = \{u_1, u_2, u_3\};$$

$$s(x_2) = s_2 = \{u_4, u_5, u_6\};$$

$$s(x_3) = s_3 = \{u_1, u_4, u_7\};$$

$$s(x_4) = s_4 = \{u_2, u_5, u_7\};$$

$$s(x_5) = s_5 = \{u_3, u_6\}.$$

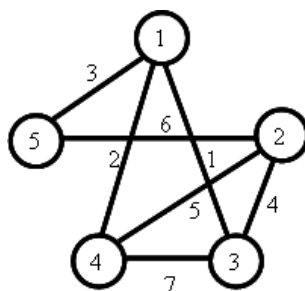


Рис. 4. Граф G

Множество реберных разрезов графа (0-уровень разрезов):

$$w_0(u_1) = s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_2, u_3, u_4, u_7\};$$

$$w_0(u_2) = s_1 \oplus s_4 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_3, u_5, u_7\};$$

$$w_0(u_3) = s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\};$$

$$w_0(u_4) = s_2 \oplus s_3 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_1, u_5, u_6, u_7\};$$

$$w_0(u_5) = s_2 \oplus s_4 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_2, u_4, u_6, u_7\};$$

$$w_0(u_6) = s_2 \oplus s_5 = \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\};$$

$$w_0(u_7) = s_3 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}.$$

Множество квалиразрезов 1-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned} w_1(u_1) &= \theta(\{u_2, u_3, u_4, u_7\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_2 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_2) &= \theta(\{u_1, u_3, u_5, u_7\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_2 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_3, u_4, u_5\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_3) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_4) &= \theta(\{u_1, u_5, u_6, u_7\}) s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_5) &= \theta(\{u_2, u_4, u_6, u_7\}) s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_1, u_2, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(u_6) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$w_1(u_7) = \theta(\{u_1, u_2, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = \emptyset.$$

Множество квалиразрезов 2-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned} w_2(u_1) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_2) &= \theta(\{u_3, u_4, u_5\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_3) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_4) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_5) &= \theta(\{u_1, u_2, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(u_6) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\ &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \emptyset; \end{aligned}$$

$$w_2(u_7) = \emptyset.$$

Множество квалиразрезов 3-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned}
 w_3(u_1) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \\
 w_3(u_2) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\}; \\
 w_3(u_3) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_1\{u_3\} = \emptyset \\
 w_3(u_4) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 w_3(u_5) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 w_3(u_6) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_1\{u_6\} = \emptyset; \\
 w_3(u_7) &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Множество квалиразрезов 4-го уровня (яруса):

$$\begin{aligned}
 w_4(u_1) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_2\{u_1\} = \emptyset; \\
 w_4(u_2) &= \theta(\{u_1, u_2, u_3\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_1, u_2, u_3\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} \oplus \{u_3, u_6\} = \{u_4, u_5, u_6\} = w_2\{u_1\} = \emptyset; \\
 w_4(u_3) &= \emptyset; \\
 w_4(u_4) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_2\{u_4\} = \emptyset; \\
 w_4(u_5) &= \theta(\{u_4, u_5, u_6\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
 &= \{u_4, u_5, u_6\} \oplus \{u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_2, u_5, u_7\} = \{u_1, u_2, u_3\} = w_2\{u_5\} = \emptyset; \\
 w_4(u_6) &= \emptyset; \\
 w_4(u_7) &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета спектра реберных разрезов по уровням можно свести в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты расчета спектра реберных разрезов по уровням

	0 уровень	1 уровень	2 уровень	3 уровень	4 уровень
для ребра u_1	$\{u_2, u_3, u_4, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$
для ребра u_2	$\{u_1, u_3, u_5, u_7\}$	$\{u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$
для ребра u_3	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$	\emptyset
для ребра u_4	$\{u_1, u_5, u_6, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$
для ребра u_5	$\{u_2, u_4, u_6, u_7\}$	$\{u_1, u_2, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$
для ребра u_6	$\{u_2, u_4, u_6, u_7\}$	$\{u_4, u_5, u_6\}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	$\{u_4, u_5, u_6\} = \emptyset$	\emptyset
для ребра u_7	$\{u_1, u_2, u_4, u_5\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Если все квалиразрезы суть пустые суграфы либо квалиразрезы начинают повторяться, то дальнейшее порождения ярусных квалиразрезов прекращается.

Порождение ярусных квалиразрезов можно представить в виде следующей цепочки преобразований:

$$W \rightarrow F_1\{W\} \rightarrow F_2\{W\} \rightarrow F_3\{W\} \rightarrow F_4\{W\} \rightarrow \emptyset.$$

Цепочку преобразования разрезов для каждого ребра можно представить в виде:

$$w_1 = s_1 \oplus s_3 \rightarrow s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_2 = s_1 \oplus s_4 \rightarrow s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_3 = s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset \rightarrow \emptyset;$$

$$w_4 = s_2 \oplus s_3 \rightarrow s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_5 = s_2 \oplus s_4 \rightarrow s_1 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset;$$

$$w_6 = s_2 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \rightarrow s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 = \emptyset \rightarrow \emptyset;$$

$$w_7 = s_3 \oplus s_4 \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \emptyset.$$

ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА

Пример 3. При распознавании изоморфизма сильно регулярные графы, имеющие одинаковые параметры, могут различаться мощностью множеств изометрических циклов и другими количественными параметрами. Например, два сильно регулярных графа с названиями Lattice graph и Shrikhande graph с параметрами $\text{srg}(16,6,2,2)$ обладают мощностью множеств изометрических циклов $\text{card}(C_\tau(G_1)) = 68$ и $\text{card}(C_\tau(G_2)) = 44$.

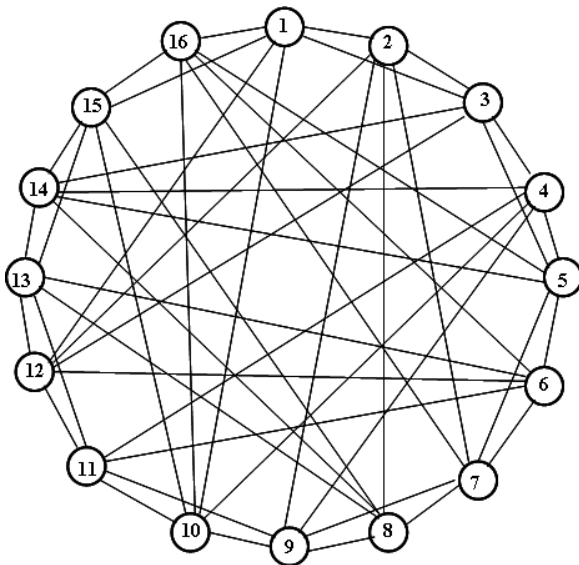


Рис. 5. Сильно регулярный граф G_1 (lattice graph) с параметрами $\text{srg}(16,6,2,2)$

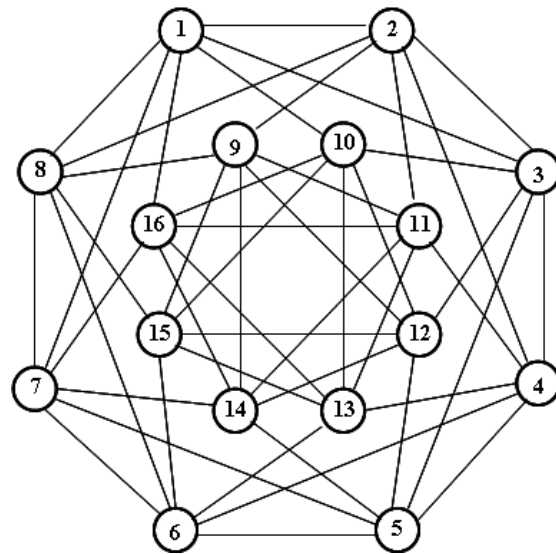


Рис. 6. Сильно регулярный граф G_2 (shrikhande graph) с параметрами $\text{srg}(16,6,2,2)$

Множество изометрических циклов для графа G_1 (lattice graph) на рис. 5.

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_7\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3\};$$

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_{10}, u_{37}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_9, x_{10}\};$$

$$c_3 = \{u_1, u_4, u_{11}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_{12}\};$$

$$c_4 = \{u_1, u_5, u_9, u_{36}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_8, x_{15}\};$$

$$c_5 = \{u_1, u_6, u_8, u_{32}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_7, x_{16}\};$$

$$c_6 = \{u_2, u_3, u_{12}, u_{18}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_4, x_{10}\};$$

$$c_7 = \{u_2, u_4, u_{14}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{12}\};$$

$$c_8 = \{u_2, u_5, u_{15}, u_{47}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{14}, x_{15}\};$$

$$c_9 = \{u_2, u_6, u_{13}, u_{24}\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_5, x_{16}\};$$

$$c_{10} = \{u_3, u_4, u_{39}, u_{42}\} \rightarrow \{x_1, x_{10}, x_{11}, x_{12}\};$$

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \{u_3, u_5, u_{40}\} \rightarrow \{X_1, X_{10}, X_{15}\}; & c_{12} &= \{u_3, u_6, u_{41}\} \rightarrow \{X_1, X_{10}, X_{16}\}; \\
 c_{13} &= \{u_4, u_5, u_{44}, u_{46}\} \rightarrow \{X_1, X_{12}, X_{13}, X_{15}\}; & c_{14} &= \{u_4, u_6, u_{27}, u_{29}\} \rightarrow \{X_1, X_6, X_{12}, X_{16}\}; \\
 c_{15} &= \{u_5, u_6, u_{48}\} \rightarrow \{X_1, X_{15}, X_{16}\}; & c_{16} &= \{u_7, u_8, u_{13}, u_{22}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_5, X_7\}; \\
 c_{17} &= \{u_7, u_9, u_{15}, u_{35}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_8, X_{14}\}; & c_{18} &= \{u_7, u_{10}, u_{12}, u_{17}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_3, X_9\}; \\
 c_{19} &= \{u_7, u_{11}, u_{14}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_{12}\}; & c_{20} &= \{u_8, u_9, u_{30}\} \rightarrow \{X_2, X_7, X_8\}; \\
 c_{21} &= \{u_8, u_{10}, u_{31}\} \rightarrow \{X_2, X_7, X_9\}; & c_{22} &= \{u_8, u_{11}, u_{25}, u_{27}\} \rightarrow \{X_2, X_6, X_7, X_{12}\}; \\
 c_{23} &= \{u_9, u_{10}, u_{33}\} \rightarrow \{X_2, X_8, X_9\}; & c_{24} &= \{u_9, u_{11}, u_{34}, u_{44}\} \rightarrow \{X_2, X_8, X_{12}, X_{13}\}; \\
 c_{25} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{38}, u_{42}\} \rightarrow \{X_2, X_9, X_{11}, X_{12}\}; & c_{26} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{16}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_5\}; \\
 c_{27} &= \{u_{12}, u_{14}, u_{19}, u_{42}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_{11}, X_{12}\}; & c_{28} &= \{u_{12}, u_{15}, u_{20}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_{14}\}; \\
 c_{29} &= \{u_{13}, u_{14}, u_{21}, u_{27}\} \rightarrow \{X_3, X_5, X_6, X_{12}\}; & c_{30} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{23}\} \rightarrow \{X_3, X_5, X_{14}\}; \\
 c_{31} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{44}, u_{45}\} \rightarrow \{X_3, X_{12}, X_{13}, X_{14}\}; & c_{32} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{22}, u_{31}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_7, X_9\}; \\
 c_{33} &= \{u_{16}, u_{18}, u_{24}, u_{41}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_{10}, X_{16}\}; & c_{34} &= \{u_{16}, u_{19}, u_{21}, u_{26}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_6, X_{11}\}; \\
 c_{35} &= \{u_{16}, u_{20}, u_{23}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_{14}\}; & c_{36} &= \{u_{17}, u_{18}, u_{37}\} \rightarrow \{X_4, X_9, X_{10}\}; \\
 c_{37} &= \{u_{17}, u_{19}, u_{38}\} \rightarrow \{X_4, X_9, X_{11}\}; & c_{38} &= \{u_{17}, u_{20}, u_{33}, u_{35}\} \rightarrow \{X_4, X_8, X_9, X_{14}\}; \\
 c_{39} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{39}\} \rightarrow \{X_4, X_{10}, X_{11}\}; & c_{40} &= \{u_{18}, u_{20}, u_{40}, u_{47}\} \rightarrow \{X_4, X_{10}, X_{14}, X_{15}\}; \\
 c_{41} &= \{u_{19}, u_{20}, u_{43}, u_{45}\} \rightarrow \{X_4, X_{11}, X_{13}, X_{14}\}; & c_{42} &= \{u_{21}, u_{22}, u_{25}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_7\}; \\
 c_{43} &= \{u_{21}, u_{23}, u_{28}, u_{45}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_{13}, X_{14}\}; & c_{44} &= \{u_{21}, u_{24}, u_{29}\} \rightarrow \{X_5, X_5, X_{16}\}; \\
 c_{45} &= \{u_{22}, u_{23}, u_{30}, u_{35}\} \rightarrow \{X_5, X_7, X_8, X_{14}\}; & c_{46} &= \{u_{22}, u_{24}, u_{32}\} \rightarrow \{X_5, X_7, X_{16}\}; \\
 c_{47} &= \{u_{23}, u_{24}, u_{47}, u_{48}\} \rightarrow \{X_5, X_{14}, X_{15}, X_{16}\}; & c_{48} &= \{u_{25}, u_{26}, u_{31}, u_{38}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_9, X_{11}\}; \\
 c_{49} &= \{u_{25}, u_{28}, u_{30}, u_{34}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_8, X_{13}\}; & c_{50} &= \{u_{25}, u_{29}, u_{32}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_{16}\}; \\
 c_{51} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{42}\} \rightarrow \{X_6, X_{11}, X_{12}\}; & c_{52} &= \{u_{26}, u_{28}, u_{43}\} \rightarrow \{X_6, X_{11}, X_{13}\}; \\
 c_{53} &= \{u_{26}, u_{29}, u_{39}, u_{41}\} \rightarrow \{X_6, X_{10}, X_{11}, X_{16}\}; & c_{54} &= \{u_{27}, u_{28}, u_{44}\} \rightarrow \{X_6, X_{12}, X_{13}\}; \\
 c_{55} &= \{u_{28}, u_{29}, u_{46}, u_{48}\} \rightarrow \{X_6, X_{13}, X_{15}, X_{16}\}; & c_{56} &= \{u_{30}, u_{31}, u_{33}\} \rightarrow \{X_7, X_8, X_9\}; \\
 c_{57} &= \{u_{30}, u_{32}, u_{36}, u_{48}\} \rightarrow \{X_7, X_8, X_{15}, X_{16}\}; & c_{58} &= \{u_{31}, u_{32}, u_{37}, u_{41}\} \rightarrow \{X_7, X_9, X_{10}, X_{16}\}; \\
 c_{59} &= \{u_{33}, u_{34}, u_{38}, u_{43}\} \rightarrow \{X_8, X_9, X_{11}, X_{13}\}; & c_{60} &= \{u_{33}, u_{36}, u_{37}, u_{40}\} \rightarrow \{X_8, X_9, X_{10}, X_{15}\}; \\
 c_{61} &= \{u_{34}, u_{35}, u_{45}\} \rightarrow \{X_8, X_{13}, X_{14}\}; & c_{62} &= \{u_{34}, u_{36}, u_{46}\} \rightarrow \{X_8, X_{13}, X_{15}\}; \\
 c_{63} &= \{u_{35}, u_{36}, u_{47}\} \rightarrow \{X_8, X_{14}, X_{15}\}; & c_{64} &= \{u_{37}, u_{38}, u_{39}\} \rightarrow \{X_8, X_{10}, X_{11}\}; \\
 c_{65} &= \{u_{39}, u_{40}, u_{43}, u_{46}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{11}, X_{13}, X_{15}\}; & c_{66} &= \{u_{40}, u_{41}, u_{48}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{15}, X_{16}\}; \\
 c_{67} &= \{u_{42}, u_{43}, u_{44}\} \rightarrow \{X_{11}, X_{12}, X_{13}\}; & c_{68} &= \{u_{45}, u_{45}, u_{47}\} \rightarrow \{X_{13}, X_{14}, X_{15}\}.
 \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов для графа G_2 (shrikhande) на рис. 6.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_2, u_7\} \rightarrow \{X_1, X_2, X_3\}; & c_2 &= \{u_1, u_4, u_9\} \rightarrow \{X_1, X_2, X_8\}; \\
 c_3 &= \{u_1, u_6, u_{11}, u_{43}\} \rightarrow \{X_1, X_2, X_{11}, X_{16}\}; & c_4 &= \{u_2, u_3, u_{13}, u_{21}\} \rightarrow \{X_1, X_3, X_5, X_7\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_5, u_{14}\} \rightarrow \{X_1, X_3, X_{10}\}; & c_6 &= \{u_3, u_4, u_{28}\} \rightarrow \{X_1, X_7, X_8\}; \\
 c_7 &= \{u_3, u_6, u_{30}\} \rightarrow \{X_1, X_7, X_{16}\}; & c_8 &= \{u_4, u_5, u_{32}, u_{39}\} \rightarrow \{X_1, X_8, X_{10}, X_{15}\}; \\
 c_9 &= \{u_5, u_6, u_{40}\} \rightarrow \{X_1, X_{10}, X_{16}\}; & c_{10} &= \{u_7, u_8, u_{12}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_4\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \{u_7, u_{10}, u_{15}, u_{34}\} \rightarrow \{X_2, X_3, X_9, X_{12}\}; & C_{12} &= \{u_8, u_9, u_{17}, u_{25}\} \rightarrow \{X_2, X_4, X_6, X_8\}; \\
C_{13} &= \{u_8, u_{11}, u_{18}\} \rightarrow \{X_2, X_4, X_{11}\}; & C_{14} &= \{u_9, u_{10}, u_{31}\} \rightarrow \{X_2, X_8, X_9\}; \\
C_{15} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{33}\} \rightarrow \{X_2, X_9, X_{11}\}; & C_{16} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{16}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_5\}; \\
C_{17} &= \{u_{12}, u_{14}, u_{19}, u_{38}\} \rightarrow \{X_3, X_4, X_{10}, X_{13}\}; & C_{18} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{22}\} \rightarrow \{X_3, X_5, X_{12}\}; \\
C_{19} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{37}\} \rightarrow \{X_3, X_{10}, X_{12}\}; & C_{20} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{20}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_6\}; \\
C_{21} &= \{u_{16}, u_{18}, u_{23}, u_{42}\} \rightarrow \{X_4, X_5, X_{11}, X_{14}\}; & C_{22} &= \{u_{17}, u_{19}, u_{26}\} \rightarrow \{X_4, X_6, X_{13}\}; \\
C_{23} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{41}\} \rightarrow \{X_4, X_{11}, X_{13}\}; & C_{24} &= \{u_{20}, u_{21}, u_{24}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_7\}; \\
C_{25} &= \{u_{20}, u_{22}, u_{27}, u_{45}\} \rightarrow \{X_5, X_6, X_{12}, X_{15}\}; & C_{26} &= \{u_{21}, u_{23}, u_{29}\} \rightarrow \{X_5, X_7, X_{14}\}; \\
C_{27} &= \{u_{22}, u_{23}, u_{44}\} \rightarrow \{X_5, X_{12}, X_{14}\}; & C_{28} &= \{u_{24}, u_{25}, u_{28}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_8\}; \\
C_{29} &= \{u_{24}, u_{26}, u_{30}, u_{47}\} \rightarrow \{X_6, X_7, X_{13}, X_{16}\}; & C_{30} &= \{u_{25}, u_{27}, u_{32}\} \rightarrow \{X_6, X_8, X_{15}\}; \\
C_{31} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{46}\} \rightarrow \{X_6, X_{13}, X_{15}\}; & C_{32} &= \{u_{28}, u_{29}, u_{31}, u_{35}\} \rightarrow \{X_7, X_8, X_9, X_{14}\}; \\
C_{33} &= \{u_{29}, u_{30}, u_{48}\} \rightarrow \{X_7, X_{14}, X_{16}\}; & C_{34} &= \{u_{31}, u_{32}, u_{36}\} \rightarrow \{X_8, X_9, X_{15}\}; \\
C_{35} &= \{u_{33}, u_{35}, u_{42}\} \rightarrow \{X_9, X_{11}, X_{14}\}; & C_{36} &= \{u_{33}, u_{36}, u_{41}, u_{46}\} \rightarrow \{X_9, X_{11}, X_{13}, X_{15}\}; \\
C_{37} &= \{u_{34}, u_{35}, u_{44}\} \rightarrow \{X_9, X_{12}, X_{14}\}; & C_{38} &= \{u_{34}, u_{36}, u_{45}\} \rightarrow \{X_9, X_{12}, X_{15}\}; \\
C_{39} &= \{u_{37}, u_{39}, u_{45}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{12}, X_{15}\}; & C_{40} &= \{u_{37}, u_{40}, u_{44}, u_{48}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{12}, X_{14}, X_{16}\}; \\
C_{41} &= \{u_{38}, u_{39}, u_{46}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{13}, X_{15}\}; & C_{42} &= \{u_{38}, u_{40}, u_{47}\} \rightarrow \{X_{10}, X_{13}, X_{16}\}; \\
C_{43} &= \{u_{41}, u_{43}, u_{47}\} \rightarrow \{X_{11}, X_{13}, X_{16}\}; & C_{44} &= \{u_{42}, u_{43}, u_{48}\} \rightarrow \{X_{11}, X_{13}, X_{16}\}.
\end{aligned}$$

Как видно, мощности множеств изометрических циклов для графа G_1 и G_2 не совпадают. Следовательно, графы G_1 и G_2 не изоморфны.

Пример 4. Для распознавания изоморфизма рассмотрим два графа, заданные матрицами смежностей (см. рис.7 и рис.8). Множество центральных разрезов и изометрических циклов для графов G_3 и G_4 представлено ниже:

Центральные разрезы графа G_3 :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; \\
S_2 &= \{u_1, u_4, u_5\}; \\
S_3 &= \{u_2, u_4, u_6\}; \\
S_4 &= \{u_5, u_6, u_7, u_8\}; \\
S_5 &= \{u_3, u_7, u_9\}; \\
S_6 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\
S_7 &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\
S_8 &= \{u_{11}, u_{14}, u_{15}\}; \\
S_9 &= \{u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; \\
S_{10} &= \{u_{13}, u_{15}, u_{16}\}.
\end{aligned}$$

Изометрические циклы графа G_3 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{u_1, u_2, u_4\}; \\
C_2 &= \{u_1, u_3, u_5, u_7\}; \\
C_3 &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\};
\end{aligned}$$

Центральные разрезы графа G_4 :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{u_1, u_2, u_3\}; \\
S_2 &= \{u_1, u_4, u_5\}; \\
S_3 &= \{u_2, u_4, u_6\}; \\
S_4 &= \{u_5, u_6, u_7, u_8\}; \\
S_5 &= \{u_3, u_7, u_9\}; \\
S_6 &= \{u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\
S_7 &= \{u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}\}; \\
S_8 &= \{u_{12}, u_{14}, u_{15}\}; \\
S_9 &= \{u_{13}, u_{14}, u_{16}\}; \\
S_{10} &= \{u_{11}, u_{15}, u_{16}\}.
\end{aligned}$$

Изометрические циклы графа G_4 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{u_1, u_2, u_4\}; \\
C_2 &= \{u_1, u_3, u_5, u_7\}; \\
C_3 &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 c_5 &= \{u_7, u_8, u_9, u_{10}\}; \\
 c_6 &= \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{15}\}; \\
 c_7 &= \{u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}\}; \\
 c_8 &= \{u_{11}, u_{12}, u_{14}\}; \\
 c_9 &= \{u_{14}, u_{15}, u_{16}\}.
 \end{aligned}$$

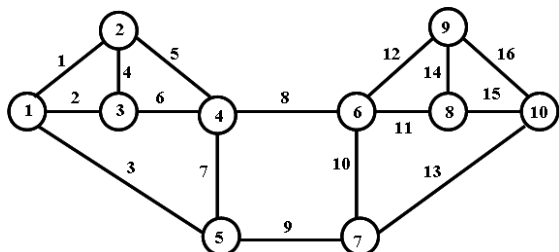


Рис. 7. Граф G_3

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \{u_4, u_5, u_6\}; \\
 c_5 &= \{u_7, u_8, u_9, u_{10}\}; \\
 c_6 &= \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{15}\}; \\
 c_7 &= \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{16}\}; \\
 c_8 &= \{u_{12}, u_{13}, u_{14}\}; \\
 c_9 &= \{u_{14}, u_{15}, u_{16}\}.
 \end{aligned}$$

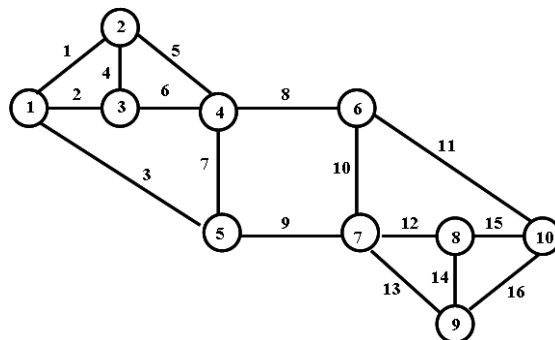


Рис. 8. Граф G_4

В данном случае, применение таких инвариантов графа, как вектор центральных разрезов и вектора изометрических циклов, для определения изоморфизма графов, не позволяет получить однозначный ответ. Для получения однозначного ответа построим реберные разрезы графов.

0 ярус

Реберные разрезы 0-го яруса графа G_3 :

$$\begin{aligned}
 w(u_1) &= s_1 \oplus s_2 = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}; \\
 w(u_2) &= s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}; \\
 w(u_3) &= s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_7, u_9\}; \\
 w(u_4) &= s_2 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\
 w(u_5) &= s_2 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_8\}; \\
 w(u_6) &= s_3 \oplus s_4 = \{u_2, u_4, u_5, u_7, u_8\}; \\
 w(u_7) &= s_4 \oplus s_5 = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\
 w(u_8) &= s_4 \oplus s_6 = \{u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\
 w(u_9) &= s_5 \oplus s_7 = \{u_3, u_7, u_{10}, u_{13}\}; \\
 w(u_{10}) &= s_6 \oplus s_7 = \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\
 w(u_{11}) &= s_6 \oplus s_8 = \{u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{15}\}; \\
 w(u_{12}) &= s_6 \oplus s_9 = \{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{16}\}; \\
 w(u_{13}) &= s_7 \oplus s_{10} = \{u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\
 w(u_{14}) &= s_8 \oplus s_9 = \{u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\
 w(u_{15}) &= s_8 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\}; \\
 w(u_{16}) &= s_9 \oplus s_{10} = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}.
 \end{aligned}$$

Реберные разрезы 0-го яруса графа G_4 :

$$\begin{aligned}
 w(u_1) &= s_1 \oplus s_2 = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}; \\
 w(u_2) &= s_1 \oplus s_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}; \\
 w(u_3) &= s_1 \oplus s_5 = \{u_1, u_2, u_7, u_9\}; \\
 w(u_4) &= s_2 \oplus s_3 = \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\
 w(u_5) &= s_2 \oplus s_4 = \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_8\}; \\
 w(u_6) &= s_3 \oplus s_4 = \{u_2, u_4, u_5, u_7, u_8\}; \\
 w(u_7) &= s_4 \oplus s_5 = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\
 w(u_8) &= s_4 \oplus s_6 = \{u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}\}; \\
 w(u_9) &= s_5 \oplus s_7 = \{u_3, u_7, u_{10}, u_{12}, u_{13}\}; \\
 w(u_{10}) &= s_6 \oplus s_7 = \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\
 w(u_{11}) &= s_6 \oplus s_{10} = \{u_8, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\
 w(u_{12}) &= s_7 \oplus s_8 = \{u_9, u_{10}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}; \\
 w(u_{13}) &= s_7 \oplus s_9 = \{u_9, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; \\
 w(u_{14}) &= s_8 \oplus s_9 = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\
 w(u_{15}) &= s_8 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; \\
 w(u_{16}) &= s_9 \oplus s_{10} = \{u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}.
 \end{aligned}$$

1 ярус

Реберные разрезы 1-го яруса графа G_3 :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\w(u_6) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}; \\w(u_7) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \{u_1, u_2, u_3, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

Реберные разрезы 1-го яруса графа G_4 :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_6) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_7) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_3, u_7, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

2 ярус

Разрезы 2-го яруса графа G_3 :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_6) &= \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_7) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_8) &= \emptyset; \\w(u_9) &= \emptyset; \\w(u_{10}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\}.\end{aligned}$$

Разрезы 2-го яруса графа G_4 :

$$\begin{aligned}w(u_1) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_2) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\w(u_3) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_4) &= \emptyset; \\w(u_5) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_6) &= \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_7) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\w(u_8) &= \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_9) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6\}; \\w(u_{10}) &= \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{11}) &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}; \\w(u_{12}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{13}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{14}) &= \emptyset; \\w(u_{15}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}; \\w(u_{16}) &= \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_{10}, u_{11}\}.\end{aligned}$$

3 ярус

Реберные разрезы 3-го яруса графа G_3 :

- $w(u_1) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_2) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_3) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_7) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{11}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{12}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\}.$

Реберные разрезы 3-го яруса графа G_4 :

- $w(u_1) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_2) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_3) = \emptyset;$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_5, u_6\};$
- $w(u_7) = \emptyset;$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \emptyset;$
- $w(u_{11}) = \emptyset;$
- $w(u_{12}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}\}.$

4 ярус

Реберные разрезы 4-го яруса графа G_3 :

- $w(u_1) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_2) = \{u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_3) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_6) = \{u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{13}\};$
- $w(u_7) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{11}) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{12}) = \{u_3, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{13}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $w(u_{16}) = \{u_3, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$

Реберные разрезы 4-го яруса графа G_4 :

- $w(u_1) = \emptyset;$
- $w(u_2) = \emptyset;$
- $w(u_3) = \emptyset;$
- $w(u_4) = \emptyset;$
- $w(u_5) = \emptyset;$
- $w(u_6) = \emptyset;$
- $w(u_7) = \emptyset;$
- $w(u_8) = \emptyset;$
- $w(u_9) = \emptyset;$
- $w(u_{10}) = \emptyset;$
- $w(u_{11}) = \emptyset;$
- $w(u_{12}) = \emptyset;$
- $w(u_{13}) = \emptyset;$
- $w(u_{14}) = \emptyset;$
- $w(u_{15}) = \emptyset;$
- $w(u_{16}) = \emptyset.$

5 и 6 ярусы графа G_3 Реберные разрезы 5-го яруса графа G_3 :

$$w(u_1) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_2) = \{u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_3) = \emptyset;$$

$$w(u_4) = \emptyset;$$

$$w(u_5) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_6) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_7) = \emptyset;$$

$$w(u_8) = \emptyset;$$

$$w(u_9) = \emptyset;$$

$$w(u_{10}) = \emptyset;$$

$$w(u_{11}) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{12}) = \{u_1, u_2, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}\};$$

$$w(u_{13}) = \emptyset;$$

$$w(u_{14}) = \emptyset;$$

$$w(u_{15}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$w(u_{16}) = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$$

Реберные разрезы 6-го яруса графа G_3 :

$$w(u_1) = \emptyset;$$

$$w(u_2) = \emptyset;$$

$$w(u_3) = \emptyset;$$

$$w(u_4) = \emptyset;$$

$$w(u_5) = \emptyset;$$

$$w(u_6) = \emptyset;$$

$$w(u_7) = \emptyset;$$

$$w(u_8) = \emptyset;$$

$$w(u_9) = \emptyset;$$

$$w(u_{10}) = \emptyset;$$

$$w(u_{11}) = \emptyset;$$

$$w(u_{12}) = \emptyset;$$

$$w(u_{13}) = \emptyset;$$

$$w(u_{14}) = \emptyset;$$

$$w(u_{15}) = \emptyset;$$

$$w(u_{16}) = \emptyset.$$

Как видно из приведенного выше, спектр реберных разрезов для графа G_4 состоит из трех уровней, а спектр разрезов графа G_3 состоит из пяти уровней. Поэтому можно сразу предположить, что данные графы не изоморфны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы описания и построения реберного разреза графа, являющегося одной из основополагающих структур графа. На основании понятия реберного разреза и операции порождения строится спектр реберных разрезов, характеризующийся множеством ребер определенного уровня. Показано, что спектр реберных разрезов графа может быть применен для задачи распознавания изоморфизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. Москва: Наука, 1990. 384 с.
2. Зыков А. А. Основы теории графов. Москва: Наука, 1987. 384с.
3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва: Мир, 1984. 455 с.
4. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 300 с.

REFERENCES

1. Emelichev, V. A., Melnikov, O. I., Sarvanov, V. I. & Tyshkevich, R. I. (1990). Lectures on graph theory. Moscow: Nauka.
2. Zykov, A. A. (1987). Fundamentals of graph theory. Moscow: Nauka.
3. Svami, M. & Tkulasiraman, K. (1984). Graphs, networks and algorithms. Moscow: Mir.
4. Kharari, F. (1973). Graph theory. Moscow: Mir.