УДК 517.944

ІНТЕГРО-ОПЕРАТОРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ

[1]Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Хома–Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна*

[2]*Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка,
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна*

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Досліджуються крайові періодичні задачі для лінійного та квазілінійного рівнянь гіперболічного типу, використовуючи аналітичні методи. Побудовано оператор, що переводить клас 2π-періодичних функцій у самого себе. Встановлено оцінки, необхідні для доведення теореми існування розв’язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

Ключові слова: крайова періодична задача, квазілінійне рівняння, властивості розв’язку, інтегральний оператор, аналітичний метод.

ИНТЕГРА-ОПЕРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

[1]Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Хома–Могильская С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Тернопольский национальный экономический университет,
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина*

[2]*Тернопольский национальный педагогический университет им. Владимира Гнатюка,
ул. М. Кривоноса, 2, г. Тернополь, 46027, Украина*

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Исследуются краевые периодические задачи для линейного и квазилинейного уравнений гиперболического типа, используя аналитические методы. Построен оператор, переводящий класс 2π-периодических функций в себя. Установлены оценки, необходимые для доказательства теоремы существования решения квазилинейной краевой периодической задачи.

Ключевые слова: краевая периодическая задача, квазилинейное уравнение, свойства решения, интегральный оператор, аналитический метод.

INTEGRA-OPERATOR RESEARCH OF BOUNDARY-VALUE PERIODIC PROBLEM

[1]Khoma N. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[1]Khoma-Mohylska S. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[2]Khokhlova L. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

[1]*Ternopil national economic university,
Lvivs’ka str., 11, Ternopil’, 46020, Ukraine,*

[2]*Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,
M. Krivonosa str., 2, Ternopil’, 46027, Ukraine*

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

We obtain some results concerning the investigation the boundary-value periodic problems for the linear and quasilinear non-homogeneous second order hyperbolic equations using analytical method.
The boundary-value periodic problem for differential equations in partial derivatives, including hyperbolic equations, are complicated and controversial subject of study. Boundary problems with data throughout the border region as well as the problem of non-local (including integrated) conditions for hyperbolic equations in limited areas are, generally speaking, relatively correct. Many authors link the

solvability of such problems with the problem of small denominators and use the methods of nonlinear functional analysis, the theory of implicit functions, variation methods.
We use the analytical methods in the research of periodic boundary-value problems for second order hyperbolic equations. We build the integrated operators and seek the solution in specially spaces of continuously differentiated periodic functions. By studying the properties of the internal integral of the function $\tilde{u}_H(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi$ the operator which transforms a class of periodic function $Q^-_{2\pi\times 2\pi}=\{u: u(x,t)=-u(-x,t)=u(x+2\pi,t)=u(x,t+2\pi)\}$ into itself is constructed. Estimations used in the proof of the existence theorem of periodic solutions to quasi-linear boundary-value periodic problem $v_{tt}-v_{xx}=F[v,v_t,v_x](x,t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)\right)ds$, $v(0,t)=v(\pi,t)=0$, $v(x,t+2\pi)=v(x,t)$, $(x,t)\in\mathbf{R}^2$, are established. Obtained result can be used for further research the uniqueness of the solution to quasi-linear boundary-value periodic problem.
Key words: boundary-value periodic problem, quasi-linear equation, solution properties, integral operator, analytical method.

ВСТУП

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об’єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (у тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, загалом, умовно коректними. Багато авторів пов’язують розв’язність таких задач з проблемою малих знаменників [1-3] та використовують при цьому методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Починаючи з 80-х років XX ст. ряд учених [4-6], при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх працях будують інтегральні оператори і розв’язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У нашій роботі, яка є продовженням праць [7-11], використано результати та методи досліджень [6, 10, 11].

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При дослідженні крайових періодичних задач виду $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbf{R}$, стверджується, що єдиний класичний ($u\in C^2$) розв’язок вказаних задач може існувати лише при додаткових умовах. Зокрема, у роботі О. Вейводи та М. Штедри [4] такими умовами є спеціальний клас функцій $A_3=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)\}$ та твердження, що розв’язок

$$u^0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\sin kx \tag{1}$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі $u^0_{tt}-u^0_{xx}=0$, $u^0(0,t)=u^0(\pi,t)=0$, $u^0(x,t+2\pi)=u^0(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbf{R}$ є тривіальний (тобто $a_k=b_k=0$, $k\in\mathbf{N}$). З іншого боку, в роботі П. Рабиновича [1] доведено, що класичний розв’язок крайової періодичної задачі $u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon F(x,t,u)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbf{R}$ існує у вигляді $u(x,t)=u^0(x,t)+\varepsilon w(x,t)$ без введення спеціального класу функцій і без обмеження на $u^0(x,t)$. Нами раніше встановлено [6], що результат О. Вейводи і М. Штедри вимагає додаткових умов і залежить від методу дослідження. А також показано, що і результат П. Рабиновича справедливий.

Якщо питання існування єдиного розв’язку досліджувати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin kx\,,\quad u_k(t+2\pi)=u_k(t),\tag{2}$$

то звідси випливає, що він належить до класу обмежених функцій вигляду

$$Q^{-}_{2\pi\times2\pi}=\{u:u(x,t)=-u(-x,t)=u(x+2\pi,t)=u(x,t+2\pi)\}.\tag{3}$$

Використовуючи введений клас функцій (3) і клас $Q^{-}_{2\pi}=\{\mu:\mu(z)=-\mu(-z)=\mu(z+2\pi)\}$, встановимо ряд тверджень, на основі яких можна побудувати оператор, що переводить клас періодичних функцій $Q^{-}_{2\pi\times2\pi}$ у цей же клас функцій та покажемо використання одержаних результатів для дослідження квазілінійних крайових періодичних задач.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для кожної непарної і 2π-періодичної функції $\mu(z)\in C^1(\mathbf{R})\cap Q^{-}_{2\pi}$ та $f(x,t)\in C^{1,0}(\mathbf{R}^2)\cap Q^{-}_{2\pi\times2\pi}$ лінійна крайова задача

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad (x,t)\in \mathrm{R}^2\tag{4}$$

має єдиний класичний розв’язок, який задається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}_H(x,t),\tag{5}$$

де $u^0(x,t)$ – розв’язок відповідної однорідної крайової задачі ($f(x,t)\equiv0$), а $\tilde{u}_H(x,t)$ – частинний розв’язок лінійної неоднорідної крайової задачі (4).

Вивчаючи властивості внутрішнього інтегралу функції (оператора Даламбера)

$$\tilde{u}_H(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi,\tag{6}$$

можна дослідити існування 2π-періодичних розв’язків крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Скористаємося позначенням $K(x,t,\tau)=\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi$.

Лема 1. *Якщо* $f(x,t)\in C(\mathbf{R}^2)\cap Q^{-}_{2\pi\times2\pi}$, *то*

1) $K(x+2\pi,t,\tau)=K(x,t,\tau)$;

2) $K(x,t+2\pi,\tau)=K(x,t,\tau)$;

3) $K(x,t,\tau+2\pi)=K(x,t,\tau)$;

4) $K(-x,t,\tau)=-K(x,t,\tau)$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості твердження 1) леми 1. Доведемо друге твердження:

$$K(x,t+2\pi,\tau)=\int_{x-(t+2\pi)+\tau}^{x+(t+2\pi)-\tau}f(\xi,\tau)d\xi=\int_{x-t+\tau-2\pi}^{x-t+\tau}f(\xi,\tau)d\xi+\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi+\int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+2\pi}f(\xi,\tau)d\xi=$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{0}^{2\pi} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi = K(x,t,\tau).$$

Аналогічно доводиться твердження 3) і 4) леми 1.

Лема 2. *Нехай* $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$. *Тоді оператор, визначений формулою*

$$(Pf)(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi,s)d\xi \right) d\tau \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(x,t,s)ds \right) d\tau \qquad (7)$$

при кожній функції $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q^-_{2\pi}$ *переводить функцію* f *із класу* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ *в клас* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$, *причому*

$$(Pf)(0,t) = 0, \quad (Pf)(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (8)$$

Доведення. Покажемо, що функція (Pf) задовольняє крайові умови (8). На основі (7) при $x=0$ одержуємо

$$(Pf)(0,t) = 0 + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi,s)d\xi \right) d\tau. \qquad (9)$$

Оскільки при $f(x,t) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ інтеграл

$$\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}, \qquad (10)$$

то на основі (9) і (10) маємо $(Pf)(0,t)=0$, тобто функція (Pf) задовольняє першу крайову умову (8). Тепер, покладаючи $x=\pi$ у формулі (7), одержуємо

$$(Pf)(\pi,t) = \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi,s)d\xi \right) d\tau. \qquad (11)$$

Доведемо, що при $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ та $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q^-_{2\pi}$ інтеграли

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)d\alpha \equiv 0; \quad \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Справді,

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha \equiv 0;$$

$$\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta = \int_{-t+\tau}^{0} f(\pi+\eta,\tau)d\eta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta =$$

$$= \int_0^{t-\tau} f(\pi-\varsigma,\tau)d\varsigma + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta = -\int_0^{t-\tau} f(\pi+\varsigma,\tau)d\varsigma + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta \equiv 0.$$

Отже, на основі (11) і доведених рівностей маємо $(Pf)(\pi,t)=0$, $t\in\mathbf{R}$. Отже, і друга крайова умова (8) виконується.

Доведемо тепер справедливість рівностей

$$(Pf)(x+2\pi,t)=(Pf)(x,t); \tag{12}$$

$$(Pf)(x,t+2\pi)=(Pf)(x,t); \tag{13}$$

$$(Pf)(-x,t)=-(Pf)(x,t). \tag{14}$$

Оскільки $(Pf)(x,t)\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, то спочатку доведемо, що властивостями (12)-(14) володіє розв'язок $u^0(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha$ однорідної крайової періодичної задачі $u_{tt}^0-u_{xx}^0=0$, $u^0(0,t)=u^0(\pi,t)=0$, $u^0(x,t+2\pi)=u^0(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbf{R}$.

Нехай $\mu(z)\in C(\mathbf{R})\bigcap Q_{2\pi}^{-}$. Тоді

$$u^0(x+2\pi,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x-2\pi}^{t+x+2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x-2\pi}^{t-x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t+x+2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=$$
$$=0+u^0(x,t)+0=u^0(x,t),$$

$$u^0(x,t+2\pi)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x+2\pi}^{t+x+2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\eta+2\pi)d\eta=u^0(x,t);$$

$$u^0(-x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t-x}\mu(\alpha)d\alpha=-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha=-u^0(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що властивостями (12)–(14) володіє і розв'язок

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t,s)ds\right)d\tau. \tag{15}$$

Справді,

$$\tilde{u}(x+2\pi,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(K(x+2\pi,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x+2\pi,t,s)ds\right)d\tau=\tilde{u}(x,t);$$

$$\tilde{u}(x,t+2\pi)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+2\pi}\left(K(x,t+2\pi,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t+2\pi,s)ds\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t,s)ds\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_t^{t+2\pi}\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t,s)ds\right)d\tau=$$

$$=\tilde{u}(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t,s)ds\right)d\tau=$$

$$=\tilde{u}(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(K(x,t,\tau)-\frac{2\pi}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(x,t,s)ds\right)d\tau\equiv\tilde{u}(x,t).$$

$$\tilde{u}(-x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{-x-t+s}^{-x+t-s} f(\xi,s)\,d\xi\right)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(-\eta,\tau)\,d\eta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x+t-s}^{x-t+s} f(-\eta,s)\,d\eta\right)d\tau=-\tilde{u}(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Використовуючи доведені властивості для функцій $u^0(x,t)$ і $\tilde{u}(x,t)$ та зображення оператора $(Pf)(x,t)\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, переконуємося у справедливості тверджень леми 2.

Одержані результати дозволяють використовувати аналітичний метод для дослідження нелінійних та квазілінійних крайових періодичних задач. Покажемо це на прикладі такої квазілінійної крайової 2π-періодичної задачі:

$$v_{tt}-v_{xx}=F[v,v_t,v_x](x,t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)\big)ds, \tag{16}$$

$$v(0,t)=v(\pi,t)=0,\quad v(x,t+2\pi)=v(x,t),\quad (x,t)\in\mathbf{R}^2. \tag{17}$$

Теорема. *Нехай для кожної функції* $v(x,t)\in C^2(\mathbf{R}^2)\cap Q^-_{2\pi\times2\pi}$ *функція* $F[v,v_t,v_x](x,t)=f(x,t,v(x,t),v_t(x,t),v_x(x,t))\in C^1(\mathbf{R}^2)\cap Q^-_{2\pi\times2\pi}$. *Тоді функція* $v(x,t)=$ $=(PF[v,v_t,v_x])(x,t)$, *визначена формулою*

$$v(x,t)=(PF[v,v_t,v_x])(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}F[v,v_t,v_x](\xi,\tau)\,d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x-t+s}^{x+t-s}F[v,v_t,v_x](\xi,s)\,d\xi\right)d\tau\equiv$$

$$\equiv z(x,t)+(P_0F[v,v_t,v_x])(x,t) \tag{18}$$

є 2π*-періодичним розв'язком задачі* (16), (17).

Доведення. Те, що функція $v(x,t)$, визначена інтегральним рівнянням (18), задовольняє умови (17), було показано при доведенні тверджень леми 2. Тепер доведемо виконання рівності (16). Обчислимо похідні другого порядку v_{tt} та v_{xx}:

$$v_t(x,t)=\frac{1}{2}\big(\mu(t+x)-\mu(t-x)\big)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x-t+s}^{x+t-s}F[v,v_t,v_x](\xi,s)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\Bigg(F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)+F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)\big)ds\Bigg)d\tau;$$

$$v_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)+F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)\right)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\right)ds\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x,t)+F\left[v,v_t,v_x\right](x,t)\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)+F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)\right)ds$$

або

$$v_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\right)+F\left[v,v_t,v_x\right](x,t)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)+F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)\right)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\right)ds\right)d\tau; \qquad (19)$$

$$v_x(x,t)=\frac{1}{2}\left(\mu(t+x)-\mu(t-x)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-\tau,\tau)-F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+\tau,\tau)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)-F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)\right)ds\right)d\tau;$$

$$v_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)}-\frac{\partial F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\right)ds\right)d\tau. \qquad (20)$$

На основі рівностей (19) і (20) знаходимо

$$v_{tt}-v_{xx}=F\left[v,v_t,v_x\right](x,t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F\left[v,v_t,v_x\right](x+t-s,s)+F\left[v,v_t,v_x\right](x-t+s,s)\right)ds\,,$$

що й потрібно було довести.

Встановимо ряд оцінок, необхідних для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі (16), (17).

Лема 3. *Нехай* $f(x,t)$ *– неперервна на прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}=\{0\le x\le 2\pi, 0\le t\le 2\pi\}$ *функція. Тоді для ядра* $K(x,t,\tau)=\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi$ *оператора Д'Аламбера* $\left(\tilde{P}f\right)(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi$ *справедлива оцінка*

$$\left|K(x,t,\tau)\right|\le M_0\left|t-\tau\right|,$$

де $M_0=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Pi}_{2\pi}}\left|f(x,t)\right|$.

Лема 4. *Нехай* $f(x,t)$ *– неперервна на прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$ *функція. Тоді*

$$\left|\int_0^t\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(x,t,s)\,ds\right)d\tau\right|\le\frac{1}{2}\left(2\pi t-t^2\right)M_0\equiv\frac{M_0}{2}\beta_1(t)\,,$$

де $\beta_1(t)=2\pi t-t^2$, *причому* $\beta_1(t)\le\pi^2\ \ \forall t\in[0,2\pi]$.

Доведення. Враховуючи твердження леми 3, маємо

$$\left|\int_0^t\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(x,t,s)\,ds\right)d\tau\right|=\left|\int_0^t\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}K(x,t,s)\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_t^{2\pi}K(x,t,s)\,ds\right)d\tau\right|=$$

$$=\left|\int_0^t K(x,t,\tau)-\frac{t}{2\pi}\int_0^t K(x,t,s)\,ds-\frac{t}{2\pi}\int_t^{2\pi}K(x,t,s)\,ds\right|\le$$

$$\le\left|\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)\int_0^t\left|K(x,t,\tau)\right|d\tau\right|+\left|\frac{t}{2\pi}\int_t^{2\pi}\left|K(x,t,s)\right|ds\right|\le\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)M_0\int_0^t\left|t-\tau\right|d\tau+\left|\frac{M_0t}{2\pi}\int_t^{2\pi}\left|t-s\right|ds\right|=$$

$$=\frac{M_0}{2}\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)\left(-(t-\tau)^2\right)\Big|_0^t+\frac{M_0t}{4\pi}(s-t)^2\Big|_t^{2\pi}=\frac{M_0}{2}\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)t^2+\frac{M_0t}{4\pi}(2\pi-t)^2=$$

$$=\frac{M_0}{4\pi}\left((2\pi-t)t^2+t(2\pi-t)^2\right)=\frac{M_0}{4\pi}\left(2\pi t^2-t^3+4\pi^2t-4\pi t^2+t^3\right)=$$

$$=\frac{M_0}{4\pi}\left(4\pi^2t-2\pi t^2\right)=\frac{M_0}{2}\left(2\pi t-t^2\right)\equiv\frac{M_0}{2}\beta_1(t)\,,$$

що й потрібно було довести.

Одержані оцінки ми використаємо в подальшому для доведення теореми єдиності розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math*. 1967. **20**, № 1. P. 145–205.
2. Brezis H., Coron J. M., Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. *Comm. Pure Appl. Math*. 1980. Vol. **33**. P. 667–689.
3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка, 2002. 416 с.
4. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений. *Дифференциальные уравнения*. 1984. **XX**, № 10. С. 1733–1739.
5. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв’язки однорідної крайової періодичної задачі. *Волинський матем. вісник*. 1995. Вип. 2. С. 179–182.
6. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку I. *Укр. Мат. журн*. 2005. **57**, № 7. С. 912–921.
7. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Властивості 2π-періодичних розв’язків крайової задачі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 10. С. 18–21.
8. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Окремий випадок існування 2π-періодичних розв’язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку. *Доповіді НАН України*. 2012. № 2. С. 35–41.
9. Хома-Могильська С. Г. Представлення розв’язку крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика*. 2014. Вип. 25, № 1. С. 133–136.
10. Khoma G. P., Khoma N. G., Khoma-Mohylska S. G. Existense T-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. *Modern scientific research and their practical application*. 2014. Vol. J21414-002. P. 9–13.
11. Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г. Умови існування 2π-періодичного гладкого розв’язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 257–264.

REFERENCES

1. Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., 20, No. 1, pp. 145-205.
2. Brezis, H., Coron, J. M. & Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. Comm.Pure Appl.Math., Vol. 33, pp. 667-689.
3. Ptashnyk, B. Y., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Unlocal regional tasks are for equalizations with the derivatives of part. Kiev: Naukova dumka.
4. Veyvoda, O. & Shtedry, M. (1984). Existence of classic periodic decisions of wave equalization. Connection of теоретико-числового character of period and geometrical properties of decisions.. Differentsialnyye uravneniya, XX, No. 10, pp. 1733-1739.
5. Khokhlova, L. H., Khoma, N. H. & Petrivskyi, Ya. B. (1995). Banal upshots of homogeneous regional periodic task. Volynskyi matem. visnyk, Iss. 2, pp. 179-182.
6. Mytropolskyi, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Terms of existence of decisions of regional periodic task for heterogeneous linear hyperbolical equalization of the second order I. Ukr. Mat. zhurn., 57, No. 7, pp. 912-921.
7. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2010). Properties of 2π-periodic decisions of regional task. Dopovidi NAN Ukrainy, No. 10, pp. 27-32.
8. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2012). A separate case of existence of 2π-periodic decisions of regional tasks is for hyperbolical equalization of the second order. Dopovidi NAN Ukrainy, No. 2, p. 35-41.
9. Khoma-Mohylska, S. H. (2014). Presentation of decision of regional periodic task is for hyperbolical equalization of the second order. Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriia: Matematyka i informatyka, Iss. 25, No. 1, pp. 133-136.
10. Khoma, G. P., Khoma, N. G. & Khoma-Mohylska, S. G. (2014). Existense T–periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. Modern scientific research and their practical application, Vol. J21414-002, pp. 9-13.
11. Khoma, N. H., Khoma-Mohylska, S. H. & Khokhlova, L. H. (2016). Existence conditions of 2π-periodic smooth solution to the quasi-linear equation of hyperbolic type. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 257-264.