УДК 534.113

КОРОТКИЙ НАРИС ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ НЕКЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

До 170-річчя проблеми

Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О.

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, Україна

anatdem@ukr.net

Наведено короткий огляд досліджень динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням методом двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань, який у деяких випадках дозволяє побудувати точні розв'язки задач. Супровідні коливання зумовлені наявністю рухомого інерційного навантаження. Як приклад, розглянуто коливання та стійкість балки Тимошенко за дії рухомого інерційного навантаження.

Ключові слова: динаміка, рухоме навантаження, пружні системи.

КРАТКИЙ ОЧЕРК ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ НЕКЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

К 170-летию проблемы

Демьяненко А. Г., Гуридова В. А.

Днепропетровский государственный аграрно-економический университет, ул. Сергея Ефремова, 25, г. Днепр, Украина

anatdem@ukr.net

Приведен краткий обзор исследований по динамике упругих систем с подвижной инерционной нагрузкой методом двухволнового представления колебаний в виде суперпозиции собственных и сопровождающих колебаний, который позволяет в некоторых случаях построить точные решения задач в рамках исходных предпосылок. Сопровождающие колебания обусловлены подвижной инерционной нагрузкой. В качестве примера рассмотрены колебания и устойчивость балки Тимошенко под действием подвижной инерционной нагрузки.

Ключевые слова: динамика, подвижная загрузка, упругие системы.

BRIEF SKETCH THE DYNAMICS OF ELASTIC SYSTEMS WITH MOVABLE INERTIAL LOAD NONCLASSICAL BY SEPARATION OF VARIABLES

To the 170 anniversary of the problem

Demianenko A. G., Guridova V. A.

Dnepropetrovsk State University of Agriculture and Economics of Ukraine, Sergey Efremov str., 25, Dnepr, Ukraine

anatdem@ukr.net

In May 2017, the 170th anniversary were carried out from the day of the first formulation of the problem of the dynamic load influence on elastic structures and buildings that is related to destruction of Chester bridge in May 1847 in United Kingdom. After that, the mechanical engineers asked the question what are the differences between effects from acting of movable and fixed loads applied to the same elastic structure. Gradually the main interest was being moved from the applied aspects of this problem to the area of its physical and mathematical bases and was causing the necessity developing of the respective theory to replace a wide variety of the incomplete problem formulations and solving methods that caused to contradictory, paradoxical or even incorrect results so frequently. This problem is closely related to the dynamic problems of objects with time-dependent dimensions and some nonholonomic constraints. Masses and velocities of the systems that have been significantly increased in XX-XXI centuries put new tasks before engineers, require their solutions, originates new approaches in mechanics and mathematical modelling combined with on-going development of existing ones to discover quantitative and qualitative properties of kinematical and dynamical characteristics of a system motion. The main features of mathematical models describing the dynamic behavior of the elastic objects under movable inertia loading is the presence of an inertia operator in one of its forms that determines the force influence of the movable inertia loading on the elastic objects. The operator usually depends on intensity and velocity v(t) of loading stream, elastic strain $w(x,y,t)$, and it can be clearly tracked the dependency of the acceleration of the deformation $w_{tt}(x,y,t)$, of force influence from both bending velocities $w_{tx}(x,y,t)$ and from curvature $w_{xx}(x,y,t)$ of object's surface, so the movable inertia loading is a follower load. It is the second feature of the dynamics of elastic systems in the field of movable inertia loads

The third feature is that the odd – order mixed derivatives by the time should be contained in the system due to the Coriolis' acceleration of the movable load, that makes some difficulties for getting the solution applying of Fourier schema to the variable separation on the field of real numbers. A brief review of research on the dynamics of elastic systems with movable inertia loads solved by method of two-wave superposition of the eigen-oscillations and accompanying oscillations that allows to get analytical solutions for initial hypotheses. Accompanying oscillations are caused by the presence of moving inertia loads. The vibration and stability of the Timoshenko beam on a prism basis compressed by axial forces under moving load is considered. It is shown that the eigenoscillation forms and accompanying oscillations depend on the velocity of motion and the ratio between moving and stationary masses of the system. The dependency of the beam oscillations on the movable loads velocity and the ratio of moving and stationary masses of the system has been researched. Two critical velocities have been discovered and two matched eigenfrequencies for the second critical velocity. We have to note that the above features of the beam behavior cannot be obtained by numeric methods of mathematical physics from simplified models without considering of the Coriolis' inertia forces.

Key words: dynamic, movable load, elastic systems.

ВСТУП

У травні 2017 року виповнюється 170 років із дня виникнення проблеми динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, пов'язане з руйнуванням Честерського мосту в Англії у травні 1847 року [17]. Суттєве збільшення мас і швидкостей руху в динамічному XX-XXI сторіччі ставить перед інженерами нові задачі, потребує їх вирішення, викликає появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження з метою більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик процесу руху таких систем. Спочатку перед інженерної наукою постало питання наскільки результати дії рухомого навантаження на пружні конструкції відрізняються від дії такого ж за інтенсивністю статичного. Згодом інтерес до цієї проблеми з суто прикладної перемістився в область фізико-математичну – вибору і побудови адекватних механічних (розрахункових схем) і відповідних їм математичних моделей, які б найбільш повно враховували і відображали усі реальні фактори, що впливають на динаміку механічної системи – конструкція – рухоме навантаження. Виникаючі при цьому математичні моделі та їх дослідження у свою чергу призводять до розробки нових, уточнення і модернізації існуючих математичних методів, їх обґрунтування, коректності та меж застосування [1-4, 14, 18]. До математичних моделей задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням приходимо також у задачах динаміки об'єктів змінної довжини, пружних тіл, що рухаються у поздовжньому напрямку, в механічних системах з неголономними в'язями та інших [1-5].

МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ХАРАКТЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Залежно від способу схематизації інерційних властивостей елементів, що утворюють систему, існують чотири принципово різних варіанти постановки задач про дію рухомого навантаження на пружні конструкції [19]. Найбільш складним є четвертий варіант, де враховуються інерційні властивості рухомого навантаження і самої конструкції. Перші важливі результати, де розв’язок задачі представлено у вигляді рядів, відносяться до тридцятих років минулого сторіччя [17, 19]. Детальний огляд досліджень, виконаних у XIX і початку XX століття, наведено Я. Г. Пановко у відомому історичному нарисі розвитку теорії динамічної дії рухомого навантаження до сторіччя постановки проблеми [17]. Як зазначено в цій праці, проблема динамічної дії рухомого навантаження, сторічний ювілей якій виповнився в 1947 році, і, продовжуючи думку Я. Г. Пановко, 170 річний в 2017 році, до наших днів не втратила своєї актуальності. Сучасний інтенсивний розвиток техніки продовжує ставити нові задачі і викликає подальший розвиток експериментальних та теоретичних досліджень. Досить повний огляд досліджень з цієї проблеми першої половини XX століття наведено в роботах Н. З. Якушева [19]. І якщо за часів XIX сторіччя актуальною була проблема динаміки мостів за дії піхоти, кавалерії і артилерії, яка розглянута в праці І. М. Рабиновича [17], то в XXI столітті актуальними проблемами є динаміка мостів за руху потягів TGV зі швидкістю 400 км/год, динаміка трубопроводів в охолоджувальних системах РРД і гідроприводах літальних апаратів, де швидкість рідини досягає 250 км/год, пневмопроводів і повітряних охолоджувальних систем зі швидкістю газів до 750 км/год при тиску до 10 МПа. Як зазначено у працях П. Д. Доценко [14], 50-80% відмов у роботі літальних апаратів відбувається за причини вібрації, втрати стійкості та втомних руйнувань трубопроводів. Основними особливостями математичних моделей, які описують динаміку пружних об’єктів за дії рухомих інерційних навантажень, є:

по-перше, наявність у математичній моделі в тому чи іншому вигляді інерційного оператора

$$L(w) = -\frac{q_0+q_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

який визначає силовий вплив рухомого інерційного навантаження на пружний об’єкт. Характерним є той факт, що силовий вплив залежить як від інтенсивності $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об’єкта $w(x,y,t)$, причому, чітко простежується залежність силового впливу від прискорення деформації $w_{tt}(x,y,t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x,y,t)$ і зміни кривини поверхні об’єкта $w_{xx}(x,y,t)$, тобто рухоме інерційне навантаження носить слідкуючий характер. Це є другою характерною рисою задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою особливістю є наявність у математичній моделі непарної за часом змішаної похідної, яка зумовлена прискоренням Коріоліса рухомого навантаження і створює певні труднощі при побудові розв’язку, не дозволяючи відокремити змінні x і t за класичною схемою Фур’є в дійсній області шуканих функцій. Багато задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відносяться до неконсервативних [14, 19]. У зв’язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до дослідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректно для дослідження таких механічних систем. Для дослідження задач динаміки будівельної механіки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням найбільш часто застосовують такі математичні методи:

1. Метод Шаленкампа.

2. Метод Інгліса-Болотіна.

3. Метод А. П. Філіппова і С. С. Кохманюка.

4. Метод двохвильового подання коливань.

5. Метод інтегральних перетворень Лапласа і Фур’є.

6. Метод кінцевих елементів.

Наведемо короткий огляд (який не претендує на повноту) відомих досліджень з динаміки пружних конструкцій і споруд другої половини ХХ і початку ХХІ сторіччя на основі методу двохвильового подання коливань. Відомо, що коливання пружних тіл і систем у класичній теорії є суперпозицією власних коливань. Форма будь-якого власного коливання має вигляд стоячої хвилі, а кожній формі відповідає одна власна частота коливань. Класичний метод відокремлення змінних, який застосовують при дослідженні коливань пружних тіл, дає можливість побудувати форми і визначити частоти власних коливань. Застосування наближених методів типу Гальоркіна/Релея, Ритца й інших для дослідження коливань пружних тіл ґрунтується на модифікації методу розділення змінних, де коливання пружних тіл також представляють у вигляді суперпозиції коливань, форми яких тією чи іншою мірою наближаються до власних коливань досліджуваного пружного тіла. Успіх наближення залежить від того, наскільки вдало здійснено вибір координатних функцій, тобто форм для опису коливань. Однак у багатьох випадках, наприклад, у тілах, закріплених таким чином, що в граничні умови входять сили, які залежать від часу або швидкості [2-4, 15], у пружних тілах з рухомими інерційними навантаженнями, як показують дослідження, коливання мають більш складну структуру, де на кожній частоті тіла або системи здійснюються одночасно два зсунутих по фазі на прямий кут коливання з різними формами, тобто коливання подаються двома групами стоячих хвиль, які, на відміну від класичних, названі двохвильовими. Цілком природно, що для ефективності дослідження динаміки механічних систем з двохвильовою природою процесу руху, виникла необхідність створення нових математичних методів або узагальнення класичних прямих методів математичної фізики типу Гальоркіна, які відображали б двохвильовий характер коливань. Автори [1-16, 18] здійснюють подальший розвиток наближених методів для дослідження задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень і задач, що приводяться до таких математичних моделей. Двохвильове подання коливань, запропоноване і розвинене в працях [1-13], стимулювало розвиток досліджень якісної теорії диференціальних рівнянь у плані узагальнення методу Фур’є в роботах П. І. Каленюка та його учнів [15]. Класичним прикладом механічних систем, коливання яких має двохвильовий характер, є системи з рухомими інерційними навантаженнями. Двохвильовий характер коливань таких систем ілюструється точними рішеннями, отриманими авторами [1-13]. Результати ґрунтовних досліджень з проблеми динаміки пружних ситем з рухомим навантаженням, обширна бібліографія та аналіз яких наведені в працях В. В. Болотіна, Я. Г. Пановко, Н. З. Якушева, М. Н. Серазутдінова, А. П. Філіппова, Є. Г. Голоскокова, І. А. Колесника, С. С. Кохманюка, Г. Ф. Кравченко, А. Б. Моргаєвського, І. А. Колесніка, П. Д. Доценко, О. А. Горошко, А. Г. Дем’яненко, С. П. Киби, В. І. Пожуєва, Н. Г. Бондаря, С. І. Конашенко, А. С. Распопова, Waclaw Szczesniak. Наразі проблема дослідження якісного та кількісного впливу рухомого навантаження на коливання і стійкість стрижнів, пластин і оболонок ще далека до свого остаточного завершення і привертає увагу інженерів і науковців у багатьох країнах світу, чому сприяють та допомагають ІТ. Однією з перших публікацій із застосування некласичного, модифікованого методу відокремлення змінних до дослідження математичних моделей задач динаміки пружних тіл з рухомим інерційним навантаженням була праця H. Steuding [20], де розглянуто згинні коливання балки під дією рухомих інерційних навантажень. Другою була робота G. W. Housner [21], де загальний розв’язок диференціального рівняння з частинними похідними, яке описує коливання пружного об’єкту з рухомим інерційним навантаженням, є лінійною комбінацією часткових розв’язків, які містять симетричні та антисиметричні, зсунуті по фазі на 90° форми коливань. Причому, як наголошено в роботі, антисиметричні форми зумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв’язані через них з симетричними формами. Власне цими роботами та роботою І. І. Гольденблата [4] було започатковано некласичний метод відокремлення змінних у задачах динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше наведена професором О. О. Горошко [1]. Загальний розв’язок диференціального рівняння руху подається у вигляді суми двох рядів, один з яких є класичною частиною розв'язку, а другий – частиною, яка зумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, зумовленої інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи [1-3] названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи з рухомим інерційним навантаженням. Супровідні коливання зумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням методом, який названо методом двохвильового подання коливань, сприяють сучасні інформаційні технології, чого бракувало в часи H. Steuding, G. W. Housner, Я. Г. Пановко, І. І. Гольденблата, А. П. Філіпова, Е. Г. Голоскокова. Як приклад застосування методу двохвильового подання, наведемо дослідження коливань одновимірного пружного об'єкту під дією рухомого інерційного навантаження. Механічна модель побудована на основі моделі Тимошенко.

КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ. МЕХАНІЧНА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛІ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

На цей час методом двохвильового подання коливань досліджене «узагальнене» рівняння струни, поперечні коливання балок, пластинок, циліндричних оболонок за дії, як рівномірно розподіленого навантаження, так і зосереджених рухомих інерційних навантажень. Існує теоретичний та практичний інтерес дослідження коливань балки Тимошенко [3, 8, 9] за дії рухомого розподіленого інерційного навантаження, де математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки в основному операторі диференціального рівняння руху, а й у крайових умовах [3, 4]. Математична модель задачі побудована на основі уточненої механічної моделі балки з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів та деформацій зсуву, сил інерції рухомого навантаження, дії пружної основи, зовнішнього опору та осьової стискуючої сили. Система рівнянь, які описують поперечні коливання балки за уточненою моделлю Тимошенко, має вигляд:

$$\begin{cases} \rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{GF}{k}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=q\left(x,t\right), \\ EI\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\rho I\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\dfrac{GF}{k}\left(\theta-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Крайові умови для цієї моделі балки візьмемо у вигляді:

$$\begin{cases} u\big|_{x=0,l}=0, \\ \left.\left(-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{k\rho}{G}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{k}{GF}q\left(x,t\right)\right)\right|_{x=0,l}=0. \end{cases} \tag{2}$$

У виразах (1)-(2) $k=\left(\dfrac{FS^*}{bI}\right)^2$ – коефіцієнт зсуву, який залежить від форми поперечного перерізу, $\theta\left(x,t\right)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\gamma$ – повний кут повороту поперечного перерізу балки, де γ – додатковий кут повороту поперечного перерізу балки, який пов'язаний з деформацією зсуву. У випадку врахування сил інерції Коріоліса вираз для дії рухомого масового навантаження запишемо так

$$q\left(x,t\right)=-q_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{3}$$

Розглянемо коливання елемента, стиснутого осьовою силою N, з урахуванням сил опору зовнішнього середовища, пропорційного швидкості поперечного руху перерізу з коефіцієнтом α та пружної основи з коефіцієнтом жорсткості c. Математична модель такої задачі зводиться до дослідження системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \rho F \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{GF}{k}\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - N\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x,t), \\ EI\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \dfrac{GF}{k}\left(\theta - \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок цієї системи задовольняємо крайовим умовам (2). У випадку руху навантаження з прискоренням вираз для навантаження $q(x,t)$ матиме вигляд:

$$q(x,t) = -q_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

де $a = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ – прискорення рухомого навантаження.

Математична модель (4)-(2) при використанні виразу (5) є найбільш загальною. Щоб отримати результати часткових випадків, необхідно покласти рівними нулю відповідні доданки у відповідних диференціальних рівняннях математичної моделі. Виключаючи з системи (4) невідому функцію $\theta(x,t)$ отримуємо одне диференціальне рівняння відносно невідомої функції прогину $u(x,t)$

$$\begin{aligned} &\left(EI + kN\frac{EI}{GF}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(k\rho\frac{EI}{G} + \rho I + k\rho N\frac{I}{GF}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + k\rho^2\frac{I}{G}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \\ &-\alpha k\frac{EI}{GF}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \alpha k\rho\frac{I}{GF}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left(ck\frac{EI}{GF} + N\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\rho F + ck\rho\frac{I}{GF}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ &+\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x,t) - k\frac{EI}{GF}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k\frac{\rho I}{GF}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Крайові умови (5) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} u\big|_{x=0,l} = 0, \\ \left.\left(-GF\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - kq(x,t)\right)\right|_{x=0,l} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Після підстановки в диференціальне рівняння (6) та граничні умови (7) виразу (5) для $q(x,t)$ матимемо наступну крайову задачу

$$\begin{aligned} &\left(EI + kN\frac{EI}{GF} - kq_0 v^2\frac{EI}{GF}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2kq_0 v\frac{EI}{GF}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \\ &-\left(k\rho\frac{EI}{G} + kq_0\frac{EI}{GF} + \rho I + k\rho N\frac{I}{GF} - k\rho q_0 v^2\frac{I}{GF}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + 2kq_0 v\rho\frac{I}{GF}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + \\ &+\left(k\rho^2\frac{I}{G} + k\rho q_0\frac{I}{GF}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - kq_0 a\frac{EI}{GF}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha k\frac{EI}{GF}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + k\rho q_0 a\frac{I}{GF}\frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2} + \end{aligned} \tag{8}$$

$$+\alpha k\rho\frac{I}{GF}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\left(q_0v^2-ck\frac{EI}{GF}-N\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2q_0v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+$$
$$+\left(\rho F+q_0+ck\rho\frac{I}{GF}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q_0a\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+cu=0,$$

$$\begin{cases} u\big|_{x=0,l}=0, \\ \left(\left(kq_0v^2-GF\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2kq_0v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(k\rho F+kq_0\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+kq_0a\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0,l}=0. \end{cases} \tag{9}$$

Функцію прогину $u(x,t)$, перейшовши до безрозмірних параметрів, відшукуємо у вигляді [3]:

$$u(z,\tau)=\phi(z)\cos\omega\tau+\varphi(z)\sin\omega\tau. \tag{10}$$

Функції $\varphi(z)$ та $\phi(z)$ є формами поперечних коливань балки, z – безрозмірна координата, $\varphi(z)$ – форма власних коливань, $\phi(z)$ – супровідних, для визначення яких отримуємо відповідні системи звичайних зв’язаних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_4\varphi^{\mathrm{IV}}+\alpha_3\varphi^{\mathrm{III}}-\beta_3\phi^{\mathrm{III}}+\alpha_2\varphi^{\mathrm{II}}-\beta_2\phi^{\mathrm{II}}+\alpha_1\varphi^{\mathrm{I}}-\beta_1\phi^{\mathrm{I}}+\alpha_0\varphi-\beta_0\phi=0, \\ \alpha_4\phi^{\mathrm{IV}}+\alpha_3\phi^{\mathrm{III}}+\beta_3\varphi^{\mathrm{III}}+\alpha_2\phi^{\mathrm{II}}+\beta_2\varphi^{\mathrm{II}}+\alpha_1\phi^{\mathrm{I}}+\beta_1\varphi^{\mathrm{I}}+\alpha_0\phi+\beta_0\varphi=0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \varphi\big|_{z=0,1}=0, \\ \phi\big|_{z=0,1}=0, \\ b_0\varphi^{\mathrm{II}}+b_3\varphi^{\mathrm{I}}+b_1\omega\phi^{\mathrm{I}}-b_2\omega^2\varphi\big|_{z=0,1}=0, \\ b_0\phi^{\mathrm{II}}+b_3\phi^{\mathrm{I}}-b_1\omega\varphi^{\mathrm{I}}-b_2\omega^2\phi\big|_{z=0,1}=0, \end{cases} \tag{12}$$

або, використовуючи комплексну згортку, матимемо:

$$\alpha_4\left(\varphi^{\mathrm{IV}}+i\phi^{\mathrm{IV}}\right)+\left(\alpha_3+i\beta_3\right)\left(\varphi^{\mathrm{III}}+i\phi^{\mathrm{III}}\right)+\left(\alpha_2+i\beta_2\right)\left(\varphi^{\mathrm{II}}+i\phi^{\mathrm{II}}\right)+$$
$$+\left(\alpha_1+i\beta_1\right)\left(\varphi^{\mathrm{I}}+i\phi^{\mathrm{I}}\right)+\left(\alpha_0+\beta_0\right)\left(\varphi+i\phi\right)=0, \tag{13}$$

$$\begin{cases} \varphi+i\phi\big|_{z=0,1}=0, \\ b_0\left(\varphi^{\mathrm{II}}+i\phi^{\mathrm{II}}\right)+\left(b_3-ib_1\omega\right)\left(\varphi^{\mathrm{I}}+i\phi^{\mathrm{I}}\right)-b_2\omega^2\left(\varphi+i\phi\right)\big|_{z=0,1}=0. \end{cases} \tag{14}$$

Увівши комплексні коефіцієнти $\gamma_j=\alpha_j+i\beta_j$ та комплексну функцію дійсного аргументу $\Phi(z)=\varphi(z)+i\phi(z)$, отримаємо одне звичайне диференціальне рівняння з граничними умовами відносно функції $\Phi(z)$

$$\sum_{j=0}^{4}\gamma_j\frac{d^j\Phi}{dz^j}=0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \Phi(z)\big|_{z=0,1}=0, \\ b_0\Phi^{\mathrm{II}}(z)+\left(b_3-ib_1\omega\right)\Phi^{\mathrm{I}}(z)-b_2\omega^2\Phi(z)\big|_{z=0,1}=0, \end{cases} \tag{16}$$

розв’язки якого шукаємо у вигляді $\Phi(z)=\sum_{j=1}^{4}C_j e^{k_j z}$, де k_j – корені характеристичного рівняння $\sum_{j=0}^{4}\gamma_j k^j=0$, що є алгебраїчним рівнянням четвертого порядку з комплексними коефіцієнтами, розв’язки якого знаходимо за допомогою методу градієнтного спуску Воєводіна. C_j – невідомі сталі, що визначаються за граничними умовами у вигляді:

$$\begin{cases}\Phi(0)=0,\\ \Phi(1)=0,\\ b_0\Phi^{\mathrm{II}}(0)+(b_3-ib_1\omega)\Phi^{\mathrm{I}}(0)-b_2\omega^2\Phi(0)=0,\\ b_0\Phi^{\mathrm{II}}(1)+(b_3-ib_1\omega)\Phi^{\mathrm{I}}(1)-b_2\omega^2\Phi(1)=0.\end{cases} \tag{17}$$

Подальша процедура аналогічна класичному випадку [3].

Остаточно загальний розв’язок задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} u(z,t)=\sum_n a_n\Big[\mathrm{Re}\big(\Phi_n(z)\big)\cos(\omega_n t+\alpha_n)+\\ +\mathrm{Im}\big(\Phi n(z)\big)\sin(\omega_n t+\alpha_n)\Big].\end{aligned} \tag{18}$$

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для чисельної реалізації алгоритму методу двохвильового подання при дослідженні динаміки балки під дією рухомого інерційного навантаження була складена програма для ПЕОМ. Метою чисельного експерименту було з’ясування залежності між власними частотами поперечних коливань стержня та швидкістю руху навантаження. Залежність між власними частотами ω_i та швидкістю руху v наведена на рис. 1.

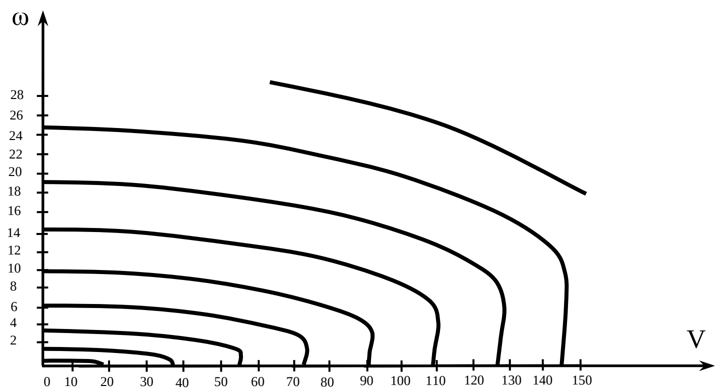

Рис. 1. Залежність власних частот від швидкості рухомого навантаження

На рис. 2 наведено графік для сьомої власної частоти коливань, звідки видно, що при збільшені швидкості руху навантаження частота зменшується. Але при досягненні швидкості певного значення v_1^* раптово з’являється нова основна власна частота, і залежність цієї частоти від швидкості вже є зростаючою. На деякому проміжку мають місце початкова та нова власні частоти, і при цьому вони наближуються одна до одної. При v_2^* вони стають рівними. Значення швидкості v_1^* назвемо першою критичною швидкістю руху інерційного навантаження для балки Тимошенко, при досягненні якої відбуваються статична втрата стійкості, тобто у балки з’являється нова рівноважна форма, відносно якої в подальшому відбуваються коливання. Значення швидкості v_2^* назвемо другою критичною швидкістю, при досягненні якої відбувається динамічна втрата стійкості, коли дві власні частоти співпадають або близькі до цього. Зауважимо, що такий результат якісної поведінки балки не вдається отримати наближеними методами при розгляді спрощених механічних моделей без урахування сил інерції Коріоліса.

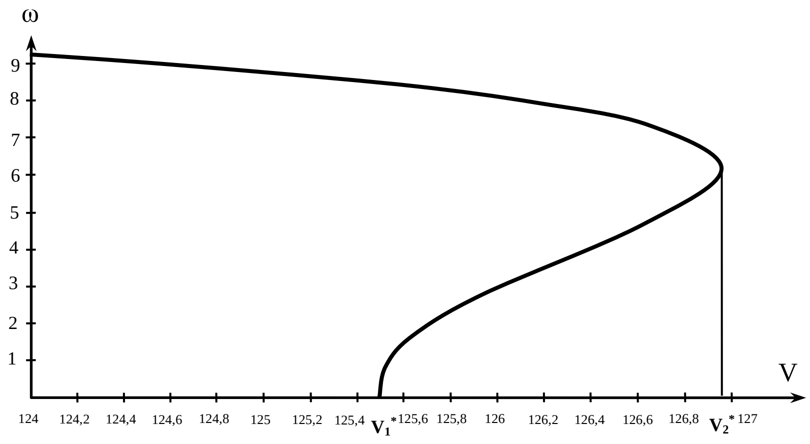

Рис. 2. Залежність власної частоти ω_7 від швидкості рухомого навантаження

На жаль обмежений обсяг статті не дозволяє навести бібліографію досліджень з проблеми динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження у повному обсязі, яку можна знайти у працях наведених у бібліографії до цієї роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками. *Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям* (Киев, 1970). Киев, 1970. С. 215–219.
2. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1973. 224 с.
3. Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. Київ: Либідь, 1991. 188 с.
4. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Москва: Стройиздат, 1947. 135 с.
5. Демьяненко А. Г., Клюшник Д. В. К проблеме динамики упругих систем в поле сил инерции подвижных нагрузок и систем, приводящихся к этой модели. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. 2002. V. 2, N 10. P. 632–638.
6. Демьяненко А. Г., Киба С. П. Влияние инерции вращения на колебательные свойства движущейся гибкой полосы. *Динамика и прочность машин*. 1979. Вып. 27. С. 119–121.
7. Демьяненко А. Г., Киба С. П. Об одном обобщении метода разделения переменных и некоторых его приложениях в механике. *VII Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике*. Москва: МГУ, 1991. С. 128.
8. Демьяненко А. Г., Евстратенко Д. А. Метод двухволнового представления колебаний и его развитие в задачах строительной механики упругих конструкций с подвижной инерционной нагрузкой. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2010. № 6. С. 43–50.
9. Дем'яненко А. Г. Механічні та математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2014. № 2(74). С. 12–22.
10. Дем'яненко А. Г. Деякі особливості і аналогії в задачах динаміки пружних стиснутих прямокутних пластинок та пластинок з рухомим інерційним навантаженням. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2015. № 4(80). С. 19–24.
11. Дем'яненко А. Г. Дослідження динаміки підсилених прямокутних пластинок за дії рухомого інерційного навантаження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2016. № 3(83). С. 35–39.

12. Демьяненко А. Г. Модифицированные функции Крылова и их применение в задачах динамики упругих систем с подвижной инерционной нагрузкой. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*. 2013. V. 21. P. 205–210.

13. Дем'яненко А. Г. Деякі особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження на основі некласичного методу відокремлення змінних. *Збірник матеріалів 12 відкритої конференції ІМФН*. Львів, 2016. С. 68–69.

14. Доценко П. Д. Динамика систем, несущих подвижную распределенную загрузку: дис… д-ра физ.-мат. наук / Харьков, 1988.

15. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. 292 с.

16. Киба С. П., Дем'яненко А. Г. Узагальнення методу розділення змінних та деякі його застосування в механіці. Київ: НМК ВО МОУ, 1991. 120 с.

17. Пановко Е. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки. *Тр. Ленингр. КВВИА*. 1946. Вып. 17. С. 54–69.

18. Серазутдинов М. Н. Действие равномерно распределенной подвижной нагрузки на пластину. *Тр. Семинаров по теории оболочек*. Казань, 1975. С. 156–163.

19. Якушев Н. З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч.1. Балки, стержни под воздействием подвижных нагрузок. *Исслед. по теории пластин и оболочек*. 1972. № 8. С. 3–21.

20. Steuding H. Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. *Jng. Acch*. 1934. P. 275–305.

21. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics*. *Trans ASME*. 1952. Vol. 19, N 2. P. 205–209.

22. Schallenkamp A. Schwingungen von Trager bei bewegten Lasten. *Ing.Arch*. 1937. Vol. 8. P. 35–42.

REFERENCES

1. Horoshko, O. A. (1970). Own and accompanying oscillations in a system with moving inertial loads. Trudi V mezhdunarodnoi konferentsii po nelineynim kolebaniiam, pp. 215-219.

2. Horoshko, O. A. & Savin, H. N. (1973). Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Naukova dumka.

3. Horoshko, O. O., Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1991). Two-wave processes in mechanical systems. Кiev: Libid.

4. Holdenblat, I. I. (1947). Modern problems of fluctuations and stability of engineering structures. Moscow: Stroyizdat.

5. Demianenko, A. G. & Kluishvranik, D. V. (2002). To the problem of the dynamics of elastic systems in the field of inertia forces of mobile loads and systems that are brought to this model. Theoretical Foundation of Civil Engineering, No. 21, pp. 632-638.

6. Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1979). Effect of inertia of rotation on the vibrational properties of a moving flexible strip. Dynamika i prochnoct machine, Vol. 27, pp. 119-121.

7. Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1991). On a generalization of the method of separation of variables and some of its applications in mechanics. VII Vsesoiuzniy siezd po teoretitchesroy i prikladnoiy mehanike. Moscow: MGU, p. 128.

8. Demianenko, A. G. & Eyvstratenko, D. A. (2010). The method of two-wave representation of oscillations and its development in the problems of structural mechanics of elastic structures with a moving inertial load. Visnyk Prydniprovs'koyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury, No. 6, pp. 43-50.

9. Demianenko, A. G. (2014). Mechanical and mathematical models of some problems of dynamics of elastic systems with moving inertial loads and their research. Vibratsiy v tekhitsi ta tekhnologiiakh, No. 2(74), pp. 12-22.

10. Demianenko, A. G. (2015). Some features and analogies in problems of elastic compressed rectangular plates and plates with moving inertial load dynamics. Vibratsiy v tekhitsi ta tekhnologiiakh, No. 4(80), pp. 19-24.

11. Demianenko, A. G. (2016). Doslidjennia dinamiky pidsilenih priamokutnih plastinok z rukhomim inertsionnim navantahzenniam. Vibratsiy v tekhitsi ta tekhnologiiakh, No. 3(83), pp. 35-39.
12. Demianenko, A. G. (2013). Modified Krylov functions and their application in problems of the dynamics of elastic systems with a moving inertial load. Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 21, pp. 205-210.
13. Demianenko, A. G. (2016). Some features of the mathematical models of the problems of the dynamics of elastic objects with moving inertial loads and their research on the basis of the nonclassical method of separating the variables. Zbirnik materialiv 12 vidkritoiy konferensiy IMFS, pp. 68-69.
14. Dotsenko, P. D. (1988). Dynamics of systems carrying a mobile distributed load (Unpulished doktor thesis). Kharkiv.
15. Kalenyuk, P. I. & Nytrebych, Z. M. (2002). Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol metod. L'viv: Vydavnytstvo Natsional'noho universytetu “L'vivs'ka politekhnika”.
16. Kiba, S. P. & Demianenko, A. G. (1991). Generalization of the method of separation of variables and some of its application in mechanics. Kyiv: NMK VO MOU.
17. Panovko, Ia. G. (1948). A historical sketch of the development of the theory of the dynamic action of a moving load. Trudi Leningr. KVVIA, Iss. 17, pp. 8-38.
18. Serazutdinov, M. N. (1975). The effect of a uniformly distributed movable load on the plate. Trudi seminara po teorii obolochek. Kazan, pp. 156-163.
19. Iiakuchev, N. Z. (1972). Dynamics of deformable systems under the influence of moving loads. Part 1. Beams, rods under the influence of moving loads. Issledovaniia po teorii plastin i obolochec, No. 8, pp. 3-21.
20. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. Jng. Acch., pp. 275-305.
21. Housner, G. W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol. 19, No. 2, pp. 205-209.
22. Schallenkamp, A. (1937). Schwingungen von Trager bei bewegten Lasten. Ing. Arch., Vol. 8, pp. 35-42

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Каиров А. С., д. т. н., профессор, Власов О. И., Латанская Л. А., к. ф.-м. н., доцент

Национальный университет кораблестроения,
просп. Героев Украины, 9, г. Николаев, 54025, Украина

alex-kairov@yandex.ru

Исследованы свободные колебания упругих многослойных ортотропных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Разработана уточненная математическая модель колебаний, учитывающая конструктивную неоднородность оболочки. Задача решается в линейной постановке методом Ритца. Приведены результаты расчета собственных частот и форм свободных колебаний оболочечной системы. Выполнено сопоставление полученных данных с численными результатами для аналогичных задач.

Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая многослойная оболочка, конструктивная неоднородность, присоединенные твердые тела, собственные частоты и формы колебаний, вариационный метод Ритца.