

4. Курапов С. В., Толлок А. В. Методы построения топологического рисунка графа. *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 9. С. 78–97.
5. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. Москва: Мир, 1977. 126 с.
6. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск: ГРФМЛ, 1963. 542 с.
7. Kavitha T., Liebchen Ch., Mehlhorn K., Michail D., Rizzi R., Ueckerdt T., Zweig K. A. Cycle bases in graphs characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*. 2009. Vol. 3, Iss. 4. P. 199–243.
8. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. Москва: Мир, 1972. 332 с.

#### REFERENCES

1. Tamassia, R. (2014). Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press.
2. Herman, I., Melançon, G. & Marshall, M. S. (2000). Graph Visualization and Navigation in Information Visualization: A Survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, No. 6(1), pp. 24-43. doi: 10.1109/2945.841119.
3. Kurapov, S. & Davidovsky, M. (2015). Two approaches to making joints in flat structures. *Komponenty i tehnologii*, No. 7, pp. 142-147.
4. Kurapov, S. V. & Tolok, A. V. (2013). The Topological Drawing of a Graph: Construction Methods. *Autom Remote Control*, Vol. 74, Iss. 9, pp. 1494-1509. doi: 10.1134/S0005117913090063.
5. Ringel, G. (2011). Map Color Theorem. Moscow: Mir.
6. Zykov, A. A. (1969). Theory of Finite Graphs. Novosibirsk: Publishing House «Nauka», Academy of Sciences of USSR, Siberian branch.
7. Kavitha, T., Liebchen, Ch., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. & Zweig, K. A. (2009). Cycle Bases in Graphs. Characterization, Algorithms, Complexity and Applications. *Computer Science Review*, Vol. 3, Iss. 4, pp. 199-243.
8. Bellert, S. & Wozniacki, G. (1972). Analysis and synthesis of electrical circuits by the method of structural numbers. Moscow: Mir.

УДК 539

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Мамедов Р. А., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В данной статье исследованы вынужденные колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах. Получены аналитические формулы для нахождения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью.

*Ключевые слова: вынужденные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.*

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В РІДИНІ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Мамедов Р. А., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,  
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У статті досліджено вимушені коливання поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки в рідині під дією пульсуючого в часі внутрішнього радіального тиску. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, побудовано системи рівнянь для визначення переміщень точок серединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки при динамічній взаємодії з рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на поздовжньо підкріплену циліндричну оболонку визначаються з розв'язання рівняння руху рідини, написаного в потенціалах. Отримано аналітичні формули для знаходжень переміщень точок серединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною.

*Ключові слова: вимушені коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.*

## FORCED OSCILLATIONS OF A LONGITUDINALLY ADJUSTED ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL IN A LIQUID

Latifov F. S., doctor of physical and mathematical sciences, professor,

Mamedov R. A., doctoral student

*Azerbaijan Architecture and Construction University,  
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this article we study the forced oscillations of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in a liquid under the action of an internal radial pressure pulsating in time. Based on the Ostrogradsky-Hamilton variational principle, a set of equations is constructed for determining the displacement of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell under dynamic interaction with a liquid. The acting surface loads from the liquid side to the longitudinally supported cylindrical shell are determined from the solutions of the fluid motion equation written in potentials. Analytic formulas are obtained for finding the displacements of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in contact with a liquid.

*Key words: forced oscillations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, principle of variation.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются ребрами, при этом незначительное увеличение массы конструкции существенно повышает ее прочность. Такие конструкции могут находиться в контакте с внешней средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания таких конструкций играют важную роль при проектировании современных машин и аппаратов. Исследованиям свободных колебаний продольно подкрепленной и подкрепленной перекрестными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочке, заполненной твердой средой, посвящена работа [1]. С применением вариационного принципа, построено частотное уравнение колебаний подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой и реализовано численно. Свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии рассмотрены в работе [2]. Причем, подкрепление оболочек проводилось продольно, поперечной и перекрестной системой ребер. В [3] исследована задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью в грунте, рассмотрено в работе [4]. С применением вариационного принципа и модели Пастернака, параметрические

колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с наполнителем исследованы в работе [5]. Вариационно-параметрические исследования, моделирование цилиндрических оболочек ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении приведены в [6]. Отметим, что описанные в литературе решения относятся преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [7]. Колебание гладких цилиндрических оболочек с наполнителем и с жидкостью достаточно полностью исследованы в работах [8, 9]. Колебания продольно подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя, рассмотрены в работах [10, 11]. Анализ приведенных работ показывает, что поведение тонкостенных конструкций из ортотропного материала, имеющих дискретное расположение ребер, при динамическом взаимодействии с жидкостью исследовано недостаточно. Поэтому разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследования вынужденных колебаний, контактирующих с жидкостью, являются актуальными задачами.

Данная статья посвящена исследованию вынужденных колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной анизотропной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности  $u$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$ . При этом углы поворота нормальных элементов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  относительно координатных линий  $y$  и  $x$  выражаются через  $w$  и  $\mathcal{G}$  с

помощью зависимостей  $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$ , где  $R$  – радиус срединной поверхности

оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений ( $u_i$ ,  $\mathcal{G}_i$ ,  $w_i$   $i$ -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания  $\varphi_{kpi}$ .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \quad \mathcal{G}_j(x) = \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $H_i^1$  – расстояние от осей  $i$ -го продольного стержня до поверхности оболочки,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{kpi}$  углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к нормальным составляющим  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом сжатии получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергию системы.

Потенциальная энергия упругой деформации ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{hR}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ b_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(b_{11} + b_{12}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} (b_{11} + 2b_{12} + b_{22}) + b_{22} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2(b_{12} + b_{22}) \frac{w}{R} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2b_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + b_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + b_{66} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 + 2b_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ,  $b_{66} = G_{12} = G$ ,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $u$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $w$  – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки,  $E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости материала оболочки в координатных направлениях,  $G$  – модуль упругости оболочки при сдвиге.

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного ребра таковы [1]:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Здесь  $F_i$ ,  $J_{zi}$ ,  $J_{yi}$ ,  $J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного стержня соответственно относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{G}_i$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного стержня.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок  $\bar{q}(q_x, q_y, q_z)$  и нагрузок  $q_{zz}$ , действующих со стороны жидкости, приложенных к оболочке, определится как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x + q_y + q_z + q_{zz}) w dx dy. \quad (4)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны жидкости, и потенциальная энергия от сжимающего напряжения:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0. \quad (5)$$

Кинетические энергии оболочки и продольных ребер записываются в виде [6]:

$$K_0 = \rho h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (6)$$

$$K_i = \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Здесь  $t$  – временная координата,  $\rho$ ,  $\rho_i$  – соответственно, плотность материалов, из которых изготовлена оболочка,  $i$ -ый продольный стержень.

Кинетическая энергия продольно подкрепленной оболочки

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i. \quad (7)$$

Уравнения движения ребристой оболочки получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (8)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$  – действие по Гамильтону,  $\tilde{L} = K - \Pi$  – функция Лагранжа,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

В предположении, что оболочка усилена бесконечно большим числом ребер, предельным переходом  $k_1 \rightarrow \infty$  и с учетом (1), и что операции варьирования и дифференцирования перестановочны, уравнение (8) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + b_{22}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \vartheta - (b_{12} + b_{22}) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \rho_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_y}{2h}, \\ & - \left[ (b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (b_{12} + b_{22}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ & + \left\{ b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + a^2 \left[ (b_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + b_{12} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_z + q_{zz}). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_1 = x_2 - x_1, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \gamma_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{G} (1 - \nu_{12}^2) \bar{\gamma}_c^{(1)},$$

$$\eta_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i (J_{yi} + h^2 F_i)}{2\pi R^3 h G} (1 - \nu_{12}^2), \quad \rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}, \quad \bar{\gamma}_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{2\pi R h}, \quad \delta_c^{(1)} = \frac{h_i}{R} \bar{\gamma}_c^{(1)},$$

$$\theta = \frac{y}{R}, \quad t_1 = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1-\nu^2)\rho R^2}}, \quad \omega_1 = \omega/\omega_0.$$

Поверхностная нагрузка  $q_z$ , действующая со стороны жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяется из решений уравнения движения идеальной жидкости [7]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где  $\varphi$  – потенциала возмущенных скоростей,  $a_0$  – скорость распространения возмущений в жидкости.

На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид:

$$g_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=R} = -\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1}. \quad (11)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку

$$q_{zz} = -p|_{r=R}; \quad q_x = q_y = 0. \quad (12)$$

С помощью (10), (11) и (12) давление со стороны жидкости на оболочку  $p$  можно представить в виде

$$p = \omega_0^2 \Phi_{an} \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$\Phi_{an} = \begin{cases} K_n(\beta r)/K'_n(\beta r), & M_1 < 1; \\ N_n(\beta_1 r)/N'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nr^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (14)$$

В (14)  $M_1 = \frac{\omega/m}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2}(1-M_1^2)\chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2-1)\chi^2$ ,  $t_1 = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{b_{11}}{\rho_0 R^2}}$ ,

$\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_0 R^2 \omega^2}{b_{11}}}$ ,  $\xi = x/L$ ,  $K_n$  – модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка второго рода,  $N_n$  – функции Бесселя или Неймана  $n$ -го порядка второго рода.

Будем предполагать, что продольно подкрепленная ортотропная цилиндрическая оболочка в жидкости находится под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления  $q_z$ :

$$q_z = q_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (15)$$

### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т. е. при  $\xi = 0$  и  $\xi = \xi_1$  ( $\xi_1 = L/R$ ) выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; & \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0 \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= w_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где  $u_0, \mathcal{G}_0, w_0$  – неизвестные постоянные.

Используя (9), (12), (13), (15) и (16), задача сводится к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{G}_0 + a_{i3}w_0 = q_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

где  $q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = q_0$ .

Элементы  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(b_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - b_{66}n^2 + \omega_1^2 B_{11}(1 + \rho_1); & a_{12} &= (b_{12} + b_{66})nmR; \\ a_{13} &= -[(b_{11} + b_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; \\ a_{21} &= (b_{12} + b_{66})nmR; & a_{22} &= -b_{66}m^2R^2 + (G_{12} + b_{22})n^2 + \omega_1^2 b_{11}; & a_{23} &= n(b_{12} + b_{22}); \\ a_{31} &= -[-(b_{11} + b_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; & a_{32} &= -(b_{12} + b_{22})n; & a_{33} &= b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - \sigma_x hm^2R^2 + \\ & & & & & -(1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 + \frac{R^2}{2h}\Phi_{an}B_{11}\rho_m\omega_1^2\omega_0^2 + a^2[(b_{11} + \eta_c^{(1)})m^4R^4 + 2(b_{11} + b_{12})n^2m^2R^2 + b_{12}n^4]. \end{aligned}$$

Так как система (17) неоднородная, из нее получаем для амплитуды перемещений:

$$u_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mathcal{G}_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad w_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q_0(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}), & \Delta_2 &= q_0(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}), & \Delta_3 &= q_0(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}), \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\Delta = 0$  амплитуды перемещений уходят в бесконечность, что соответствует резонансному случаю.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей (18) амплитуды перемещений с помощью ЭВМ. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных

стержней, были приняты:  $E_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2$ ,  $\rho = \rho_i = 7800 \text{ кг / м}^3$ ,  $F_i = 3,4 \text{ мм}^2$ ,  
 $J_{yi} = 5,1 \text{ мм}^4$ ,  $\rho_0 / \rho = 0,105$ ,  $\frac{J_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}$ ,  $\frac{J_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}$ ,  $\frac{J_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $R = 0,16 \text{ м}$ ,  $h = 0,00045 \text{ м}$ ,  $\nu_2 = 0,19$ ,  $\nu_1 = 0,11$ ,  $L = 0,8 \text{ м}$ ,  $h_i = 1,39 \text{ мм}$ ,  $a_0 = 1350 \text{ м / сек}$ .

На рис. 1 представлены зависимости  $w_0/q$  от частоты  $\omega_1$  для различных отношений  $\frac{E_1}{E_2}$ ,  
 причем сплошным линиям соответствуют  $\frac{E_1}{E_2} = 1,25$ , а пунктирным –  $\frac{E_1}{E_2} = 0,75$ . Из рисунка

видно, что при определенных частотах пики кривых уходят в бесконечность. Эти частоты являются резонансными и определяются из уравнения  $\Delta = 0$ . Кроме того, усиление свойства ортотропии материала оболочки приводит к уменьшению значения прогиба оболочки.

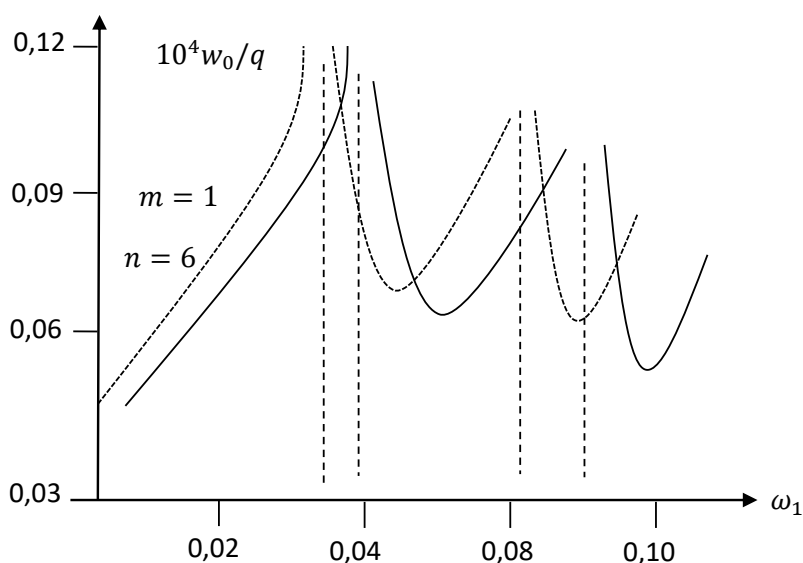


Рис. 1. Зависимость прогиба оболочки от частоты колебаний

## ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1. С. 59–62.
2. Латифов Ф. С., Алиев А. А. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 2. С. 61–63.
3. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2008. № 4(5). С. 45–48.
4. Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Микаилов С. Б. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2013. Вып. 21. С. 132–139.
5. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1(6). С. 52–55.



6. Босьяков С. М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 3(10). С. 24–27.
7. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 367 с.
8. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 331 с.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
10. Латифов Ф. С., Джафарова И. М. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения. *Естественные науки и техники*. 2009. № 5(43). С. 38–44.
11. Джафарова И. М. Задача о свободных осесимметричных колебаниях нагруженной осевыми сжимающими силами ребристых цилиндрических оболочек, заполненных средой и с учетом трения. *Известия Бакинского Государственного Университета. Физико-математическая серия*. 2011. № 3. С. 86–93.

### REFERENCES

1. Latifov, F. S. & Suleymanova, S. Q. (2009). The problem of free oscillations of a reinforced system of cross-by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 1, pp. 59-62.
2. Latifov, F. S. & Aliyev, A. A. (2009). Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 2, pp. 61-63.
3. Latifov, F. S. & Salmanov, O. Sh. (2008). The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of the cylindrical shell filled with liquid. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 4(5), pp. 45-48.
4. Latifov, F. S., Iskenderov, R. A. & Mikailov, S. B. (2013). Fluctuations transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium. *Problemi vichislitelnoy mexaniki i prochnosti konstrukchiy*, Iss. 21, pp. 132-139.
5. Pirmamedov, I. T. (2009). Parametric oscillations of viscoelastic shell, taking into account of damage, enclosed in a viscoelastic matrix. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 1(6), pp. 52-55.
6. Bosyakov, S. M., Chjivey, V. (2011). Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 3(10), pp. 24-27.
7. Amiro, I. Ya. & Zaruchkiy, V. A. (1980). *Theory of Ridge Shells. Methods for Calculation of Shells*. Kiev: Naukova dumka.
8. Ilqamov, M. A., Ivanov, V. A. & Qulin, B. A. (1977). *Strength, Stability and Dynamics of Shells with an elastic filler*. Moskow: Nauka.
9. Latifov, F. S. (1999). *Fluctuations shells with elastic and liquid media*. Baku: Elm.
10. Latifov, F. S. & Djafarova, I. M. (2009). Free oscillations of cylindrical shells reinforced ribs cross-c filler system, under axial compression and taking into account the friction. *Yestestvennie nauki i texniki*, No. 5(43), pp. 38-44.
11. Djafarova, I. M. (2011). The problem of free axisymmetric vibrations of a loaded axial compressive forces ribbed cylindrical shells filled environment and taking into account the friction. *Izvestiya Bakinskogo Qosudarstvennoqo Universiteta. Fiziko-matematicheskaya seriya*, No. 3, pp. 86-93.