

ЛІТЕРАТУРА

1. Тищенко С. С., Швайко В. М., Гурідова В. О. Дослідження кінематичних параметрів руху частинки ґрунту за прямолінійним лезом робочого органу. *Вісник Дніпропетровського державного аграрно-економічного університету*. 2014. № 2(34). С. 63–66.
2. Мещерский И. В. Курс теоретической механики. Ч. 1. Москва: Госиздат, 1930. 202 с.
3. Д'яконов С. О. Обґрунтування параметрів технологічного процесу і робочих органів сівалки прямого сіву: Автореф. дис... канд. техн. наук / Харків, 2007. 20 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

REFERENCES

1. Tishchenko, S., Shvayko, V. & Guridova, V. (2014). Studies kinematic parameters motion of a soil particle on the rectilinear blade of the working body. *Visnyk Dnipropetrovs'koho derzhavnoho ahrarno-ekonomichnoho universytetu*, No. 2(34), pp. 63-66.
2. Meshcherskiy, I. (1930). Course of theoretical mechanics, Part. 1. Moscow: Gosizdat.
3. D'yakonov, S. (2007). Justification parameters of technological process and working bodies seeder for direct seeding. (Extended abstract of Cand. Sc. thesis). Kharkiv, Ukraine.
4. Kamke, E. (1976). Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka.

УДК 539.374

ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНКИ

Шевченко А. Г., ¹Шнейдер В. П.

¹Завод «Мастер-Профи»,
ул. Курсантская, 23, г. Дніпро, 49000

artur_shev91@mail.ru

В рамках теории микродеформации исследуется локализация деформации в форме образования шейки, при двухосном растяжении однородной тонкой пластины постоянной толщины. Используя ранее доказанное утверждение о том, что бифуркация процесса деформирования упругопластического тела достигается на путях полного догружения, задача бифуркации сведена к линейной задаче на собственные значения. В частном случае монотонного нагружения, когда не возникают частичные разгрузки в рамках предложенного подхода, получены формулы для определения критической нагрузки и найдено решение для шейки конечной длины.

Ключевые слова: бифуркация процесса деформирования, локализация пластической деформации, плоское напряженное состояние, шейкообразование, разрыв перемещений.

УТВОРЕННЯ ШИЙКИ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ ПРИ ДВОВІСНОМУ РОЗТЯГНЕННІ ПЛАСТИНКИ

Шевченко А. Г., ¹Шнейдер В. П.

¹Завод «Мастер-Профи»,
вул. Курсантська, 23, м. Дніпро, 49000

artur_shev91@mail.ru

При двоосному розтягненні за межами пружності в тонкій пластинці може виникнути локальне утоншення, тобто утворюється шийка. У рамках теорії мікродеформації досліджується локалізація деформації у формі утворення шийки, при двоосному розтягуванні однорідної тонкої пластини постійної товщини. Раніше було показано, що бифуркація процесу деформування досягається на шляхах повного довантаження, що дозволяє зводити задачу бифуркації лінійної задачі на власні значення. В окремому випадку монотонного навантаження, коли не виникають часткові розвантаження в рамках запропонованого підходу отримані формули для визначення критичного навантаження і знайдено розв'язок для шийки обмеженої довжини.

Ключові слова: бифуркація процесу деформування, локалізація пластичної деформації, плоский напружений стан, шийкоутворення, розрив переміщень.

FORMATION OF A NECK OF FINITE LENGTH UNDER BIAxIAL STRETCHING OF THE PLATE

Shevchenko A. G., ¹Shneider V. P.

¹Factory "Master-Profi",
Kursantskaya Str., 23, Dnepr, 49000

artur_shev91@mail.ru

Within the framework of the theory of microdeformations, for the case of biaxial tension under the plane stress conditions, the fields of rates of displacements and changes in stresses in the vicinity of the apex of the assigned line of discontinuity of displacements were built in a closed analytical form.

It was established that the solution has the root peculiarity at the apex of the neck. For the formulation of a fracture criterion, the average values of the fields of rates of change in stresses in the vicinity of the apex of the neck of discontinuity were introduced, by analogy with the concept of the averaged stresses under the Novozhilov fracture condition.

The dependence of the length of localization line on subcritical stresses was obtained from the condition of the limitation of the angle of the fracture of the trajectory of load (the angle between the directions of the deviator of subcritical stress and the rate of change in stresses), which follows from the theory of microdeformation. It was established that the localization line in the initial state can have dimension, compared with the characteristic size of the material (in our case, with the size of a grain).

Key words: bifurcation of the deformation process, localization of plastic strain, plane stress, necking, displacement gap.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ условий образования шейки при двухосном растяжении однородной пластинки постоянной толщины, материал которого подчиняется ассоциированному закону течения с гладкой поверхностью текучести, проведенный в работах [5, 9], показал, что такой подход не дает результатов, отвечающих действительности. В работе [7] при исследовании образования шейки применялись определяющие соотношения, которые включают скорость пластической дилатансии, что несколько улучшило результат. Близкими к эксперименту оказались результаты, полученные в [8] с использованием определяющих соотношений деформационной теории пластичности в скоростях. Однако, деформационная теория ограничена условием простого нагружения, или близкого к нему, и нарушает условие непрерывности при ортогональном догружении. В работе [4] использовалась определяющая модель для описания деформации при произвольном процессе нагружения, как утверждают авторы, для материалов с произвольной поверхностью текучести, вводя дополнительно скорость тангенциальной деформации.

Бифуркация процесса деформирования сопровождается изломом траектории нагружения во внутренних точках тела, кроме того, сложный процесс нагружения может предшествовать точке бифуркации. Все упомянутые выше простейшие теории не описывают в полной мере деформации при сложном нагружении. Следовательно, они не могут быть использованы и при решении задач устойчивости за пределами упругости. Наиболее выпукло этот вопрос отразился в так называемом парадоксе устойчивости [6]. В настоящей работе в рамках теории микродеформации [1, 3], получившей достаточно полное экспериментальное подтверждение, исследуется влияние истории нагружения на условия локализации деформации в форме шейки, при двухосном растяжении однородной тонкой пластины постоянной толщины.

Локализация пластической деформации в форме образования шейки. При плоском напряженном состоянии допускается возможность скачка нормальной составляющей перемещений. Подобный скачок приводит к резкому утоншению («шейка») или утолщению («валик») пластинки вдоль линии разрыва. Такая линия является математической идеализацией наблюдаемого в опытах локального образования шейки.

Рассмотрим двухосное растяжение однородной тонкой пластины постоянной толщины h . Примем, что в некоторый момент нагружения на пластинке возникает линия локализации. Компоненты нормали в системе координат (x_1, x_2) представим в виде:

$$n_1 = \cos \psi, \quad n_2 = \sin \psi,$$

где угол ψ отсчитывается от оси x_1 в направлении против часовой стрелки, как показано на рис. 1.

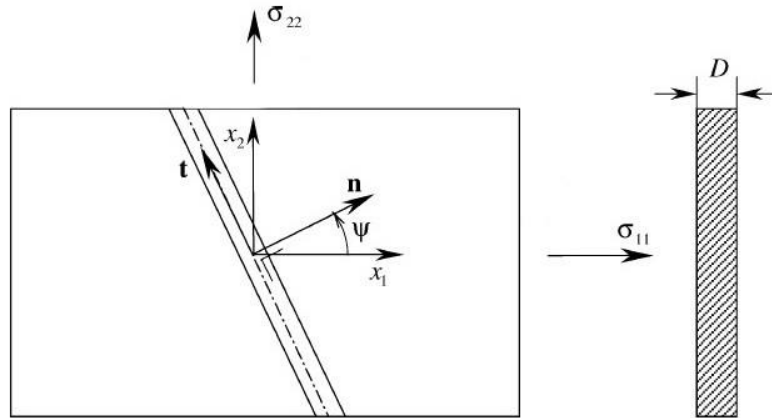


Рис. 1. Линия образования шейки в пластинке

Обозначим через $\Delta(\cdot)$ разность полей внутри и вне полосы, т.е.

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-, \quad (1)$$

где $(\cdot)^+$ и $(\cdot)^-$ значения внутри и вне полосы, соответственно. Тогда разность скоростей внутри и вне полосы будет

$$\Delta v_i = g_i (x_1 \cos(\psi) + x_2 \sin(\psi)) = g_i (x_r n_r). \quad (2)$$

Тогда разность градиентов скоростей примет вид

$$\Delta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \Delta v_\alpha}{\partial x_\beta} = g'_\alpha (x_\gamma n_\gamma) n_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \quad (3)$$

Уравнения равновесия в области шейки представим в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \Delta D_{33}) = 0, \quad (4)$$

где ΔD_{33} – разность скоростей деформации по толщине внутри и вне полосы, т.е.

$$\Delta D_{33} = \Delta \dot{D} / D, \quad (5)$$

где D – толщина пластинки.

Пусть $X = n_\alpha x_\alpha$, тогда $\partial f(X) / \partial x_\alpha = n_\beta \partial f(X) / \partial X$ и из уравнений равновесия (4) получаем

$$\begin{cases} n_1 \Delta \dot{\sigma}_{11} + n_2 \Delta \dot{\sigma}_{12} + \sigma_1 n_1 \Delta D_{33} = 0, \\ n_1 \Delta \dot{\sigma}_{12} + n_2 \Delta \dot{\sigma}_{22} + \sigma_2 n_2 \Delta D_{33} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом связь материальной производной $\dot{\sigma}_{ij}$ с производной по Яуману тензора напряжений Коши σ_{ij}^∇ следует из

$$\dot{\sigma}_{11} = \sigma_{11}^\nabla, \quad \dot{\sigma}_{22} = \sigma_{22}^\nabla, \quad \dot{\sigma}_{12} = \sigma_{12}^\nabla - (\sigma_1 - \sigma_2) W_{12}. \quad (7)$$

Определяющие соотношения теории микродеформации при плоском напряженном состоянии представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{11} = E_{1111}D_{11} + E_{1122}D_{22}, \\ \sigma_{22}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{22} = E_{2211}D_{11} + E_{2222}D_{22}, \\ \sigma_{12}^{\nabla} &= \dot{\sigma}_{12} + (\sigma_1 - \sigma_2)W_{12} = 2E_{1212}D_{12}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из условия несжимаемости следует, что

$$\Delta D_{33} = -\Delta D_{11} - \Delta D_{22} = n_1 g'_1 + n_2 g'_2. \tag{9}$$

Подставляя определяющие соотношения (8) в уравнение равновесия (4) и учитывая (3), получаем систему линейных однородных уравнений для определения g'_1 и g'_2 , которые описывают разрыв градиента скорости. Для существования ненулевых решений для g'_1 и g'_2 определитель системы должен быть равен нулю. Это приводит к биквадратному уравнению относительно переменной $\nu \equiv n_1/n_2$, ($n_1^2 + n_2^2 = 1$):

$$\begin{aligned} & (E_{1212}E_{2222} - 2E_{1212}\sigma_{22} - E_{2222}\sigma_{11} + E_{2222}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}^2)\nu^4 + 2\left(E_{1111}E_{2222} - \right. \\ & \left. - 2E_{1111}\sigma_{22} - E_{1122}E_{1212} - E_{1122}E_{2211} + \frac{1}{2}E_{1122}\sigma_{11} + \frac{1}{2}E_{1122}\sigma_{22} - E_{1212}E_{2211} + \right. \\ & \left. + E_{1212}\sigma_{11} + E_{1212}\sigma_{22} + \frac{1}{2}E_{2211}\sigma_{11} + \frac{1}{2}E_{2211}\sigma_{22} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2\right)\nu^2 + \\ & \left. 2E_{1111}E_{1212} + E_{1111}\sigma_{11} - E_{1111}\sigma_{22} + 2E_{1212}\sigma_{11} - \sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} = 0. \right. \end{aligned} \tag{10}$$

В случае прямолинейной траектории нагружения $\sigma_{22} = K\sigma_{11}$ интенсивность напряжений принимает вид $\sigma_u = |\sigma_{11}| \sqrt{K^2 - K + 1}$. Если задать K , то изменяя σ_{11} с некоторым шагом от значения $|\sigma_{11}|_0 = \sigma_s / \sqrt{K^2 - K + 1}$, можно по формулам в работе [3] определить матрицу жесткости $E_{\alpha\beta\kappa\gamma}$ определяющих соотношений и тем самым вычислить корни биквадратного уравнения (10). Критическое напряжение σ_{11}^{kp} достигнется, когда среди корней впервые появятся действительные. Для упрощения расчетов удобнее задавать изменение α при заданном K .

ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осуществим переход к системе координат $0\hat{x}_1\hat{x}_2$ с использованием матрицы вращения Q , которая определяет поворот осей на угол \mathcal{G}_0 по отношению к системе $0x_1x_2$ (вращение против часовой стрелки принято положительным) по формуле:

$$\hat{x} = [Q^T] \cdot x, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_0 & \sin \mathcal{G}_0 \\ -\sin \mathcal{G}_0 & \cos \mathcal{G}_0 \end{bmatrix}.$$

Скорости изменения компонент первого тензора Пиола-Кирхгофа, скорости перемещений и ее градиент могут быть выражены в системе отсчета $0\hat{x}_1\hat{x}_2$ следующим образом:

$$\Delta \hat{t} = Q^T \Delta t Q, \quad \hat{v} = Q^T \bar{v}, \quad \hat{\nabla} \hat{v} = Q^T \nabla \bar{v} Q.$$

Определяющие соотношения представим в виде:

$$\Delta \hat{\sigma} = \hat{E} (\hat{\nabla} v)^T,$$

где матрица касательной жесткости после преобразования четвертого порядка определяется как:

$$\hat{E}_{ijhk} = Q_{li} Q_{mj} E_{lmno} Q_{nh} Q_{ok},$$

и индексы принимают значения 1 и 2.

Следуя работе [13], введем функцию тока $\hat{\psi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ в виде:

$$\hat{\psi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{\hat{t}_{22}^{\infty}}{2G_q} \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \left[A_j f(\hat{z}_j) \right],$$

где

$$f(\hat{z}_j) = \hat{z}_j^2 - \hat{z}_j \sqrt{\hat{z}_j^2 - l^2} + l^2 \ln \left(\hat{z}_j + \sqrt{\hat{z}_j^2 - l^2} \right),$$

$$\hat{z}_j = \hat{x}_1 + W_j \hat{x}_2, W_j = \frac{\sin \vartheta_0 + \Omega_j \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 - \Omega_j \sin \vartheta_0}.$$

Для определения постоянных A_j воспользуемся граничными условиями на линии локализации. Они основаны на равенстве нулю скорости изменения касательных напряжений и непрерывности нормальных компонент первого тензора Пиола-Кирхгофа, а также непрерывности скоростей нормальных перемещений бифуркационного решения. Для разности полей соответственно получаем:

$$\Delta \hat{t}_{22}(\hat{x}_1, 0^{\pm}) = -\hat{t}_{22}^{\infty}, \quad \forall |\hat{x}_1| < l,$$

$$\left[\Delta \hat{t}_{21}(\hat{x}_1, 0^{\pm}) \right] = 0, \quad \forall |\hat{x}_1| < l,$$

$$\left[\Delta \hat{v}_2(\hat{x}_1, 0) \right] = 0, \quad \forall |\hat{x}_1| < l.$$

Подставляя построенное решение в граничные условия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A_j :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{12} & c_{22} \\ -c_{21} & c_{11} & -c_{22} & c_{12} \\ c_{31} & c_{41} & c_{32} & c_{42} \\ -c_{41} & c_{31} & -c_{42} & c_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} [A_1] \\ \operatorname{Im} [A_1] \\ \operatorname{Re} [A_2] \\ \operatorname{Im} [A_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

коэффициенты которой определяются по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu c_{1j} = \hat{E}_{1112} - \hat{E}_{1222} - \operatorname{Re} [W_j] \left[\hat{E}_{1111} - 2\hat{E}_{1122} - \hat{E}_{1221} + \hat{E}_{2222} + \right. \\ \quad \left. + \operatorname{Re} [W_j] (2\hat{E}_{1121} - 2\hat{E}_{2122} + \operatorname{Re} [W_j] \hat{E}_{2121}) + \right. \\ \quad \left. + \operatorname{Im} [W_j]^2 (2\hat{E}_{1121} - 2\hat{E}_{2122} + 3\operatorname{Re} [W_j] \hat{E}_{2121}) \right], \\ 2\mu c_{2j} = \operatorname{Im} [W_j] \left[\hat{E}_{1111} - 2\hat{E}_{1122} - \hat{E}_{1221} + \hat{E}_{2222} + \right. \\ \quad \left. + \operatorname{Re} [W_j] (4\hat{E}_{1121} - 4\hat{E}_{2122} + 3\operatorname{Re} [W_j] \hat{E}_{2121}) - \operatorname{Im} [W_j] \hat{E}_{2121} \right], \\ 2\mu c_{3j} = -\hat{E}_{1221} + \operatorname{Re} [W_j] \left[\hat{E}_{1121} - \hat{E}_{2122} + \operatorname{Re} [W_j] \hat{E}_{2121} - \operatorname{Im} [W_j] \hat{E}_{2121} \right], \\ 2\mu c_{4j} = \operatorname{Im} [W_j] \left[-\hat{E}_{1121} + \hat{E}_{2122} - 2\operatorname{Re} [W_j] \hat{E}_{2121} \right], \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

Можно легко показать, что обращение в ноль определителя системы соответствует линии разрыва бесконечной длины.

На линии локализации полосы $\hat{x}_2 = 0$, тогда:

$$\hat{\psi}(\hat{x}_1, 0) = \frac{\hat{\sigma}_{22}^{\infty}}{2G_q} (Re[A_1] + Re[A_2]) \times \left(\hat{x}_1^2 - \hat{x}_1 \sqrt{\hat{x}_1^2 - l^2} + l^2 \ln \left(\hat{x}_1 + \sqrt{\hat{x}_1^2 - l^2} \right) \right).$$

Используя полученное решение, можно определить поля скоростей перемещений и деформаций, и, с помощью определяющих соотношений (2), построить скорости изменения напряжений в окрестности вершины полосы локализации. В вершине линии скольжения будут возникать корневые особенности. Сформулируем критерий вязкого разрушения, используя критерий разрушения Новожилова [2] и осреднение бесконечных напряжений в окрестности вершины шейки. Учтем, что при вязком разрушении мы имеем дело с возникновением локализованного течения, в котором прочность тела с разрезом определяется средними значениями напряжений в малой окрестности вершины полосы. При этом «квантом» скольжения можно считать вектор Бюргера на уровне монокристалла или локализованный сдвиг в пределах зерна поликристаллического металла. В нашем случае решается задача в скоростях, что приводит к необходимости новой формулировки критерия развития локализации, используя понятие средних скоростей в пределах зерна

$$d\hat{\sigma}_{ij}^{\Delta} = \frac{1}{b} \int_l^{l+b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} dx_1.$$

Для построения зависимости длины шейки от нагрузки воспользуемся условием полного догружения:

$$tg \beta \leq \frac{\cos \alpha - \kappa F(\alpha)}{\sin \alpha},$$

где β – угол излома траектории нагружения в точке бифуркации.

А величина угла определяется по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{\tau_0 + \kappa(t)}{r(t)},$$

где τ_0 – предел текучести, $r(t) = \sqrt{r(t) : r(t)}$, $\kappa(t) = \int_0^t \frac{\mu F}{r(t)(1 + \mu \Omega)} r : dr$.

Угол излома определяется по формуле

$$\cos \beta = \frac{d\hat{S}^{\hat{\sigma}} : d\hat{S}^0}{\sqrt{d\hat{S}^{\hat{\sigma}} : d\hat{S}^{\hat{\sigma}}} \sqrt{d\hat{S}^0 : d\hat{S}^0}}.$$

где $d\hat{S}^{\hat{\sigma}} = d\hat{S}^{\Delta} + d\hat{S}^0$.

Предполагая, что шейка возникает при условии, что $l/b = 1$, можем получить параметры, при которых она образуется.

Таблица 1

К	$\sigma_{\text{крит.огранич}}$	$\sigma_{\text{крит.беск}}$
0	1.00032013	2.244255116
0.2	1.091739108	2.262683668
1	1.001045155	1.7792316

Таким образом, локализация шейки в начальном состоянии может иметь размер, сравнимый с размером зерна, что подтверждается многочисленными исследованиями пластической деформации поликристалла.

ВЫВОДЫ

1. В рамках теории микродеформаций, для случая простого нагружения в условиях плоского напряженного состояния, построены в замкнутом аналитическом виде поля скоростей перемещений и изменений напряжений в окрестности вершині шейки.
2. Было установлено, что решение имеет корневую особенность при вершине. Для формулировки критерия разрушения введены средние значения полей скоростей изменения напряжений в окрестности вершины шейки, по аналогии с понятием осредненных напряжений в условии разрушения Новожилова.
3. Из условия ограниченности угла излома траектории нагружения (угла между направлениями девиатора докритического напряжения и скорости изменения напряжений), которое следует из теории микродеформации, получена зависимость длины шейки от докритических напряжений. Установлено, что линия шейки в начальном состоянии может иметь размер, сравнимый с характерным размером материала (в нашем случае размером зерна).

ЛІТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации. *ПММ*. 1986. Т. 50, вып. 6. С. 890–897.
2. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
3. Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A. Theory of plasticity, taking into account micro stresses. *Advances in Mechanics*. 1992. Vol. 15, No 3-4. P. 3–39.
4. Hashiguchi K., Protasov A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. *International Journal of Plasticity*. 2004. Vol. 20. P. 1909–1930.
5. Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*. 1952. Vol. 1. P. 19–30.
6. Hutchinson J. W. Plastic buckling. *Advances in Appl. Mech.* 1974. Vol. 14. P. 67–144.
7. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 1975. Vol. 23. P. 371–394.
8. Storen S., Rice J. R. Localized necking in thin sheet. *J. Mech. Phys. Solids*. 1975. Vol. 23. P.421–441.
9. Swift H. W. Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*. 1952. Vol. 1. P. 1–18.

REFERENCES

1. Kadashevich, Yu. I., Novozhilov, V. V. & Chernyakov, Yu. A. (1986). Theory of plasticity and creep, taking into account microdeformation. *PMM*, Vol. 50, Iss. 6, pp. 890-897.
2. Novozhilov, V. V. (1969). On the necessary and sufficient criteria for brittle strength. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, Vol. 33, Iss. 2, pp. 212-222.
3. Kadashevich, Yu. I. & Chernyakov, Yu. A. (1992). Theory of plasticity, taking into account micro stresses. *Advances in Mechanics*, Vol. 15, No. 3-4, pp. 3-39.
4. Hashiguchi, K. & Protasov, A. (2004). Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, pp. 1909-1930.
5. Hill, R. (1952). On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 19-30.
6. Hutchinson, J. W. (1974). Plastic buckling. *Advances in Appl. Mech.*, Vol. 14, pp. 67-144.
7. Rudnicki, J. W. & Rice, J. R. (1975). Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394.
8. Storen, S. & Rice, J. R. (1975). Localized necking in thin sheet. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 421-441.
9. Swift, H. W. (1952). Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 1-18.