

Результаты, представленные на рис. 4, свидетельствуют о том, что с увеличением значения параметра закрутки  $\alpha$  увеличивается прогревание в межреберной зоне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. Москва: Атомиздат, 1974. 367 с.
2. Андреев П. А., Гремилов Д. И., Федорович Е. Д. Теплообменные аппараты ядерных энергетических установок. Н.М. Синева (ред.). Ленинград: Судостроение, 1969. 352 с.
3. Антуфьев В. М. Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева. Москва-Ленинград: Энергия, 1966. 184 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. Думка, 1982. 552 с.
5. Лисін Д. О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview»: Свідчення про реєстрацію авторського права на твір № 45951. 2012.
6. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
7. Чопоров С. В., Гоменюк С. И., Лисняк А. А., Аль-Омари М. А. В., Алатамнех Х. Х. Триангуляция поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2016. № 3(58). С. 542–549.

### REFERENCES

1. Petukhov, B. S., Genin, L. G. & Kovalev, S. A. (1974). A heat exchange is in nuclear power installations. Moscow: Atomizdat.
2. Andreyev, P. A., Gremilov, D. I. & Fedorovich, Ye. D. (1969). Heat-exchange vehicles of nuclear power installations. Leningrad: Sudostroyeniye.
3. Antufyev, V. M. (1966). Efficiency of various forms of convective heating surfaces. Moscow-Leningrad: Energiya.
4. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka.
5. Svidotstvo pro reyeestratsiyu avtorskogo prava na tvir № 45951. Computer program "Visualization System and building a grid on the surface of geometric objects that are described by means of mathematical theory of R-functions "RFPreview", Lisin, D. O., 2012.
6. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Kharkov: IPMash NAN Ukrainy.
7. Choporov, S. V., Gomenyuk, S. I., Lisnyak, A. A., Al-Omari, M. A. V. & Alatomnekh, H. H. (2016). Triangulation of surfaces under a hybrid parametric and implicit representation. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta*, No. 3(58), pp. 542-549.

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Ободан Н. И., д. т. н., Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt\_fpm@ukr.net

В постановке плоской геометрически нелинейной теории упругости рассмотрена задача устойчивости двухслойной арочной системы под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по границе верхнего слоя. На линии раздела слоев реализуются условия полного сцепления, гладкого контакта и отставания. Задача сформулирована в вариационной постановке. Проведен численный анализ критических нагрузок и возможных равновесных конфигураций системы в зависимости от значений ее геометрических и физических параметров. Основное внимание уделено изучению равновесных форм с выщелкнутым нижним слоем.

*Ключевые слова: плоская геометрически нелинейная задача теории упругости, двухслойная система, контактное взаимодействие, потеря устойчивости, выщелкивание.*

**СТІЙКІСТЬ ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ У ДВОШАРОВІЙ СИСТЕМІ**

Ободан Н. І., д. т. н., Адлущкий В. Я., к. ф.-м. н., Козакова Н. Л.

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

kkt\_fpm@ukr.net

У постановці плоскої геометрично нелінійної теорії пружності розглянуто задачу стійкості двошарової аркової системи під дією нормального навантаження, рівномірно розподіленого по границі верхнього шару. На лінії розділення шарів реалізуються умови повного зчеплення, гладкого контакту й відшарування. Задачу сформульовано у варіаційній постановці. Проведено чисельний аналіз критичних навантажень і можливих рівноважних конфігурацій системи залежно від значень її геометричних і фізичних параметрів. Основну увагу приділено вивченню рівноважних форм із відшаруванням нижнього шару.

*Ключові слова: плоска геометрично нелінійна задача теорії пружності, двошарова система, контактна взаємодія, втрата стійкості, відшарування.*

**STABILITY OF THE SUPPORT LAYER IN TWO-LAYER SYSTEM**

Obodan N. I., Dr. Sci. (Tech.), Adlucky V. J., PhD (Phys.-Math.), Kozakova N. L.

*Oles Honchar Dnipro National University,  
Gagarin av., 72, Dnipro, 49005, Ukraine*

kkt\_fpm@ukr.net

Elastic circular arch system consisting of two layers generally with different mechanical characteristics is considered. The top layer is loaded by uniformly distributed normal load which does not change its direction during process of deformation. Rectilinear borders of both layers are clamped. At the initial state there are zones of coupling –  $\Gamma_c$  and of smooth contact –  $\Gamma_d$  on the common border  $\Gamma$  of layers, where  $\Gamma_c \cup \Gamma_d = \Gamma$ . It is supposed that zones of coupling remain unchanged during the process of deformation. In particular, zones  $\Gamma_c$  may not exist. During the process of deformation, the buckling of layers may occur caused by local loss of stability.

The purpose of the investigation is to assess the critical loads and to obtain possible equilibrium configurations of the system depending on values of its geometrical and physical parameters. The problem is considered within the framework of plane geometrically nonlinear theory of elasticity with use of Lagrangian formalism. Numerical results were obtained with use of FEM technique.

The phenomenon of local buckling of the bottom layer in curvilinear two-layer system at presence of unilateral constraints is caused by existence of isolated equilibrium branches of nonlinear solutions. It makes the linearized approach unacceptable in these cases for the estimation of the real state.

Depending on geometry of system the general, local, and mixed forms of buckling are possible which have various levels of critical loads. For the certain system parameters the possibility of buckling vanishes.

The area of existence of local buckling is mainly determined only by the size of zone with unilateral constraints and by the thickness of the bottom layer. It slightly depends on geometry and physical characteristics of the system.

*Key words: plane geometrically nonlinear theory of elasticity, two-layer system, contact interaction, loss of stability, buckling.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Существующие исследования задачи о взаимодействии относительно тонкого металлического и «мягкого» упругих слоев посвящены определению напряженно-деформированного состояния системы [1, 4, 5]. Между тем, исчерпание работоспособности покрытий зачастую связывают с появлением приповерхностной неустойчивости в зоне действия сжимающих напряжений при отсутствии или ослабевании межслоевых связей [2, 8-10, 12, 13]. Наиболее существенен этот фактор в тех случаях, когда в конструкции возникают преобладающие сжимающие напряжения, приводящие к явлению потери устойчивости конструкции в целом. Кроме того, процесс разрушения описываемых систем может состоять из двух фаз – потери устойчивости слоя с последующим ростом участка, где отсутствуют связи, а затем – общей потери устойчивости, либо разрушения. Представляет интерес

исследование нелинейного поведения указанных систем, изучение их устойчивости, возможных равновесных состояний и уровней критических нагрузок.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая круговая арочная система, состоящая из двух слоев, в общем случае с отличающимися механическими характеристиками (рис. 1). Верхний слой нагружен равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности  $q$ , направление действия которой в процессе деформирования не изменяется. Прямолинейные границы обоих слоев жестко зашпелены. В исходном (недеформированном) состоянии на общей границе слоев  $\Gamma$  заданы зоны сцепления  $\Gamma_c$  и зоны гладкого контакта  $\Gamma_d$ , где  $\Gamma_c \cup \Gamma_d = \Gamma$ . В частном случае зоны  $\Gamma_c$  могут отсутствовать. В процессе деформирования может возникнуть отставание слоев, обусловленное выпучиванием вследствие локальной или общей потери устойчивости. При этом, помимо зон гладкого контакта  $\Gamma_d^{(k)}$ ,  $k=1,2$  образуются подлежащие отысканию зоны отставания  $\Gamma_s^{(k)}$ ,  $k=1,2$ , где  $k$  – номер слоя (штрихом обозначена текущая конфигурация системы). Предполагается, что зоны сцепления остаются таковыми в процессе деформирования, т.е.  $\Gamma'_c$  является образом  $\Gamma_c$ .

Целью исследования является определение критических нагрузок и возможных равновесных конфигураций системы в зависимости от значений ее геометрических и физических параметров.

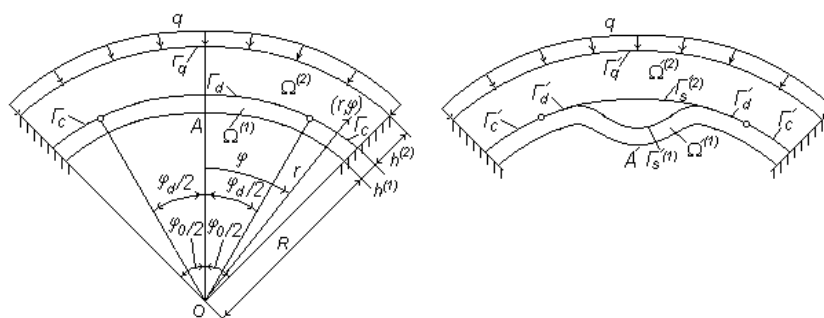


Рис. 1. Исходное и деформированное состояние двухслойной арочной системы

Задача рассматривается как задача теории упругости об обобщенном плоском напряженном состоянии в геометрически нелинейной постановке с использованием Лагранжева формализма.

В исходном состоянии система занимает плоскую область

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^2 \Omega^{(k)}, \quad \Omega^{(1)} = \left\{ (r, \varphi) : r \in [R, R+h^{(1)}], \varphi \in \left[ -\frac{1}{2}\varphi_0, \frac{1}{2}\varphi_0 \right] \right\},$$

$$\Omega^{(2)} = \left\{ (r, \varphi) : r \in [R+h^{(1)}, R+h] \right\}, \quad \varphi \in \left[ -\frac{1}{2}\varphi_0, \frac{1}{2}\varphi_0 \right],$$

где  $\{r, \varphi\}$  – полярные координаты точки области  $\Omega$ , используемые в качестве лагранжевых координат, отнесенных к исходной конфигурации упругой системы;  $\varphi_0$  – угол раствора арки;  $R$  – радиус кривизны основания нижнего слоя;  $h^{(k)}$ ,  $k=1,2$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h = h^{(1)} + h^{(2)}$  – толщина двухслойной арки.

Геометрические соотношения, определяющие тензор конечных деформаций Грина-Лагранжа, в предположении о малости удлинений и сдвигов по сравнению с углами поворота заданы в следующем виде [6] (номера слоев опущены):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= e_r + \frac{1}{2} \omega^2; \quad \varepsilon_\varphi = e_\varphi + \frac{1}{2} \omega^2; \quad \varepsilon_{r\varphi} = e_{r\varphi}; \\ \omega &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right); \quad e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \\ e_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{u} = \{u_r, u_\varphi\}$  – вектор перемещений.

Уравнения равновесия имеют вид [6]:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{s_r - s_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{\partial s_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{s_{r\varphi} + s_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} = 0; \quad (2)$$

$s_r = \sigma_r - \sigma_{r\varphi} \omega$ ;  $s_\varphi = \sigma_\varphi + \sigma_{r\varphi} \omega$ ;  $s_{r\varphi} = \sigma_r \omega + \sigma_{r\varphi}$ ;  $s_{\varphi r} = -\sigma_r \omega + \sigma_{r\varphi}$ , где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ ,  $\sigma_\varphi$  – компоненты симметричного тензора напряжений Коши  $T$  для деформированной конфигурации.

В качестве физических соотношений для  $k$ -го слоя приняты соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}} \left( \varepsilon_r^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}} \mathcal{G}^{(k)} \right); \quad \sigma_\varphi^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}} \left( \varepsilon_\varphi^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}} \mathcal{G}^{(k)} \right); \quad \sigma_{r\varphi}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}; \\ \mathcal{G}^{(k)} &= \varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E^{(k)}$  и  $\nu^{(k)}$  – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $k$ -го слоя.

Граничные условия имеют следующий вид:

1) на боковых границах

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) &= 0; \quad u_\varphi^{(1)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) = 0, \quad r \in [R, R + h^{(1)}]; \\ u_r^{(2)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) &= 0; \quad u_\varphi^{(2)}(r, \pm \frac{1}{2} \varphi_0) = 0, \quad r \in [R + h^{(1)}, R + h]; \end{aligned} \quad (4)$$

2) на нижней границе

$$\bar{p}_{n'}^{(1)} = T^{(1)} \cdot \bar{n}'^{(1)} = 0, \quad (5)$$

где  $\bar{p}_{n'}^{(1)}$  – вектор усилий на площадке границы с нормалью  $\bar{n}'^{(1)}$  в деформированном состоянии;

3) на верхней границе  $\Gamma'_q$

$$\bar{p}_{n'}^{(2)} = T^{(2)} \cdot \bar{n}'^{(2)} = \bar{q}, \quad (6)$$

где  $\bar{q}$  – вектор текущей нагрузки, направление которого в процессе нагружения остается постоянным («мертвая» нагрузка).

Условия на границе раздела слоев:

1) в зонах полного сцепления  $\Gamma'_c$

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)}; \quad (7)$$

2) в зонах гладкого контакта  $\Gamma_d^{(k)}$

$$\forall s' \in \Gamma_d^{(2)} \exists t' \in \Gamma_d^{(1)} : |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')| = 0;$$

$$\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} - (\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} \cdot \vec{n}^{(k)}) \vec{n}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор соответствующей точки границы в деформированном состоянии;

3) в зонах отставания  $\Gamma_s^{(k)}$

$$\vec{p}_{n^{(k)}}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2;$$

$$\forall s' \in \Gamma_s^{(2)} : (\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t^*(s'))) \cdot \vec{n}^{*(1)}(s') > 0, \quad (9)$$

где  $t^*(s') = \arg \min_{t' \in \Gamma_s^{(1)}} |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')|$ ,  $t^*(s') \in \Gamma_s^{(1)}$ ;  $\vec{n}^{*(1)}(s')$  – вектор нормали к  $\Gamma_s^{(1)}$  в точке  $t^*(s')$ .

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для описания неизвестных контактных усилий и зон контакта и отставания на множестве  $\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}$  вводится функция зазора  $g$  и контактных усилий  $\gamma$  [11, 15], где

$$g(s') = (\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t^*(s'))) \cdot \vec{n}^*(s') \geq 0; \quad \gamma(s') = \vec{p}_{n^{(2)}}^{(2)}(s') \cdot \vec{n}^{*(1)}(s') \geq 0;$$

$$g(s')\gamma(s') = 0, \quad s' \in \Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)};$$

$$t^*(s') = \arg \min_{t' \in \Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}} |\vec{r}^{(2)}(s') - \vec{r}^{(1)}(t')|,$$

$$t^*(s') \in \Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}, \quad s' \in \Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}; \quad (10)$$

$\vec{n}^*(s')$  – вектор нормали к  $\Gamma_d^{(1)} \cup \Gamma_s^{(1)}$  в точке  $t^*(s')$ .

Вариационная постановка краевой задачи (1)-(9) имеет вид

$$W = \arg \min_{W \in \bar{W}} \mathcal{E}(u, \gamma), \quad W = \{u, \gamma\}^T. \quad (11)$$

При этом условие стационарности для расширенного функционала  $\mathcal{E}(u, \gamma)$  определяется равенством

$$\delta \mathcal{E}(u, \gamma) = \sum_{k=1}^2 \iint_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_c^{(k)} + \sigma_{r\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}} (\delta \bar{u}^{(2)} - \delta \bar{u}^{(1)}) \cdot \vec{p}_{n^{(2)}}^{(2)} ds' - \bar{q} \cdot \int_{\Gamma_q} \delta \bar{u}^{(2)} ds' + \int_{\Gamma_d^{(2)} \cup \Gamma_s^{(2)}} \delta \gamma w(g, \gamma) ds' = 0, \quad (12)$$

где  $w(g, \gamma)$  – функция, аппроксимирующая условия (10). Решение осуществляется для случая простого нагружения  $q = q_0 t$ , где  $t$  – параметр нагружения,  $q_0$  – фиксированное значение.

Для построения решения задачи (12) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации. Для этого на области  $\Omega$  вводится

конечно-элементная сетка с узлами в точках с координатами  $\{r_i, \varphi_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Неизвестные перемещения представляются в виде вектора  $\bar{u} = \{u_i\}$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ , компонентами которого являются узловые значения перемещений  $u_{r,i}$ ,  $u_{\varphi,i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . В пределах каждого элемента используется изопараметрическая аппроксимация перемещений с помощью линейных функций формы. Узлы, лежащие на границе  $\Gamma \setminus \Gamma_c$ , нумеруются как  $P = \{P_1, \dots, P_M\}$ . На множестве узлов  $P$  формируется вектор узловых значений функции  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma} = \{\gamma_i\}$ ,  $i = \overline{1, M}$ . В соответствии с условиями (10) из элементов вектора  $P$  формируются векторы  $P^d = \{P_1^d, \dots, P_{M_d}^d\}$ ,  $P^s = \{P_1^s, \dots, P_{M_s}^s\}$ , определяющие узлы сетки, соответствующие зонам гладкого контакта и отставания соответственно. В исходном состоянии  $P \equiv P^d$ . После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал  $\mathcal{E}(u, \gamma)$ , интегрирования и выполнения процедуры (11) получается разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений порядка  $2N + M$ , имеющая следующую структуру

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(\bar{u}) + \mathcal{Q}_1(\bar{u}, \bar{\gamma}) = F(q), \\ \mathcal{Q}_2(\bar{u}, \bar{\gamma}) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

и эквивалентная условиям  $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial u_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 2N}$ ;  $\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial \gamma_i = 0$ ,  $i = \overline{1, M}$ , где  $\tilde{\mathcal{E}}$  – значение функционала  $\mathcal{E}$  после подстановки конечно-элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования.

Для решения системы (13) производится ее линейризация и используется метод продолжения по параметру  $q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta q$ . При этом разрешающая система линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих приращений  $\Delta \bar{u}^{(n)} = \bar{u}^{(n)} - \bar{u}^{(n-1)}$  и  $\Delta \bar{\gamma}^{(n)} = \bar{\gamma}^{(n)} - \bar{\gamma}^{(n-1)}$  приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left( K(\bar{u}^{(n-1)}) + \frac{\partial \mathcal{Q}_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \right) \Delta \bar{u}^{(n)} + \frac{\partial \mathcal{Q}_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \Delta \bar{\gamma}^{(n)} = \\ & = F(q^{(n)}) - \mathcal{Q}(\bar{u}^{(n-1)}) - \mathcal{Q}_1(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)}); \\ & \frac{\partial \mathcal{Q}_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \Delta \bar{u}^{(n)} + \frac{\partial \mathcal{Q}_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \Delta \bar{\gamma}^{(n)} = -\mathcal{Q}_2(\bar{u}^{(n-1)}, \bar{\gamma}^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $K(\bar{u}^{(n-1)}) = \frac{\partial \mathcal{Q}(\bar{u}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}}$  – тангенциальная матрица жесткости [15].

В пределах каждого шага  $n$  осуществляется уточнение решения методом Ньютона-Рафсона [11] по итерационной схеме

$$\begin{aligned} & \left( K(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}) + \frac{\partial \mathcal{Q}_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \right) \bar{v}_{(j)} + \frac{\partial \mathcal{Q}_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \zeta_{(j)} = \\ & = F(q^{(n)}) - \mathcal{Q}(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}) - \mathcal{Q}_1(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)}); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{u}} \bar{v}_{(j)} + \frac{\partial Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)})}{\partial \bar{\gamma}} \bar{\zeta}_{(j)} = -Q_2(\bar{u}_{(j-1)}^{(n-1)}, \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n-1)}),$$

$$\bar{v}_{(j)} = \Delta \bar{u}_{(j)}^{(n)} - \Delta \bar{u}_{(j-1)}^{(n)}, \quad \bar{\zeta}_{(j)} = \Delta \bar{\gamma}_{(j)}^{(n)} - \Delta \bar{\gamma}_{(j-1)}^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{v}_{(0)} = \Delta \bar{u}^{(n-1)}, \quad \bar{\zeta}_{(0)} = \Delta \bar{\gamma}^{(n-1)}.$$
(15)

Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности решения  $\|\bar{v}\| < \varepsilon$ ,  $\|\bar{\zeta}\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное моделирование процесса деформирования рассматриваемой двухслойной системы осуществлялось в широком диапазоне изменения характерных параметров  $\varphi_0$ ,

$$\rho = \frac{R}{h}, \quad \eta = \frac{h^{(1)}}{h}, \quad \zeta_d = \frac{\varphi_d}{\varphi_0}, \quad e = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}.$$

Целью исследования было выяснение влияния указанных параметров на характер локальной и общей потери устойчивости системы, в частности – на возможность существования равновесных форм с отщелкнутым нижним слоем.

Равновесные формы, соответствующие случаю  $\Gamma'_s = \emptyset$ , существуют во всем диапазоне значений параметров задачи. Они соответствуют совместному деформированию слоев в сомкнутом состоянии с гладким проскальзыванием друг относительно друга в зоне  $\Gamma_d$ . На рис. 2, а) приведена типичная кривая «нагрузка-прогиб», где  $w_A$  – радиальное перемещение центральной точки  $A$  границы нижнего слоя (рис.1);  $\lambda = q/q^*$ ,  $q^*$  – критическая нагрузка потери устойчивости системы для случая  $\zeta_d = 0$ , т.е. для полностью скрепленных слоев. Пунктиром обозначена исходящая из нуля ветвь равновесных состояний, соответствующая  $\Gamma'_s = \emptyset$ , т.е. случаю деформирования слоев в сомкнутом состоянии. Сплошной линией представлена изолированная ветвь, соответствующая форме с отщелкнутым нижним слоем. Характерной особенностью таких форм является невозможность их реализации при нагрузке, меньшей  $\lambda_{\min}$ , поскольку при этой нагрузке происходит потеря устойчивости нижнего слоя, обуславливающая его выщелкивание. Как показали расчеты, при реализации этих форм верхняя критическая нагрузка  $\lambda_{\max}$  практически не изменяется по сравнению со случаем деформирования слоев в сомкнутом состоянии. При достижении этой нагрузки происходит общая потеря устойчивости системы, причем для достаточно больших значений параметров  $\varphi_0$  и  $\rho$  реализуется кососимметричная форма потери устойчивости, а при сравнительно малых – симметричная.

На рис. 2, б) для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, характеризующие влияние параметра  $\eta$ , т.е. относительной толщины нижнего слоя, на уровень критических нагрузок. В данном случае  $q^*$  практически совпало с критическим значением для бесшарнирной арки толщиной  $h$  [3]:  $q_{cr} = 2,7E(\rho + 0,5)^{-3}$ . Как следует из приведенных данных, с ростом  $\eta$  величина  $\lambda_{\max}$  убывает вследствие уменьшения суммарной изгибной жесткости системы, а величина  $\lambda_{\min}$  возрастает в силу увеличения изгибной жесткости нижнего слоя. При  $\eta > 0,12$  для данного набора параметров форма с отщелкнутым нижним слоем не реализуется.

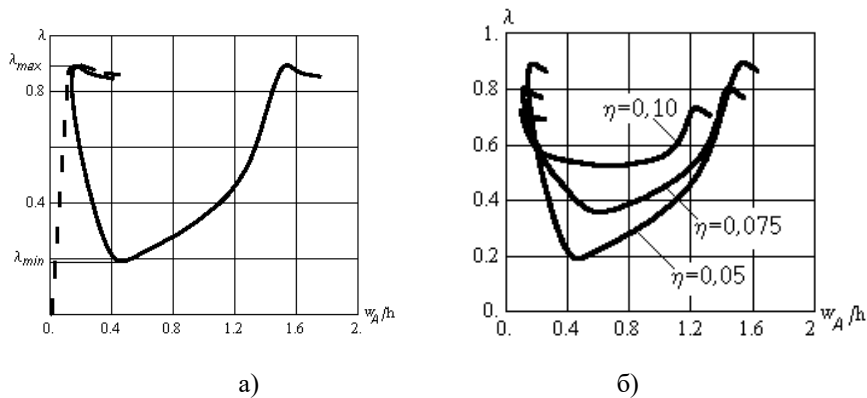


Рис. 2. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

На рис. 3 для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, описывающие влияние на уровень критических нагрузок параметра  $\zeta_d$ , характеризующего размер зон полного сцепления. Из приведенных данных следует, что с увеличением размера зон полного сцепления возрастает как нижняя, так и верхняя критические нагрузки. При этом величина зазора в зоне отставания  $\Gamma'_s$  уменьшается (как и размер этой зоны). Очевидно, что при  $\zeta_d \rightarrow 0$   $\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}$ , а  $\lambda_{\max} \rightarrow 1$ .

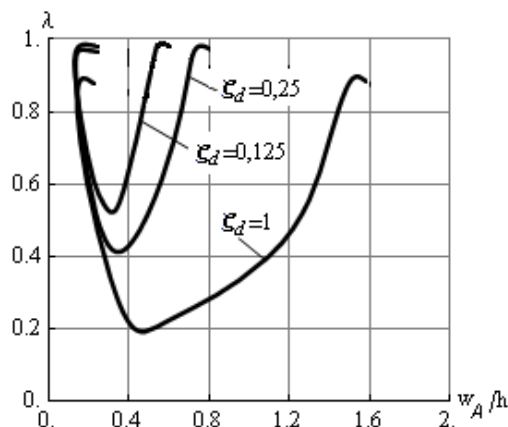


Рис. 3. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

На рис. 4 для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики радиальных перемещений точек границы  $\Gamma$  для двух значений параметра  $\zeta_d$ , соответствующие локальной ( $\lambda = \lambda_{\min}$ ) и общей ( $\lambda = \lambda_{\max}$ ) формам потери устойчивости. Сплошной линией изображены перемещения  $u_r^{(1)}(R+h^{(1)}, \varphi)$ , пунктиром –  $u_r^{(2)}(R+h^{(1)}, \varphi)$ , кружками – границы зон полного сцепления. Как следует из рис. 4, форма локальной потери устойчивости является симметричной, а общей – косимметричной. Размеры зоны отставания в случае  $\zeta_d = 1$  (т.е. при полном отсутствии сцепления) не слишком отличаются от случая  $\zeta_d = 0,125$  (т.е. для сравнительно узкой зоны возможного отставания). Это свидетельствует о том, что отставание реализуется в довольно небольшой зоне области контакта даже при полностью несвязанных слоях.

На рис. 5 для случая  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$  приведены графики, характеризующие влияние параметра  $\varphi_0$  на уровень критических нагрузок. В данном случае в качестве  $q^*$  выбрано критическое значение для бесшарнирной арки



толщиной  $h$  с углом раствора  $\varphi_0 = 2\pi/3$  [3]:  $q_{cr} = 1,59E(\rho + 0,5)^{-3}$ . Как следует из приведенных данных, с уменьшением угла раствора значения верхней критической нагрузки существенно возрастают, тогда как для нижней критической нагрузки они возрастают незначительно.

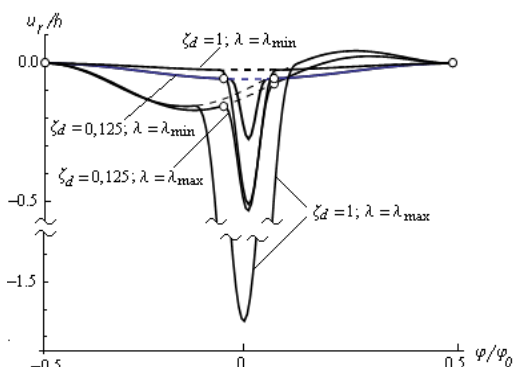


Рис. 4. Графики радиальных перемещений точек границы  $\Gamma$

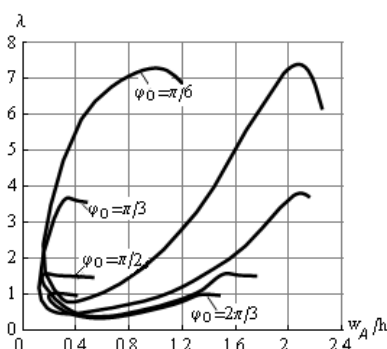


Рис. 5. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $\eta = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

На рис. 6 приведены результаты для двухслойной системы с существенно большей относительной толщиной  $\rho = 15$  для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$ . В отличие от рассмотренной ранее сравнительно тонкой двухслойной системы, для которой верхней критической нагрузке соответствовала точка бифуркации диаграммы «нагрузка-прогиб» и общая потеря устойчивости осуществлялась по кососимметричной форме, в данном случае верхней критической нагрузке соответствует предельная точка, и форма общей потери устойчивости является симметричной. При этом значения  $\lambda_{\max}$  при малых значениях  $\eta$  приближаются к величине предела пропорциональности. Влияние параметра  $\eta$  на величины критических нагрузок аналогично результатам рис. 2, б), но при этом предельное значение  $\eta$ , при котором еще возможно выщелкивание, в данном случае в два раза выше.

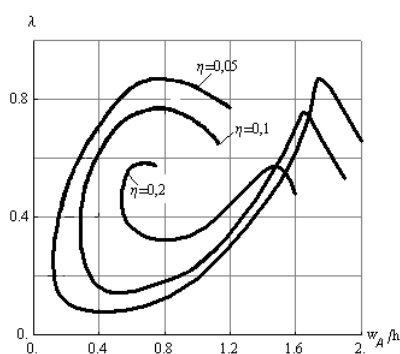


Рис. 6. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 15$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

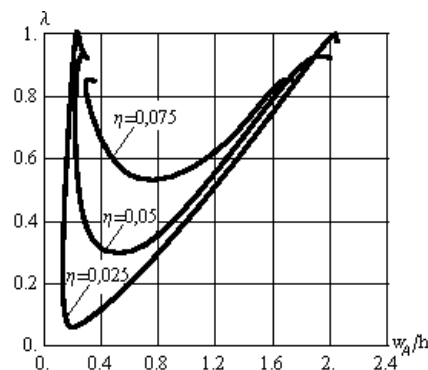


Рис. 7. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

До сих пор рассматривалось поведение однородной двухслойной системы. Представляет интерес исследование влияния разномодульности материалов слоев. На рис. 7 приведены результаты, соответствующие случаю  $e = E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ . При этом  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 50$ ,  $\zeta_d = 1$ .

В данном случае при вычислении  $\lambda = q/q^*$  использовалась верхняя критическая нагрузка  $q^* = 0,4 \text{ МПа}$ , полученная для случая  $\eta = 0,025$ . Из приведенных данных следует, что

влияние параметра  $\eta$  на величины критических нагрузок аналогично результатам рис. 2, б). При  $\eta > 0,09$  выщелкивание нижнего слоя становится невозможным.

На рис. 8 приведены результаты, соответствующие случаю  $e = E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ . При этом  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 15$ ,  $\zeta_d = 1$ . В данном случае при вычислении  $\lambda = q/q^*$  использовалась верхняя критическая нагрузка  $q^* = 11 \text{ МПа}$ , полученная для случая  $\eta = 0,05$ . При  $\eta > 0,16$  выщелкивание нижнего слоя становится невозможным.

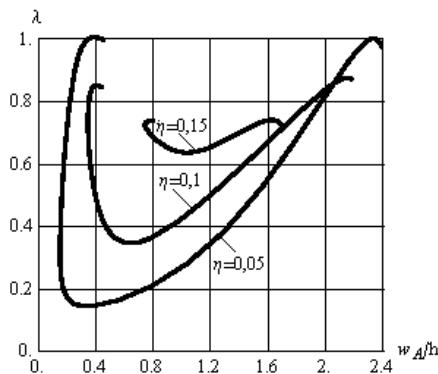


Рис. 8. Графики зависимости «нагрузка-прогиб» для случая  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\rho = 15$ ,  $\zeta_d = 1$ ,  $e = 0,1$ ,  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$

## ВЫВОДЫ

1. Явление локального выщелкивания нижнего слоя в криволинейной двухслойной системе при наличии односторонних связей обусловлено существованием изолированных равновесных ветвей нелинейных решений, что делает неприемлемым в этих случаях линеаризованный подход для оценки реального состояния.
2. В зависимости от геометрии системы возможны общие и локальные, и смешанные формы выщелкивания, которым соответствуют различные уровни критических нагрузок. При этом при определенных параметрах системы возможность локального выщелкивания исчезает.
3. Область существования локального выщелкивания преимущественно определяется только размером участка с односторонними связями и толщиной нижнего слоя и мало зависит от геометрии и физических характеристик конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Ворович И. И. Механика контактных взаимодействий. Москва: Наука, 2001. 670 с.
2. Гузь А. Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). *Прикладная механика*. 2014. Т. 50, № 1. С. 5–88.
3. Динник А. Н. Устойчивость арок. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1946. 128 с.
4. Зернин М. В., Бабин А. П., Мишин А. В., Буряк В. Ю. Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды». *Вестн. Брянского гос. техн. ун-та*. 2007. № 4(16). С. 62–73.
5. Лукашевич А. А., Розин Л. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа. *Инженерно-строительный журнал*. 2013. № 1. С. 75–81.
6. Новожилов В. В. Теория упругости. СУДПРОМ ГИЗ, 1958. 374 с.
7. Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л. Нелинейное поведение слоя, лежащего на упругом полупространстве. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Ліра, 2016. Вип. 25. С. 146–157.*
8. Парцевский В. В. Расслоение в полимерных композитах (обзор). *Изв. РАН МТТ*. 2003. № 5. С. 62–94.

9. Чернякин С. А., Скворцов Ю. В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях. *Вестник Сиб. ГАУ им. акад. Ревякина*. 2014. Вып. 4(56). С. 249–258.
10. Akbarov S. D. Stability loss and buckling delamination. Berlin: Springer, 2012. 450 p.
11. Bathe K.-J. Finite element procedures. Prentice-Hall, 1996. 1038 p.
12. Jun L., Lui X. Y., Nan Y. Y., Xuefeng Y. Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffer integrated composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. V. 23(10). P. 1188–1196.
13. Liu P. F., Islam M. M. A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composites laminates. *Composite Struct.* 2013. Iss. 106. P. 47–56.
14. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer, 2013. 178 p.
15. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Springer-Verlag, 2008. 560 p.

## REFERENCES

1. Alexandrov, V. M. & Vorovic, I. I. (2001). Mechanics of contact interactions. Moscow: Nauka.
2. Guz, A. N. (2014). About construction of bases of failure mechanics of materials at compression along cracks (review). *Appl. Mech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 5-88.
3. Dinnik, A. N. (1946). Stability of arches. Moscow-Leningrad: OGIZ.
4. Zernin, M. V., Babin, A. P., Mishin, A. V. & Burack, V. Yu. (2007). Modeling of the contact interaction with use of statements of the “contact pseudo-environment” mechanics. *Bul. of Bryansk state tech. univ.*, No. 4(16), pp. 62-73.
5. Lukashevich, A. A. & Rozin, L. A. (2013). About the solution of contact problems of building mechanics with unilateral constraints and friction by the step-by-step analysis method. *Constr. J.*, No. 1, pp. 75-81.
6. Novozhylov, V. V. (1958). Theory of elasticity. SUDPROM GIZ.
7. Obodan, N. I., Guk, N. A. & Kozakova, N. L. (2016). Nonlinear behavior of the elastic layer lying on an elastic semi space. *Problems of computation mechanics and strength of structures*. Dnepropetrovsk: Lyra. Vol. 25, pp. 146-157.
8. Parcevskiy, V. V. (2003). Delamination in polymeric composites (review). *Rep. RAN. Solid mech.*, No. 5, pp. 62-94.
9. Chernyakin, S. A. & Skvortsov, Yu. V. (2014). Analysis of delamination grows in composite structures. *H. of Sib. GAU*, Iss. 4(56), pp. 249-258.
10. Akbarov, S. D. (2012). Stability loss and buckling delamination. Berlin: Springer.
11. Bathe, K.-J. (1996). Finite element procedures. Prentice-Hall.
12. Jun, L., Lui, X. Y., Nan, Y. Y. & Xuefeng, Y. (2016). Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffer integrated composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, V. 23(10), pp. 1188-1196.
13. Liu, P. F. & Islam, M. M. (2013). A nonlinear cohesive model for mixed-mode delamination of composites laminates. *Composite Struct.*, Iss. 106, pp. 47-56.
14. Obodan, N. I., Lebedeyev, O. G. & Gromov, V. A. (2013). Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. New-York: Springer.
15. Wriggers, P. (2008). Nonlinear finite element methods. Springer-Verlag.