ВЫВОДЫ

При нахождении матрицы фундаментальных решений было применено преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста по обеим переменным. В процессе исследования возникла необходимость решения алгебраического уравнения шестой степени с действительными коэффициентами. Это уравнение может иметь три варианта корней. Предполагая, что его решение найдено, было получено решение исходной задачи в изображениях Фурье. При нахождении обратного преобразования по одной из переменных применялось обычное обратное преобразование Фурье. Для получения обратного преобразования по другой переменной потребовалась регуляризация полученных обобщенных функций. Получено точное решение поставленной задачи. Это решение выражено в замкнутом виде через элементарные функции, что позволяет эффективно его использовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций: Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
3. Левада В. С. К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения эллиптического дифференциального оператора. Запорожье, 1987. Деп. в Укр. НИИНТИ, № 706. Ук-87.

REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of coupled fields in structural elements: Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka.
2. Parton, V. Z. & Kudryavtsev, B. A. (1988). Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. Moskow: Nauka.
3. Levada, V. S. (1987). To the application of the Fourier transform for constructing a fundamental solution of an elliptic differential operator. Manuscript. Zaporozhye. Dep. in the NIINTI, no. 706, Uk-87.

УДК 519.71

ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В работе осуществляется анализ и определение программных управлений движением отдельного класса сложных динамических систем, поведение которых описывается разомкнутыми непрерывными математическими моделями с ограничениями, обеспечивающими получение неотрицательных решений на бесконечном интервале времени. Для исследуемых систем решена обратная задача динамики и получены программные управления движением систем, определяющие желаемые состояния объекта. По результатам исследования проведен вычислительный эксперимент, результаты которого соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований.

Ключевые слова: программное управление, позитивная динамическая система балансового типа, позитивные переменные, разомкнутая непрерывная динамическая модель, векторно-матричное дифференциальное уравнение, продуктивность матрицы, асимптотическая устойчивость решений.

ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ РУХОМ ОКРЕМОГО КЛАСУ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДОК

Леонтьєва В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондрат’єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У роботі здійснюється аналіз і визначення програмних керувань рухом окремого класу складних динамічних систем, поведінка яких описується розімкненими неперервними математичними моделями з обмеженнями, що забезпечують отримання невід'ємних розв'язків на нескінченному інтервалі часу. Для досліджуваних систем розв'язана зворотна задача динаміки і отримані програмні керування рухом систем, що визначають бажані стани об'єкта. За результатами дослідження проведено обчислювальний експеримент, результати якого відповідають результатам проведених у роботі теоретичних досліджень.

Ключові слова: програмне керування, позитивна динамічна система балансового типу, позитивні змінні, розімкнена неперервна динамічна модель, векторно-матричне диференціальне рівняння, продуктивність матриці, асимптотична стійкість розв'язків.

PROGRAM CONTROL OF THE MOVEMENT OF A CERTAIN CLASS OF COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS. CONTINUOUS CASE

Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Kondratieva N. A., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

This article is devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of the construction the program controls by the movement of a complex dynamical system, the behavior of which is described by opened continuous mathematical model with certain constraints that ensure the obtaining of non-negative and asymptotically stable (by Lyapunov) solutions on an infinite intervals of time. The research for this type of complex systems is aimed at solving the inverse problem of dynamics in order to identify a range of possible program control actions on the investigated system which could provide this system with achieving its desired state.

The problem is formulated as follows. Let the movement of a complex controlled dynamical system obey a vector-matrix differential equation. In the state space, a certain (desired) trajectory of the movement of the investigated system is given. It is necessary to find such program controls that allow the movement of the system exactly or approximately took place along a given trajectory. The problem of this type in the formulation and procedure of solving is the inverse problem of dynamics. In contrast to the classical formulation of the inverse control problem, the particularity of the posed problem is the necessity of preserving the positivity property of variables, the asymptotical stability of the obtained solutions, and the complete controllability of the investigated control system.

In this formulation we propose the methodology of controlling the motion of the studied system that is based on the concept of the inverse problem of dynamics and allows, firstly, to investigate unknown and inaccessible (using direct mathematical modeling) properties of a control object, and secondly, to carry out the construction of a program trajectory (that takes the control system from a given initial position to a prescribed (desired) final position) and the construction of the program control that implements it, and, thirdly, to synthesize a control algorithm that ensures the preservation of the desired properties and the achievement of the required characteristics of a complex dynamic system under investigation. The proposed methodology allows to systematize the main stages, methods and approaches for obtaining an effective algorithm for the complex investigation and regulation of a complex positive dynamical system in terms of its functioning along an open-loop contour with given desired states (trajectories) of the system.

According to the proposed approach, the object was analyzed for the possibility of constructing program controls of the movement of the complex dynamical system, that resulted in solving the problem of implementing the assigned trajectory of movement and constructing program controls leading out the system to the desired trajectory.

In order to carrying out a more detailed analysis of the conducted research and approbation of the proposed methodology for solving inverse problems of the dynamics of positive systems, a computational experiment determining program controls of the movement of the complex dynamical system with three subsystems was performed. The results of the computational experiment correspond to the results of the theoretical researches carried out in this work, and the proposed approach for determining the vector-function of program controls can be used in the practice of modeling of complex positive dynamical systems of various physical nature.

Key words: program control, positive dynamic system of balanced type, positive variables, opened continuous dynamical model, vector-matrix differential equation, productivity of matrix, asymptotic stability of solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам исследования и разработки методов исследования сложных динамических систем управления, имеющих в своей структуре *n* конечных взаимосвязанных между собой элементов, в последнее время уделяется все большее внимание [1-10]. Причем особую актуальность данная проблема приобретает в тех случаях, когда характеристики исследуемых систем изменяются во времени под влиянием управлений и при этом не всегда возможно определить вид управления, поступающего на вход исследуемого объекта, обеспечивающий получение желаемого (в соответствии с поставленной целью) состояния выхода объекта управления и регулирования [1-7, 9].

Кроме того, необходимость в управлении и регулировании таких систем возникает при отсутствии возможности корректировать входные параметры моделей, описывающих поведение сложных систем, стабилизировать неустойчивые системы, улучшать динамические свойства систем и др., то есть в случаях, когда нужно изменить исследуемый процесс таким образом, чтобы характеризующие его показатели удовлетворяли определенным требованиям. При этом часто возникает задача, когда необходимо определить такое управление, которое бы позволило осуществить движение исследуемых систем управления по заранее заданному закону с сохранением требуемых свойств. Одним из подходов, позволяющих реализовать подобное управление, является подход к определению программного управления, основная идея которого основана на концепции обратных задач динамики, исторически возникших в рамках теоретической механики и применяющихся для вычисления сил, действующих на объект, по известной траектории его движения [1, 4, 5, 7].

При этом в процессе решения задачи управления для объекта $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in R^n, u \in R^m$ стандартная схема концепции обратной задачи динамики реализуется в следующем виде: осуществляется формирование эталонной траектории $x = x^*(t)$ движения объекта и определяются управления, реализующее данные траектории.

Именно в такой постановке в работе предлагается сформулировать методику управления движением исследуемой системы, базирующуюся на концепции обратных задач динамики и позволяющую, во-первых, исследовать неизвестные и недоступные при использовании прямого моделирования свойства объекта управления, во-вторых, осуществить построение программной траектории, переводящей исследуемую систему управления из заданного начального положения в предписанное (желаемое) конечное положение и реализующего ее программного управления, и, в-третьих, синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий работу системы управления с сохранением заданных свойств и достижением требуемых характеристик исследуемой сложной динамической системы.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является построение и анализ программных управлений в разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа, которые выводят систему на желаемую траекторию движения.

Задачей исследования является решение обратной задачи динамики с использованием методов теории программного управления с целью определения вектор-функции управления, задающей программу движения объекта исследования, а также разработка методики определения программных управлений, поступающих на вход объекта управления и обеспечивающих осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону с целью систематизации основных этапов, методов и подходов к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

Для достижения сформулированной цели были поставлены следующие задачи:

а) провести анализ исследуемого объекта на предмет возможности осуществления программного управления его движением;

б) установить задающие воздействия исследуемой системы управления, определяющие желаемые состояния объекта исследования;

в) получить ограничения на задающие воздействия исследуемой системы управления, обеспечивающие сохранение позитивности и полной управляемости объекта исследования, а также обеспечивающие получение асимптотически устойчивых решений по модели, описывающей его поведение;

г) определить функции программного управления движением исследуемого класса сложных систем;

д) провести анализ полученных программных управлений и сформулировать выводы по результатам проведенного исследования;

е) разработать общую методику определения программных управлений, обеспечивающих движение исследуемого объекта по заранее заданному закону.

ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объектом исследования выступает сложная динамическая система, представляющая собой множество взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов и подсистем различной физической природы, составляющих нераздельное целое и обеспечивающих выполнение системой некоторой сложной функции. Особенность объекта исследования состоит в том, что он характеризуется свойством позитивности [11]: любые неотрицательные вход и начальное состояние системы генерируют неотрицательные фазовую траекторию и выход в течение всего времени. Класс таких систем выделен в работах [11-14].

Динамика исследуемой управляемой динамической системы описывается линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов вида [12]

$$\dot{X}(t)=(I-B)^{-1}((A-I)X(t)+C(t)), \tag{1}$$

или

$$\dot{X}=\tilde{A}X(t)+\tilde{B}C(t), \tag{2}$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор состояния системы; $C(t)$ – n-мерный вектор управления системы; A, B, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – постоянные матрицы размерностей $n\times n$; $\tilde{A}=(I-B)^{-1}(A-I)$; $\tilde{B}=(I-B)^{-1}$; $I-$ единичная матрица размерности $n\times n$.

К исследуемой системе и описывающей ее поведение непрерывной математической модели выдвигается *ряд требований, обеспечивающих выполнение заранее заданных свойств*:

1. Обеспечение выполнения свойства позитивности исследуемой системы.

Данные требования выполняются путем наложения определенных ограничений на входные характеристики и матрицы коэффициентов математической модели. Так, на входные характеристики модели накладываются следующие ограничения: $n-$ мерный вектор-столбец начальных состояний системы $X(0)=X_0=\left(X_0^1,X_0^2,\ldots,X_0^n\right)^T\geq 0$; n-мерный вектор управления $C(t)=(C_1(t),C_2(t),\ldots,C_n(t))^T\geq 0$. На матрицы A и B накладываются условия неотрицательности и продуктивности [11, 13], а матрица $(I-B)^{-1}(A-I)\leq 0$ [11, 12]. В случае невыполнения одного из указанных требований необходимо осуществлять модальное управление путем перехода от разомкнутой модели, описывающей поведение исследуемой системы, к замкнутой, вводя в структуру модели обратную связь, обеспечивающую функционирование системы по принципу замкнутого управления.

2. Обеспечение сохранения свойства полной управляемости (по Калману) исследуемой системы с тем, чтобы объект (систему) управления можно было перевести из одного состояния в другое с использованием информации обо всех его переменных состояния.

Согласно [14], объект управления, для которого справедливы ограничения на матрицы A, B и $(I-B)^{-1}(A-I)$ математической модели объекта (см. требование 1), обладает свойствами, удовлетворяющими следующей теореме.

Теорема 1. Пусть линейный стационарный объект управления описывается векторно-матричным уравнением $\dot{X}=\tilde{A}X(t)+\tilde{B}C(t)$, где $X\in R^{n\times 1}$, $C(t)\in R^{n\times 1}$, $\tilde{A}=(I-B)^{-1}(A-I)$, $\tilde{B}=(I-B)^{-1}$. Тогда $rang\left[\tilde{B}\vdots\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\vdots\left(\tilde{A}^2\tilde{B}\right)\vdots\ldots\vdots\left(\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right)\right]_{n\times nn}=n$, если матрица B является продуктивной.

При этом в указанном ранговом условии определяющим является свойство линейной независимости столбцов матрицы $\tilde{B}$, которая с учетом продуктивности матрицы B (см. требование 1) является матрицей полного ранга, и, следовательно, ранг блочной матрицы $\left[\tilde{B}\vdots\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\vdots\left(\tilde{A}^2\tilde{B}\right)\vdots\ldots\vdots\left(\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right)\right]$ совпадает с рангом матрицы $\tilde{B}$.

Таким образом, требование сохранения свойства полной управляемости исследуемой системы выполняется путем наложения условий неотрицательности и продуктивности на матрицу B математической модели объекта.

3. Обеспечение выполнения одного из важнейших принципов проектирования [11, 13], согласно которому система управления должна быть асимптотически устойчивой.

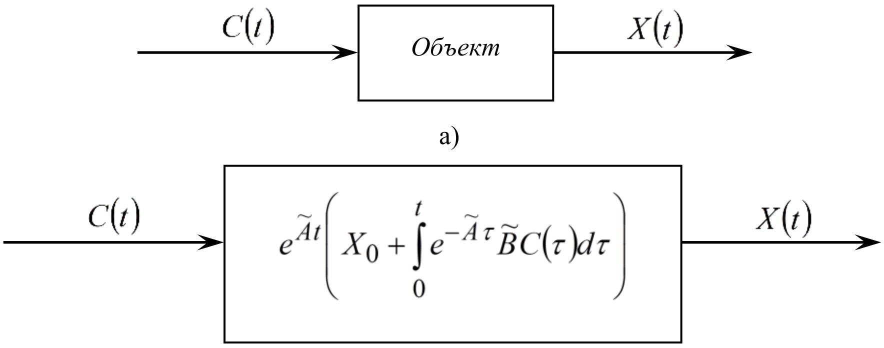
Важность данного принципа определяется тем, что непрерывные системы управления характеризуются такой особенностью, что неустойчивый объект управления может быть стабилизирован с помощью замкнутого управления и не может быть стабилизирован при разомкнутом управлении, что в условиях функционирования исследуемой системы по разомкнутому контуру имеет определяющее значение для проведения исследований.

В данном случае для обеспечения выполнения указанного принципа проектирования матрицы A и B математической модели объекта должны характеризоваться свойствами неотрицательности и продуктивности, а матрица $\tilde{A}$ должна быть неположительной (см. требование 1) при любом виде вектор-функции $D(t)=(I-B)^{-1}C(t)\geq 0$. Кроме того, исходя из того, что продуктивные матрицы A и B входят в класс *M*-матриц [11], выполнение требования 1 является обязательным для обеспечения асимптотической устойчивости (по Ляпунову) математической модели, описываемой уравнением (1) или (2).

Если все перечисленные условия в модели выполняются, то система, описываемая уравнением (1) или (2), является асимптотически устойчивой, а определяемый на выходе модели вектор состояния $X(t)$ исследуемого объекта сходится при $t\to\infty$ к равновесному (стационарному) значению $X^*=(I-A)^{-1}C^0\geq 0$, который отображает максимальные (реально достижимые) возможности объекта при имеющихся исходных данных модели и является решением статической модели, описываемой уравнением $X=AX+C^0$, где $C^0=\left(C_0^1,C_0^2,\ldots,C_0^n\right)^T\geq 0$. Причем, если в наличии $X(0)=X_0$ меньше, то получаемые решения сходятся снизу, а если больше – сверху. Отрицательных решений не будет в силу выполнения условий требования 1.

Исследуемая система, согласно (1), (2), функционирует по принципу разомкнутого управления и, таким образом, является разомкнутой системой управления, то есть системой, которая непосредственно не использует конечные результаты управления объектом. При этом ее особенностью является то, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и в процессе работы никак не корректируется при изменениях характеристик или параметров объекта управления.

Схема функционирования исследуемой динамической системы для разомкнутой модели, описываемой векторно-матричным уравнением (1) или (2), предоставляется на рис. 1, где $C(t)$ – входная характеристика (вход) системы, $X(t)$ – выходная характеристика (выход) системы, $e^{\tilde{A}t}$ – экспоненциальная функция матричного аргумента, τ – параметр интегрирования, имеющий размерность времени.



б)

Рис. 1. Схема функционирования объекта исследования по разомкнутому контуру:
а) кибернетическая модель «черный ящик»; б) кибернетическая модель «белый ящик»

В исходной модели (при рассмотрении прямой задачи динамики), описываемой уравнением (1) или (2), входная характеристика $C(t)$ является либо заданной вектор-функцией, либо функционально установленной в результате использования методов регрессионного анализа данных.

В данной работе будет применен подход, в соответствии с которым указанная вектор-функция будет определена в результате решения обратной задачи динамики (по эмпирическим данным) с использованием методов теории программного управления и задавать, таким образом, программу движения объекта исследования.

Таким образом, *предметом исследования* в работе выступает $n-$мерный вектор управления исследуемой динамической системы управления, поведение которой описывается непрерывной математическою моделью (1) или (2), а также желаемые состояния объекта исследования, определяющие непосредственным образом программные управления движением исследуемого класса сложных систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с поставленной в работе целью исследования сформулируем задачу исследования сложной позитивной динамической системы управления, в случае, когда желаемые состояния (траектории) изучаемой системы являются заданными.

С практической точки зрения такой случай соответствует ситуации, когда исследователь знает, какие результаты он хочет получить, но при этом не знает, как этого добиться. Задача состоит в том, что необходимо найти такую вектор-функцию управления $C(t)$, которая бы реализовывала движение исследуемой системы по назначенной траектории.

Задача этого типа по формулировке и процедуре решения представляет собой обратную задачу динамики и в наиболее полной форме сформулирована Е. А. Барбашиным в монографии [15].

Сформулируем обратную задачу динамики позитивной динамической управляемой системы балансового типа с непрерывным временем.

Пусть движение управляемой системы подчиняется векторно-матричному дифференциальному уравнению (t предполагается непрерывным) вида [12]

$$\dot{X}(t) = (I - B)^{-1}(A - I)X(t) + (I - B)^{-1}C(t), \tag{3}$$

где $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))^T$ – n-мерный вектор состояния системы с непрерывным временем t; $C(t) = (C_1(t), ..., C_n(t))^T$ – n-мерный вектор управления с непрерывным временем t; $A, B -$ заданные матрицы размерностей $n \times n$.

В пространстве состояний задана некоторая (желаемая) траектория движения системы с непрерывным временем вида

$$X^*(t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < T < \infty. \tag{4}$$

Необходимо найти такие управления $C(t)$, при которых движение системы (3) точно или приближенно проходит по траектории $\varphi(t)$.

В отличие от классической постановки задачи обратного управления, особенность поставленной задачи заключается в следующем. Поскольку объектом управления является позитивная динамическая система балансового типа, то для сохранения свойственной ей позитивности входных и выходных характеристик, кроме неотрицательной вектор-функции $X(t)$, начальных условий $X(t_0) = X_0$, где $X_0 = \left(X_0^1, ..., X_0^n\right)^T$, и специального вида (неотрицательного и продуктивного) матриц A, B, должны неотрицательными задаваться и желаемые траектории $\varphi(t)$ движения системы. Таким образом, при $X^*(t) = \varphi(t) \geq 0$ искомая вектор-функция $C(t)$ будет также неотрицательной, а, следовательно, и вся исследуемая система, описываемая векторно-матричным дифференциальным уравнением (3), будет позитивной.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи сформулируем методику определения программных управлений, обеспечивающих движение исследуемого объекта по заранее заданному закону.

Исходными данными при использовании предлагаемой методики является формализованная разомкнутая модель объекта исследования с непрерывным временем, описываемая векторно-матричным дифференциальным уравнением вида (3).

Согласно предлагаемой методике решение поставленной задачи состоит в реализации следующих этапов.

I этап: *Анализ компонентов формализованной модели объекта исследования.*

Данный этап включает в себя:

а) *исследование на неотрицательность входных характеристик модели*, а именно векторов $X(0) = X_0 = \left(X_0^1, X_0^2, \ldots, X_0^n\right)^T$ и $C(t) = (C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t))^T$;

б) *исследование на неотрицательность и продуктивность входных параметров формализованной модели*, а именно матриц коэффициентов модели A, B, а также *исследование на неположительность* матрицы $\tilde{A} = (I - B)^{-1}(A - I)$. Проверка продуктивности матриц осуществляется путем использования необходимых и достаточных условий продуктивности, сформулированных В. В. Леонтьевым и представленных в работах [11, 13].

Выполнение всех указанных ограничений обеспечивает позитивность системы, асимптотическую устойчивость получаемых решений, а также полную управляемость исследуемой системы [14].

II этап: *Выбор вида желаемого состояния объекта исследования и его анализ.*

На данном этапе производится выбор из множества возможных одного или нескольких желаемых состояний $X^*(t)$ объекта исследования в зависимости от цели управления. Более детально виды желаемых состояний объекта, а также степень их влияния на вырабатываемые управляющие воздействия в системе будут рассмотрены в следующем разделе работы.

Кроме того, на данном этапе производится проверка выбранного желаемого состояния $X^*(t)$ объекта на неотрицательность, и, в дальнейшем, в случае его неотрицательности, осуществляется переход к III этапу методики.

III этап: *Определение программных управлений* $C(t)$*, которые бы реализовывали движение исследуемой системы по назначенной на* II *этапе траектории.*

На данном этапе путем применения предлагаемого в работе подхода решается задача определения программных управлений $C(t)$, выводящих систему на желаемую траекторию движения, после чего осуществляется переход к IV этапу.

Остановимся на данном этапе детальнее.

При условии, что поставленная задача имеет точное решение и $X^*(t)=\varphi(t)\geq 0$, искомый вектор управлений $C(t)$ определяется из уравнения

$$(I-B)^{-1}C(t)=\dot{\varphi}(t)-(I-B)^{-1}(A-I)\varphi(t), \tag{5}$$

которое получается путем подстановки выражения для $\varphi(t)$ в векторно-матричное уравнение движения системы (3) вместо $X(t)$.

Таким образом, искомый вектор управлений $C(t)$ имеет вид

$$C(t)=(I-B)\dot{\varphi}(t)-(A-I)\varphi(t)\geq 0\,. \tag{6}$$

Найденные таким образом управляющие функции $C_1(t),\ldots,C_n(t)$ являются программными, поскольку они изменяются в соответствии с заданной вектор-функцией (4).

Система управления в таком случае является разомкнутой, ее структурная схема состоит из последовательного соединения регулятора, вводящегося в систему для обеспечения заданного качества управления, и управляемого объекта и представляется на рис. 2.

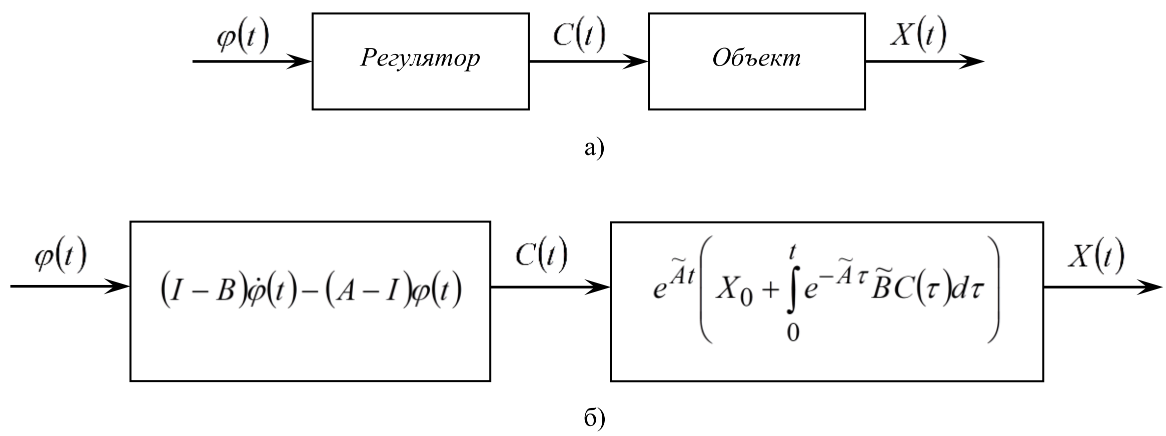


Рис. 2. Структурная схема разомкнутой системы программного управления:
а) кибернетическая модель «черный ящик»; б) кибернетическая модель «белый ящик»

В данном случае особенностью регулирования исследуемой системы является то, что с помощью регулятора вырабатывается такая программа действий, которая сводит рассогласование (ошибку регулирования) $\varepsilon(t)=X^*(t)-X(t)$ между требуемым значением регулируемой величины $X^*(t)$ (заданным состоянием объекта управления) и текущим её значением $X(t)$ (фактическим состоянием объекта управления) к нулю. И, таким образом, цель осуществляемого регулирования заключается в поддержании на заданном уровне $X^*(t)$ выхода объекта управления. Поскольку исследуемая система управления является разомкнутой (информация о состоянии объекта передается по разомкнутому контуру), регулирование осуществляется путем выработки управляющего воздействия $C(t)$ (программного управления), поступающего на вход объекта управления, не получая при этом информацию о реальном состоянии объекта на основании каких-либо признаков, но в то же время имея полную информацию о его поведении. В этом случае построение программы управления, подающейся на вход регулятора, производится в соответствии с требованием, чтобы $\varepsilon(t)=0$.

В рассматриваемом случае задающее воздействие $X^*(t)=\varphi(t)$ определяется тем законом, по которому должна изменяться управляемая система и является постоянным, устанавливается задающим устройством.

С учетом найденного управления $C(t)$ процесс в рассматриваемой системе описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}(t)=(I-B)^{-1}(A-I)X(t)+f(t), \tag{7}$$

где $f(t)$ определяется в зависимости от заданных траекторий $\varphi(t)$ в виде

$$f(t)=\dot{\varphi}(t)-(I-B)^{-1}(A-I)\varphi(t).$$

Решение уравнения (7) при заданных начальных условиях $X(0)=X_0$ в точности совпадает с заданными траекториями движения системы $\varphi(t)\geq 0$.

Таким образом, основная задача осуществляемого регулирования, состоящая в том, чтобы свести к нулю рассогласование $\varepsilon(t)$ между требуемым и текущим значениями регулируемой величины, является выполненной в полном объеме. При этом важно отметить, что предложенный подход обеспечивает также и позитивность получаемых программных управлений при условии выполнения всех ограничений и требований к исходной системе и математической модели, описывающей ее поведение.

IV этап: *Получение и графическое представление численных результатов*.

Таким образом, по результатам проведенного исследования в работе представлена методика определения вектор-функции программных управлений, поступающей на вход объекта управления и обеспечивающей осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону (как постоянному, так и переменному). Необходимость в предлагаемой методике обусловлена необходимостью систематизации основных этапов, методов и подходов к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

ОТДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УПРАВЛЯЮЩУЮ ПРОГРАММНУЮ ВЕКТОР-ФУНКЦИЮ

Как уже отмечалось выше, задающее воздействие $X^*(t)=\varphi(t)$ определяется тем законом, по которому должна изменяться исследуемая управляемая система. Такое воздействие устанавливается задающим устройством и является постоянным. При этом, как показывает практика проектирования систем автоматического управления различных по своему назначению и функциональным возможностям, часто является довольно затруднительной выработка общих рекомендаций по заданию желаемого программного движения исследуемых систем [3-5, 7]. В то же время, учитывая специфику работы проектируемой системы, можно задавать такие воздействия $X^*(t)=\varphi(t)$, характер которых наиболее полно соответствует изучаемому процессу или явлению [1, 7].

В данной работе задающие воздействия $\varphi(t)$ выбирались в следующих видах:

$$\varphi(t)=\varphi_0 t^0,\quad \varphi(t)=\varphi_0 t,\quad \varphi(t)=\varphi_0 t^2,\quad \varphi(t)=\varphi_0+d_0 t^2,\quad \varphi(t)=\varphi_0+d_0\sin\omega t,$$

где $\varphi_0, d_0, \omega -$ известные параметры; $d_0 << \varphi_0$.

Вид вектор-функции $\varphi(t)$ существенным образом влияет на получаемую в соответствии с предложенным подходом вектор-функцию программного управления $C(t)$, поступающую на вход объекта управления, и, следовательно, обеспечивающую устранение рассогласования (ошибки регулирования): $\varepsilon(t)=0$.

Рассмотрим, как изменяется вектор-функция программного управления $C(t)$ в зависимости от различных видов задания вектор-функции $\varphi(t)$:

а) если

$$\varphi(t)=\varphi_0 t^0 = X_0 t^0 \geq 0, \tag{8}$$

где $\varphi_0=\left(\varphi_0^1,\varphi_0^2,\ldots,\varphi_0^n\right)^T$ – вектор-столбец постоянных коэффициентов; $X_0=\left(X_0^1, X_0^2,\ldots, X_0^n\right)^T$ – вектор-столбец начальных условий системы (3), то управляющая программная вектор-функция имеет вид:

$$C(t)=(I-A)\varphi_0 t^0=(I-A)X_0 t^0; \tag{9}$$

б) при

$$\varphi(t)=\varphi_0 t = X_0 t \geq 0 \tag{10}$$

управляющая программная вектор-функция определяется в виде:

$$C(t)=(I-B)\varphi_0+(I-A)\varphi_0 t=(I-B)X_0+(I-A)X_0 t; \tag{11}$$

в) при

$$\varphi(t)=\varphi_0 t^2 = X_0 t^2 \geq 0, \tag{12}$$

функция $C(t)$ принимает вид:

$$C(t)=2(I-B)\varphi_0 t+(I-A)\varphi_0 t^2=2(I-B)X_0 t+(I-A)X_0 t^2; \tag{13}$$

г) если

$$\varphi(t)=\varphi_0+d_0 t^2 = X_0+d_0 t^2 \geq 0, \tag{14}$$

где $d_0=\left(d_0^1,d_0^2,\ldots,d_0^n\right)^T$ – вектор-столбец постоянных коэффициентов, причем $d_0^i << \varphi_0^i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, то

$$C(t)=2(I-B)d_0 t+(I-A)\left(\varphi_0+d_0 t^2\right)=2(I-B)X_0 t+(I-A)\left(X_0+d_0 t^2\right); \tag{15}$$

д) если

$$\varphi(t)=\varphi_0+d_0\sin\omega t=X_0+d_0\sin\omega t\ge 0, \tag{16}$$

где $\omega-$ частота колебаний, то

$$\begin{aligned}C(t)&=(I-B)d_0\omega\cos\omega t+(I-A)(\varphi_0+d_0\sin\omega t)=\\&=(I-B)d_0\omega\cos\omega t+(I-A)(X_0+d_0\sin\omega t).\end{aligned} \tag{17}$$

При этом в данном конкретном случае виды задания вектор-функции $\varphi(t)$ выбирались на основе анализа сложных систем различной физической природы. В общем случае, в зависимости от выбираемого объекта исследования (при сохранении его позитивной «природы») вектор-функция $\varphi(t)$, определяющая желаемые состояния объекта исследования, может быть выбрана в соответствии с поставленной целью управления.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для осуществления более детального анализа полученных в результате проведенного в работе исследования расчетов проведем вычислительный эксперимент для случая, когда позитивная динамическая система состоит из трех подсистем $(n=3)$ при следующих исходных параметрах и начальных условиях:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}15\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}14 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15\end{pmatrix},\ X_0=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix},\ d_0=\begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}28\\0{,}19\end{pmatrix},\ \omega=30,\ t\in[0{,}1]. \tag{18}$$

На I этапе исследований, следуя изложенной методике, проверяем выполнимость всех ограничений на входные характеристики и матрицы коэффициентов математической модели, описывающей поведение исследуемого объекта, и, далее, в виду их выполнения, переходим к математической модели, описываемой векторно-матричным уравнением вида (3), которое с учетом (18) принимает вид:

$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}06 & -0{,}13\\ 0{,}165 & -0{,}88 & 0{,}032\\ 0{,}155 & -0{,}02 & -1{,}06\end{pmatrix}X(t)+\begin{pmatrix}1{,}208 & 0{,}295 & 0{,}461\\ 0{,}238 & 1{,}356 & 0{,}243\\ 0{,}212 & 0{,}433 & 1{,}302\end{pmatrix}C(t), \tag{19}$$

где $\dot{X}(t)=\left(\dot{X}_1(t),\dot{X}_2(t),\dot{X}_3(t)\right)^T$; $X(t)=\left(X_1(t),X_2(t),X_3(t)\right)^T$; $C(t)=\left(C_1(t),C_2(t),C_3(t)\right)^T$.

Ограничения на матрицы постоянных коэффициентов A, B, $(I-B)^{-1}(A-I)$ для модели, описываемой уравнением (19), выполняются, что обеспечивает выполнение свойства позитивности всех переменных математической модели и получение асимптотически устойчивых решений на бесконечном интервале времени.

Кроме того, согласно [11, 14], продуктивность матрицы B обеспечивает полную управляемость (по Калману) исследуемой системы, что означает существование принципиальной возможности ее перевода из любого начального состояния $X(0)=X_0$ в любое конечное состояние $X(T)=X_T$ за конечное время T при соблюдении заданных ограничений. Данное свойство объекта подтверждается выполнением рангового условия, которое для модели, описываемой уравнением (19), принимает вид:

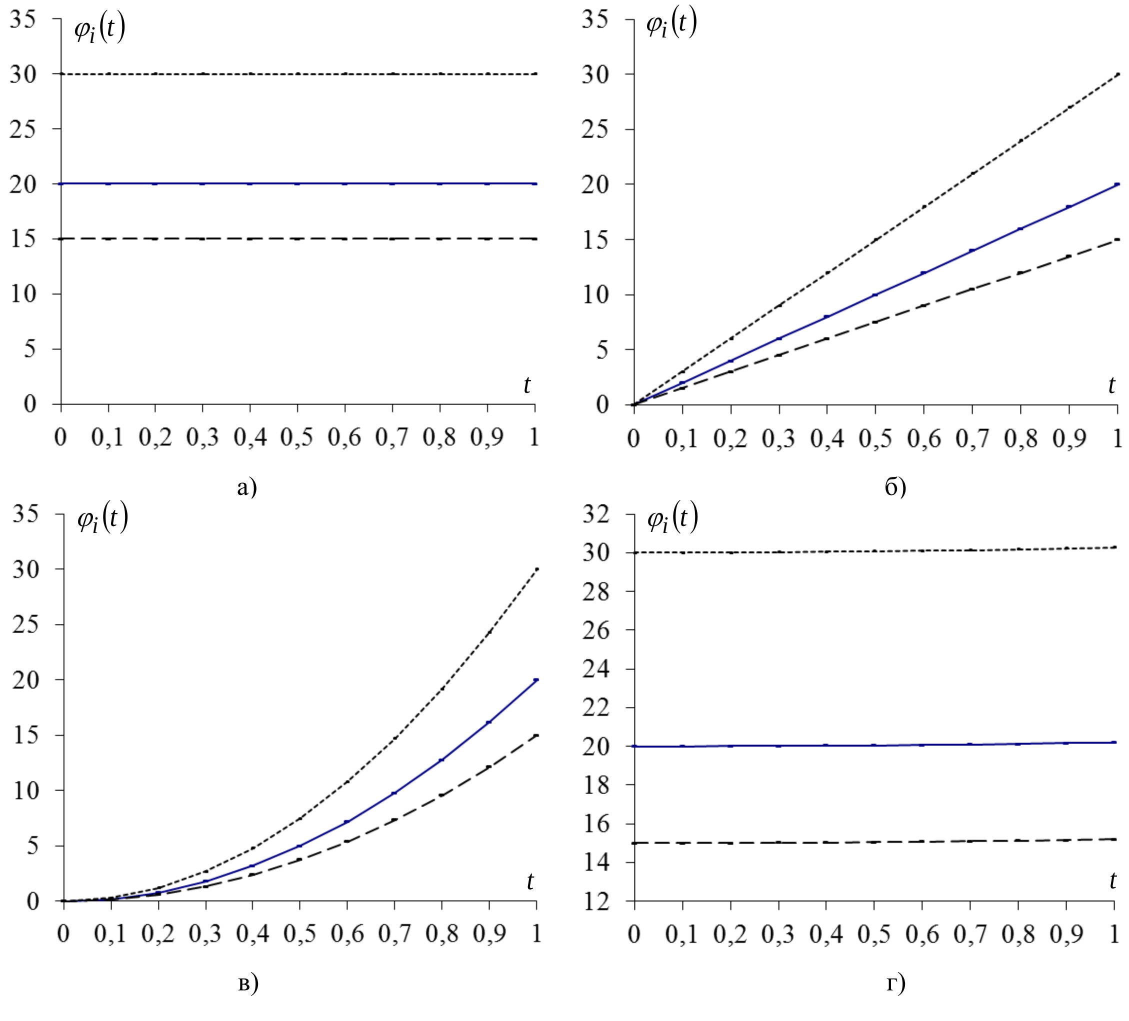
$$rang\begin{bmatrix}1{,}208 & 0{,}295 & 0{,}461 & -0{,}747 & -0{,}223 & -0{,}442 & 0{,}451 & 0{,}184 & 0{,}433\\ 0{,}238 & 1{,}356 & 0{,}243 & -0{,}003 & -1{,}126 & -0{,}096 & -0{,}122 & 0{,}936 & -0{,}031\\ 0{,}212 & 0{,}433 & 1{,}302 & -0{,}044 & -0{,}445 & -1{,}32 & -0{,}069 & 0{,}464 & 1{,}34\end{bmatrix}=rang\ \tilde{B}=3.$$

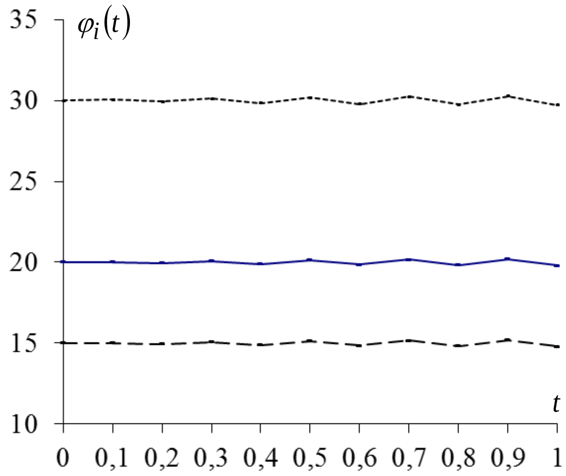
Далее осуществляется переход ко II этапу методики проведения исследования, на котором производится выбор из множества возможных одного или нескольких желаемых состояний $X^*(t)$ объекта исследования в зависимости от цели управления, а также производится проверка выбранного желаемого состояния $X^*(t)$ объекта на неотрицательность. В данном случае желаемые состояния объекта выбираются в видах (8), (10), (12), (14), (16) и с учетом (18) принимают соответственно вид:

$$\varphi(t)=X_0t^0=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix}\cdot t^0\ge 0;\quad \varphi(t)=X_0t=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix}\cdot t\ge 0;\quad \varphi(t)=X_0t^2=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix}\cdot t^2\ge 0;$$

$$\varphi(t)=X_0+d_0t^2=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,2\\0,28\\0,19\end{pmatrix}\cdot t^2\ge 0;\quad \varphi(t)=X_0+d_0\sin\omega t=\begin{pmatrix}20\\30\\15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,2\\0,28\\0,19\end{pmatrix}\cdot\sin 30t\ge 0.$$

Графическое изображение указанных задающих воздействий $\varphi(t)\ge 0$, определяющих движение управляемой системы по заданному закону, представлено на рис. 3, где введены следующие обозначения: ——— – функция $\varphi_1(t)$; ········ – функция $\varphi_2(t)$; — — — – функция $\varphi_3(t)$.





д)

Рис. 3. Графическое изображение задающих воздействий $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,3}$:

а) $\varphi(t)=X_0t^0$; б) $\varphi(t)=X_0t$; в) $\varphi(t)=X_0t^2$; г) $\varphi(t)=X_0+d_0t^2$; д) $\varphi(t)=X_0+d_0\sin\omega t$

В виду неотрицательности представленных выше желаемых состояний $X^*(t)=\varphi(t)$ объекта осуществляется переход к III этапу методики, на котором производится определение вектор-функции $C(t)$ программных управлений, выводящих систему на желаемую траекторию движения.

Следуя III этапу представленной в работе методики, определяем соответствующие указанным задающим воздействиям $\varphi(t)$ программные управляющие вектор-функции соответственно в виде:

$$C(t)=\begin{pmatrix}6\\14,75\\4,5\end{pmatrix}\cdot t^0;\quad C(t)=\begin{pmatrix}10,5\\19,7\\3,25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\14,75\\4,5\end{pmatrix}\cdot t;\quad C(t)=\begin{pmatrix}21\\39,4\\6,5\end{pmatrix}\cdot t+\begin{pmatrix}6\\14,75\\4,5\end{pmatrix}\cdot t^2;$$

$$C(t)=\begin{pmatrix}6\\14,75\\4,5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,095\\0,177\\0,072\end{pmatrix}\cdot t+\begin{pmatrix}0,054\\0,128\\0,085\end{pmatrix}\cdot t^2;\quad C(t)=\begin{pmatrix}6\\14,75\\4,5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,095\\0,177\\0,072\end{pmatrix}\cdot 30\cdot\cos 30t+\begin{pmatrix}0,05\\0,13\\0,09\end{pmatrix}\cdot\sin 30t.$$

Графическое изображение полученных программных управляющих вектор-функций $C(t)$, осуществляющих движение управляемой системы по заданной траектории $\varphi(t)\geq 0$, представлено на рис. 4, где введены следующие обозначения: ——— – функция $C_1(t)$; ········ – функция $C_2(t)$; – – – – – функция $C_3(t)$.

Построение графических зависимостей на рис. 3, 4 определяет выполнение IV этапа предлагаемой в работе методики определения вектор-функции программных управлений, поступающей на вход объекта управления и обеспечивающей осуществление движения исследуемого объекта по заранее заданному закону. Из рис. 3, 4 видно, что характер искомого управления существенным образом зависит от вида задающего воздействия, поступающего на вход объекта управления. Таким образом, изменяя задающее воздействие $\varphi(t)$, изменяется и программная управляющая функция $C(t)$, сохраняя при этом позитивность исследуемой системы. Кроме того, по рис. 3, 4 можно отметить, что соответствующие зависимости задающих воздействий и программных управлений являются схожими.

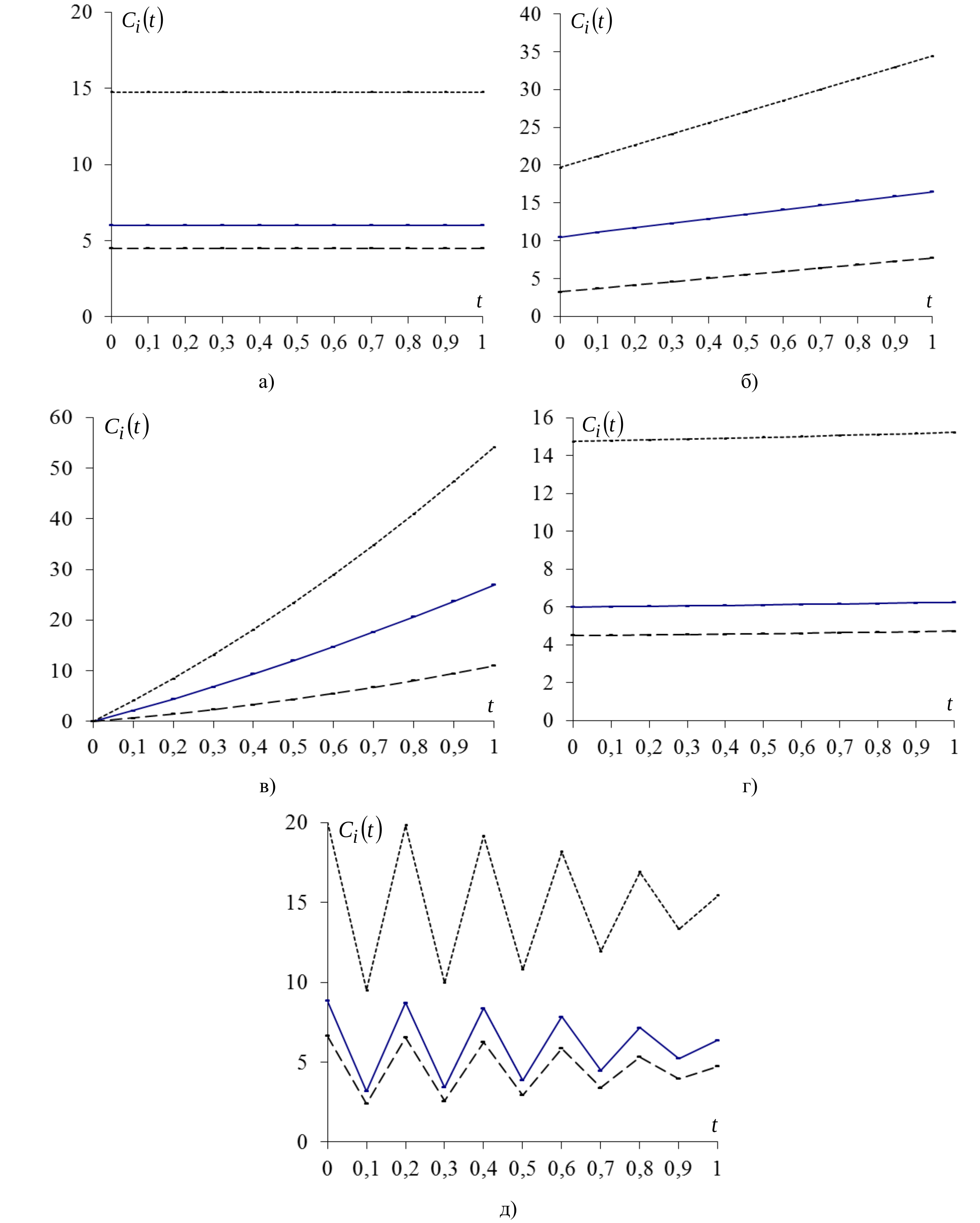


Рис. 4. Графическое изображение программных управляющих вектор-функций $C_i(t)$, $i=\overline{1,3}$:
а) $C(t)=(I-A)X_0t^0$; б) $C(t)=(I-B)X_0+(I-A)X_0t$; в) $C(t)=2(I-B)X_0t+(I-A)X_0t^2$;
г) $C(t)=2(I-B)X_0t+(I-A)\left(X_0+d_0t^2\right)$; д) $C(t)=(I-B)d_0\omega\cos\omega t+(I-A)\left(X_0+d_0\sin\omega t\right)$

Таким образом, результаты проведенного вычислительного эксперимента соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований, а предложенная методика определения вектор-функции программных управлений может быть использована в практике моделирования сложных позитивных динамических систем различной физической природы.

ВЫВОДЫ

Подводя итог проведенному исследованию, можно выделить следующие результаты.

В работе рассмотрена разомкнутая непрерывная математическая модель позитивной динамической системы, описываемая линейным неоднородным векторно-матричным дифференциальным уравнением первого порядка с матрицами постоянных коэффициентов. Для данной модели проведен анализ на предмет возможности построения программных управлений движением исследуемой сложной динамической системы, по результатам которого с использованием подхода Е. А. Барбашина решена задача осуществления назначенной траектории движения и построены программные управления, выводящие систему на желаемую траекторию.

На основе предложенного подхода к определению программных управлений движением исследуемой сложной системы разработана и представлена в работе методика использования указанного подхода для решения обратных задач динамики позитивных систем, которая позволяет систематизировать основные этапы, методы и подходы к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования сложной позитивной динамической системы балансового типа в условиях ее функционирования по разомкнутому контуру при заданных желаемых состояниях (траекториях) системы.

С целью осуществления более детального анализа полученных в результате проведенного в работе исследования расчетов и апробации предлагаемой методики решения обратных задач динамики позитивных систем в работе проведен вычислительный эксперимент определения программных управлений движением позитивной динамической системы с тремя подсистемами. Результаты проведенного вычислительного эксперимента соответствуют результатам проведенных в работе теоретических исследований, а предложенная методика определения вектор-функции программных управлений может быть использована в практике моделирования сложных позитивных динамических систем различной физической природы. Кроме того, перечень задач, решаемых с помощью предложенного в работе подхода, не ограничивается приведенным примером, а распространяется на достаточно широкую область задач автоматического регулирования позитивных динамических систем.

Достоверность предложенного подхода подтверждается точностью используемого аналитического метода решения обратных задач динамики Е. А. Барбашина, а также сведением к нулю рассогласования между требуемым и текущим значениями регулируемой величины исследуемого объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. Москва: Наука, 1981. 144 с.
2. Жевнин А. А., Колесников К. С., Крищенко А. П., Толокнов В. И. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепции обратных задач динамики (обзор). *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1985. № 4. С. 178–188.
3. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели. Москва: Наука, 1987. 304 с.
4. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учебное пособие для втузов. Москва: Машиностроение, 2004. 576 с.
5. Петров Б. Н., Крутько П. Д., Попов Е. П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики. *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 247. №5. С. 1078–1081.
6. Ермошина О. В., Крищенко А. П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики. *Известия РАН Теория и системы управления*. 2000. № 2. С. 155–162.
7. Крищенко А. П. Метод обратной задачи динамики в теории управления. *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014*: Труды (Москва, 16-19 июня 2014). Москва, 2014. С. 431–437.
8. Быстров Л. Г. Идентификация линейных динамических систем по измеряемым координатам переменных состояния. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. №1 (154). С. 3–6.

9. Горошко А. В., Ройзман В. П. Исследование динамики и снижение виброактивности турбонасосного агрегата путем решения обратных задач. *Машиностроение и инженерное образование*. 2014. №1. С. 29–35.
10. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. Москва: Машиностроение, 1990. 264 с.
11. Леонтьєва В. В. Математичне моделювання позитивних динамічних систем балансового типу: дис… канд. фіз.-матем. наук / Запорізький національний університет. Запоріжжя, 2008.
12. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Зб. наук. праць. Вісник ЗНУ*. Запоріжжя: ЗНУ. 2010. №1. С. 81–88.
13. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вестник Херсонского национального технического университета: Сб. научных статей*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2 (35). С. 273–278.
14. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управляемость позитивной динамической системы балансового типа. *Зб. наук. праць. Вісник ЗНУ*. Запоріжжя: ЗНУ. 2011. №1. С. 58–66.
15. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 223 с.

REFERENCES

1. Galiullin, A. S. (1981). Inverse problems of dynamics. Moscow: Nauka.
2. Zhevnin, A. A, Kolesnikov, K. S., Krishchenko, A. P. & Toloknov, V. I. (1985). Synthesis of algorithms for terminal control based on the concept of inverse dynamical problems (review). Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika, No. 4., pp. 178-188.
3. Krutko, P. D. (1987). Inverse problems of the dynamics of controllable systems: Linear models. Moscow: Nauka.
4. Krutko, P. D. (2004). Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control. A series of lectures: a textbook for high schools. Moscow: Mechanical engineering.
5. Petrov, B. H., Krutko, P. D. & Popov, E. P. (1979). Construction of control algorithms as the inverse problem of dynamics. Doklady AN SSSR, Vol. 247, No. 5, pp. 1078-1081.
6. Ermoshina, O. V. & Krishchenko, A. P. (2000). Synthesis of software controls by the orientation of the spacecraft by the method of inverse problems of dynamics. Izvestiya RAN Teoriya i sistemy upravleniya, No. 2., pp. 155-162.
7. Krischenko, A. P. (2014, June). The method of the inverse problem of dynamics in control theory. Proceedings of the XII All-Russian Meeting on the Control Problems ARMCP-2014, (pp. 431-437), Moscow.
8. Bystrov, L. G. (2014). Identification of linear dynamic systems from the measured coordinates of state variables. Mechatronics, automation, control. No. 1 (154), pp. 3-6.
9. Goroshko, A. V. & Roizman, V. P. (2014). Investigation of the dynamics and reduction of the vibroactivity of the turbo-pump aggregate by solving inverse problems. Mechanical engineering and engineering education, No. 1, pp. 29-35.
10. Tikhonov, A. N., Kalner, V. D. & Glasko, V. B. (1990). Mathematical modeling of technological processes and the method of inverse problems in engineering. Moscow: Mechanical Engineering.
11. Leontieva, V. V. (2008). Mathematical modeling of positive dynamical systems of balanced type (Unpublished candidate thesis). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine.
12. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2010). Construction and analysis of an open continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. Zb. nauk. prats’. Vísnik ZNU. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 81-88.
13. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2009). Control in the continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. Vestnik Khersonskogo natsional’nogo tekhnicheskogo universiteta: Sb. nauchnykh statey. Kherson: KHNTU, Iss. 2 (35), pp. 273-278.
14. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2011). Controllability of a positive dynamical system of balanced type. Zb. nauk. prats’. Vísnik ZNU. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 58-66.
15. Barbashin, E. A. (1967). Introduction to the theory of stability. Moscow: Nauka.