

УДК 539

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ И ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Мусаев З. С., к. т. н., доцент,
Мамедрзаева Ф. Т., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В данной статье исследованы вынужденные колебания подкрепленной перекрестными системами ребер ортотропной цилиндрической оболочки с твердой и жидкой средой под действием пульсирующего во времени внешнего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построено система уравнения для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с твердой средой и жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на твердую среду определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах. Получены аналитические формулы для нахождения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью.

Ключевые слова: динамическая нагрузка, вынужденные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЕРЕХРЕСНИМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТВЕРДИМ СЕРЕДОВИЩЕМ І РІДИНОЮ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Мусаєв З. С., к. т. н., доцент,
Мамедрзаєва Ф. Т., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У статті досліджено вимушені коливання підкріпленої перехресними система ребер ортотропної циліндричної оболонки з твердим і рідким середовищем під дією пульсуючого в часі зовнішнього радіального тиску. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона побудовано системи рівнянь для визначення переміщень точок срединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки при динамічній взаємодії з твердим середовищем і рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на тверде середовище визначаються з рішень рівняння руху рідини, написаного в потенціалах. Отримано аналітичні формули для знаходжень переміщень точок срединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною.

Ключові слова: динамічне навантаження, вимушені коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.

FORCED BY FLUIDS OF REFER OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH SOLID ENVIRONMENT AND LIQUID BY CROSS-SIDED SYSTEMS

Latifov F. S., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Musaev Z. S., Ph.D., Associate Professor, Mammadrzaeva F. T., doctoral student

¹*Azerbaijan Architecture and Construction University,
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this paper we study the forced oscillations of an orthotropic cylindrical shell reinforced by a crossover system with a solid and liquid medium under the action of an external radial pressure pulsing in time. Based on the variational principle of Ostrogradskii-Hamilton, systems of equations are constructed for determining the displacement of points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell, under dynamic interaction with a solid medium and a liquid. The actual surface loads from the liquid to the solid are determined from the solutions of the fluid motion equation written in potentials. Analytic formulas are obtained for finding the displacements of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in contact with a liquid.

Key words: dynamic load, forced oscillations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, principle of variation.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники все больше базируется на достижениях фундаментальных и прикладных научных исследований. Инженерные сооружения и конструкции усложняются, поэтому их проектирование трудно представить без предварительного подробного расчета поведения этих конструкций или их элементов в тех или иных условиях.

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для современной техники. Развитие ее связано с ростом скоростей движения, давлений, температур, с непрерывным возрастанием мощности и быстроходности машин и механизмов, увеличением аэродинамического воздействия потока протекающей среды. Вместе с тем наблюдается стремление к лучшему использованию несущей способности конструкций и уменьшению их веса. Это влечет за собой увеличение воздействия динамических нагрузок на элементы машин и сооружений.

Отметим, что описание в литературе решения относится преимущественно к свободному колебанию подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки без среды [1]. Колебание гладких изотропных цилиндрических оболочек со средой достаточно полностью исследовано в работах [2, 3]. Поведение деформируемых гладких оболочек с протекающей жидкостью рассмотрено в монографии [4, 5]. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей идеальной жидкостью в среде исследовано в работе [6]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер изотропной цилиндрической оболочки с протекающей идеальной жидкостью, рассмотрены в работе [7].

В работе [8] исследуется задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью.

Как следует из приведенного обзора, практически отсутствуют работы, посвященные вынужденным колебаниям анизотропных ребристых оболочек с наполнителем, имеющим центральный канал, заполненный жидкостью. Поэтому исследование вынужденных колебаний ребристых анизотропных цилиндрических оболочек с наполнителем, имеющим центральный канал, заполненный жидкостью, имеет большое практическое значение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются вынужденные колебания ортотропных ребристых оболочек с заполнителем, имеющим центральный канал, который заполнен идеальной движущейся жидкостью. Исследование задачи о вынужденных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с заполнителем и с протекающей жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Уравнение движения ребристой оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left[(b_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_x, \\ & (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial w}{\partial \theta} = \rho_2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} + \frac{R^2}{2h} q_\theta, \\ & - \left[(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\ & + \left\{ b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + (\delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + a^2 \left[(b_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (b_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_z + q_{zz} + q_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}$, $\rho_2 = 1 + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$, $\rho_3 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(2)} + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$, $\bar{\gamma}_c^{(1)} = \varphi_1^1$ (φ_1^1 – отношение веса всех ребер к весу оболочки), $\bar{\gamma}_s^{(2)} = \frac{F_s}{L_1 h}$, $\delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}$, $\gamma_s^{(2)} = \frac{E_s (1 - \nu^2)}{G_{12}} \bar{\gamma}_s^{(2)}$, $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}$, $\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\rho_0}$ (ρ_0 ,

ρ_c , ρ_s – плотности материалов оболочки и ребер, соответственно), $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{66} = G_{12} = G$, $\delta_c^{(1)} = \frac{h_c}{r} \gamma_c^{(1)}$, $\gamma_c^{(1)} = \frac{E_c}{E} (1 - \nu^2) \bar{\gamma}_c^{(1)}$, E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, R – радиус срединной поверхности оболочки, E_s , E_c – модуль упругости материала ребер, $a^2 = \frac{h}{12R^2}$,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $\eta_c^{(1)} = \frac{E_c (J_{yc} + h^2 F_c)}{2\pi R^3 h b_{66}} (1 - \nu_{12}^2)$, $\eta_{s2}^{(2)} = \frac{E_s (1 - \nu_{12}^2)}{b_{66}} \bar{\eta}_s^{(2)}$, $\delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}$,

$\eta_{s1}^{(2)} = \frac{E_s J_{xs} (1 - \nu_{12}^2)}{b_{66} L_1 R^2 h}$, $\bar{\eta}_s^{(2)} = \left(\frac{h_s}{R} \right)^2 \bar{\gamma}_s^{(2)}$, L_1 – длина оболочки, J_{xs} – момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси ox , F_c , F_s , J_{yc} – площадь и момент инерции поперечного сечения ребра соответственно относительно оси oz , $\xi = \frac{x}{R}$, $\theta = \frac{y}{R}$, u , \mathcal{G} , w – составляющие

перемещений срединной поверхности оболочки, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1 - \nu_{12}^2) \rho_0 R^2}}$, q_x , q_θ , q_z , q_{zz} – давление со стороны среды и жидкости на оболочку, соответственно, q_0 – внешняя

поверхностная, пульсирующая во времени нагрузка: $q_0 = q_{00} \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi} \xi \sin \omega_1 t_1$. Здесь индексы « c » относятся к продольному, а индексы « s » к поперечному ребер.

Уравнение движения среды имеет вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \omega_x}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 s_\varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь s_x, s_φ, s_r – компоненты вектора смещений частиц среды, λ_s и μ_s – модули упругости Ламе, ρ – плотность материала среды.

Объемное расширение θ и компоненты вращения $\omega_x, \omega_\varphi, \omega_r$ определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_x}{\partial x}; \quad 2\omega_x = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r s_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right]; \\ 2\omega_\varphi &= \frac{\partial s_r}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial r}; \quad 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial s_\varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Компоненты $\sigma_{rx}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rr}$ тензора напряжений определяются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right], \\ \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r s_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагая, что основная скорость потока равна U и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей φ по [4]:

$$\Delta \tilde{\varphi} - \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0. \tag{4}$$

Уравнение движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (4) дополняются контактными условиями.

Предположим, что контакт между оболочкой и средой является жестким, т.е. при $r = R$

Равенство перемещений

$$s_x = u, \quad s_\varphi = v, \quad s_r = w \quad (r = R). \tag{5}$$

Равенство давлений

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\varphi = -\sigma_{r\varphi}, \quad q_r = -\sigma_{rr} \quad (r = R). \tag{6}$$

На контактной поверхности среда–жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки среды имеет вид [4]:

$$\mathcal{G}_r|_{r=a} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \left(\omega_0 \frac{\partial s_r}{\partial t_1} + U \frac{\partial s_r}{R \partial \xi} \right). \quad (7)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на среду

$$\sigma_{rx} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p \quad (r = a), \quad (8)$$

где a – радиус канала среды.

К контактным условиям (5)-(8) прибавляются граничные условия. Предполагается, что оболочка шарнирно оперта по краям, т.е. при $\xi = 0$ и $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L_1/R$) выполняется

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0, \quad (9)$$

а для среды

$$\sigma_{xx} = 0; \quad s_\varphi = s_r = 0. \quad (10)$$

Дополняя контактными условиями (5)-(8) уравнения движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (4), приходим к задаче о вынужденных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с упругой средой и с протекающей жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с упругой средой и с протекающей жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Потенциал возмущенных скоростей φ ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (11)$$

Используя (11), из условия (7), (8) имеем:

$$\tilde{\varphi} = -\Phi_{an} \left(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \quad (12)$$

$$p = \Phi_{an} \rho_m \left(\omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U \omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right),$$

где

$$\Phi_{an} = \begin{cases} I_n(\beta r) / I'_n(\beta r), & M_1 < 1, \\ J_n(\beta_1 r) / J'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1, \\ \frac{R^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$, $\beta^2 = R^{-2} (1 - M_1^2) \chi^2$, $\beta_1^2 = R^{-2} (M_1^2 - 1) \chi^2$, I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n , J_n – функции Бесселя первого рода порядка n , $\omega_1 = \omega / \omega_0$.

Перемещения оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \chi \xi \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1; \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cos \chi \xi \sin n\varphi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= w_0 \cos \chi \xi \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь u_0 , \mathcal{G}_0 , w_0 неизвестные постоянные; χ , n – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно.

Далее в (1) в качестве q_{zz} должна быть взята величина $q_{zz} = -p$, где p – давление по (12). С учетом (14) давление p можно представить в виде:

$$p = \frac{\rho_m \Phi_{an}}{\rho_0 \omega_0^2 h} (\omega_0^2 \omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_1 \chi U + \chi^2 U^2) w. \tag{15}$$

Решение уравнения движения упругого заполнителя (2) будем рассматривать в двух вариантах: а) предполагая, что влияние инерции среды на процесс колебания незначительно; б) предполагая, что влияние инерции движения среды на процесс колебания существенно и им пренебрегать нельзя.

Для перемещений заполнителя имеем [2]:

в случае а)

$$\begin{aligned} s_x &= \left[\left(-kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1 - \nu_s) k I_n(kr) \right) A_s + k I_n(kr) B_s + \left(-kr \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(1 - \nu_s) k K_n(kr) \right) \tilde{A}_s + k K_n(kr) \tilde{B}_s \right] \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_\varphi &= \left[-\frac{n}{r} I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s - \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{B}_s - \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{C}_s \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_r &= \left[-k^2 r I_n(kr) A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} I_n(kr) C_s - k^2 r K_n(kr) \tilde{A}_s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{B}_s + \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{C}_s \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1; \end{aligned} \tag{16}$$

в случае б)

$$\begin{aligned} s_x &= \left[A_s k I_n(\gamma_e r) - C_s \frac{\gamma_t^2}{\mu_t} I_n(\gamma_t r) + \tilde{A}_s k K_n(\gamma_e r) - \tilde{C}_s \frac{\gamma_t^2}{\mu_t} K_n(\gamma_t r) \right] \times \\ &\quad \times \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[-\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu_t} I_n(\gamma_t r) - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} - \frac{\tilde{A}_s n}{r} K_n(\gamma_e r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{C}_s n k}{r \mu_t} K_n(\gamma_t r) - \frac{\tilde{B}_s}{n} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{17}$$

$$s_r = \left[A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_t} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} + \frac{B_s n}{r} I_n(\gamma_t r) + \tilde{A}_s \frac{\partial K_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{\tilde{C}_s k}{\mu_t} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} + \frac{\tilde{B}_s n}{r} K_n(\gamma_t r) \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1,$$

где k , n , γ_e , γ_t – волновые числа, соответствующие волнам сжатия и сдвига, причем имеют место зависимости

$$\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2, \quad \gamma_t^2 = k^2 - \mu_t^2.$$

Используя (16), (14), (3) и контактные условия (5), (6), получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных u_0 , \mathcal{G}_0 , w_0 , A_s , B_s , C_s , \tilde{A}_s , \tilde{B}_s , \tilde{C}_s . Эта система имеет громоздкий вид, поэтому здесь ее не приводим. С помощью этой системы постоянные A_s , B_s , C_s , \tilde{A}_s , \tilde{B}_s , \tilde{C}_s выражаем через u_0 , \mathcal{G}_0 , w_0 :

$$\begin{aligned} A_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_1^{(1)} u_0 + \Delta_1^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_1^{(3)} w_0 \right); & B_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_2^{(1)} u_0 + \Delta_2^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_2^{(3)} w_0 \right); \\ C_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_3^{(1)} u_0 + \Delta_3^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_3^{(3)} w_0 \right); & \tilde{A}_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_4^{(1)} u_0 + \Delta_4^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_4^{(3)} w_0 \right); \\ \tilde{B}_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_5^{(1)} u_0 + \Delta_5^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_5^{(3)} w_0 \right); & \tilde{C}_s &= \Delta^{-1} \left(\Delta_6^{(1)} u_0 + \Delta_6^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_6^{(3)} w_0 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь Δ – главный определитель, $\Delta_i^{(j)}$ – вспомогательные определители названной системы. Подставляя (18) в выражение (3) для напряжений, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(q_{11} \Delta_1^{(1)} + q_{12} \Delta_2^{(1)} + q_{13} \Delta_3^{(1)} + q_{14} \Delta_4^{(1)} + q_{15} \Delta_5^{(1)} + q_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(q_{11} \Delta_1^{(2)} + q_{12} \Delta_2^{(2)} + q_{13} \Delta_3^{(2)} + q_{14} \Delta_4^{(2)} + q_{15} \Delta_5^{(2)} + q_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(q_{11} \Delta_1^{(3)} + q_{12} \Delta_2^{(3)} + q_{13} \Delta_3^{(3)} + q_{14} \Delta_4^{(3)} + q_{15} \Delta_5^{(3)} + q_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ \sigma_{r\varphi} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(p_{11} \Delta_1^{(1)} + p_{12} \Delta_2^{(1)} + p_{13} \Delta_3^{(1)} + p_{14} \Delta_4^{(1)} + p_{15} \Delta_5^{(1)} + p_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(p_{11} \Delta_1^{(2)} + p_{12} \Delta_2^{(2)} + p_{13} \Delta_3^{(2)} + p_{14} \Delta_4^{(2)} + p_{15} \Delta_5^{(2)} + p_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(p_{11} \Delta_1^{(3)} + p_{12} \Delta_2^{(3)} + p_{13} \Delta_3^{(3)} + p_{14} \Delta_4^{(3)} + p_{15} \Delta_5^{(3)} + p_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ \sigma_{rr} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(r_{11} \Delta_1^{(1)} + r_{12} \Delta_2^{(1)} + r_{13} \Delta_3^{(1)} + r_{14} \Delta_4^{(1)} + r_{15} \Delta_5^{(1)} + r_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(r_{11} \Delta_1^{(2)} + r_{12} \Delta_2^{(2)} + r_{13} \Delta_3^{(2)} + r_{14} \Delta_4^{(2)} + r_{15} \Delta_5^{(2)} + r_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(r_{11} \Delta_1^{(3)} + r_{12} \Delta_2^{(3)} + r_{13} \Delta_3^{(3)} + r_{14} \Delta_4^{(3)} + r_{15} \Delta_5^{(3)} + r_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{11} &= (\chi I_n(\chi) + \chi I_n''(\chi) + (5 - 4\nu_s) I_n'(\chi)) \chi^2; & q_{12} &= -2\chi^2 I_n'(\chi); \\ q_{13} &= -n\chi I_n(\chi); & q_{14} &= (\chi K_n(\chi) + \chi K_n''(\chi) + (5 - 4\nu_s) K_n'(\chi)) \chi^2; \\ q_{15} &= -2\chi^2 K_n'(\chi); & q_{16} &= -n\chi K_n(\chi); \\ p_{11} &= -n\chi^2 I_n(\chi); & p_{12} &= 2n(\chi I_n'(\chi) - I_n(\chi)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{13} &= \chi^2 I_n''(\chi) - \chi I_n'(\chi) + n^2 I_n(\chi); & p_{14} &= -n \chi^2 K_n(\chi); \\
 p_{15} &= 2n(\chi K_n'(\chi) - K_n(\chi)); & p_{16} &= \chi^2 K_n''(\chi) - \chi K_n'(\chi) + n^2 K_n(\chi); \\
 r_{11} &= (2(1-2\nu_s)I_n(\chi) + 2\chi I_n'(\chi))\chi^2; & r_{12} &= -2\chi^2 I_n''(\chi); \\
 r_{13} &= 2n(I_n(\chi) - \chi I_n'(\chi)); & r_{14} &= (2(1-2\nu_s)K_n(\chi) + 2\chi K_n'(\chi))\chi^2; \\
 r_{15} &= -2\chi^2 K_n''(\chi); & r_{16} &= 2n(I_n(\chi) - \chi I_n'(\chi)).
 \end{aligned}$$

Используя (19) и контактные условия (6), можно определить контактные напряжения q_x , q_θ , q_r . Их представим в виде

$$\begin{aligned}
 q_x &= (\tilde{C}_{x1}A + \tilde{C}_{x2}B + \tilde{C}_{x3}C) \cos n\varphi \cos \chi\xi \sin \omega_1 t_1, \\
 q_\varphi &= (\tilde{C}_{\theta1}A + \tilde{C}_{\theta2}B + \tilde{C}_{\theta3}C) \sin n\varphi \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1, \\
 q_r &= (\tilde{C}_{r1}A + \tilde{C}_{r2}B + \tilde{C}_{r3}C) \cos n\varphi \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (14) и (20) в (1), получаем системы неоднородных алгебраических уравнений относительно постоянных u_0 , \mathcal{Q}_0 , w_0

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{Q}_0 + a_{i3}w_0 = q_i \quad (i=1,2,3), \tag{21}$$

где $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = q_{00}$.

Элементы a_{i1} , a_{i2} , a_{i3} ($i=1,2,3$) имеют громоздкие виды, поэтому здесь не приводятся.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих системы, были приняты: $E_c = E_s = 6,67 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho_0 = \rho_c = \rho_s = 0,26 \cdot 10^4$ Нс²/м⁴, $F_c = 3,4$ мм², $J_{yc} = 5,1$ мм⁴, $h_c = 1,39$ мм, $R = 160$ мм, $h = 0,45$ мм, $h_s = 1,95$ мм, $I_{xh} = 19,9$ мм⁴, $I_{kp.s} = 0,48$ мм⁴, $\rho = 1000$ кг/м³, $a_l = 2,25a_t$, $a_t = 308$ м/с.

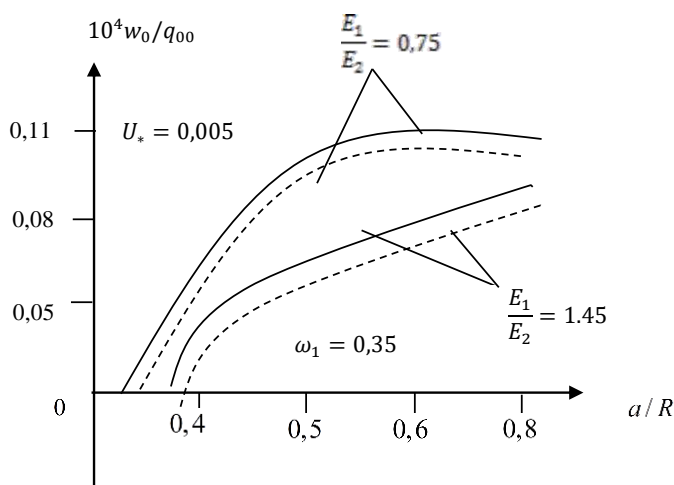


Рис. 1. Зависимость прогиба оболочки от радиуса канала твердой среды

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. Причем, на рис. 1 и рис. 2 пунктирные кривые соответствуют случаю а), а сплошные кривые соответствуют случаю б). На рис. 1 приведена зависимость прогиба оболочки от радиуса канала среды, а на рис. 2 зависимость прогиба оболочки от плотности жидкости для различных отношений модулей упругости материала оболочки. Счет показывает, что с увеличением радиуса канала среды прогибы оболочки увеличиваются, а с увеличением плотности жидкости прогибы оболочки уменьшаются. Из рисунков видно, что учет инерционных свойств среды приводит к увеличению прогиба. Кроме того, с увеличением отношений E_1/E_2 прогиб оболочки уменьшается.

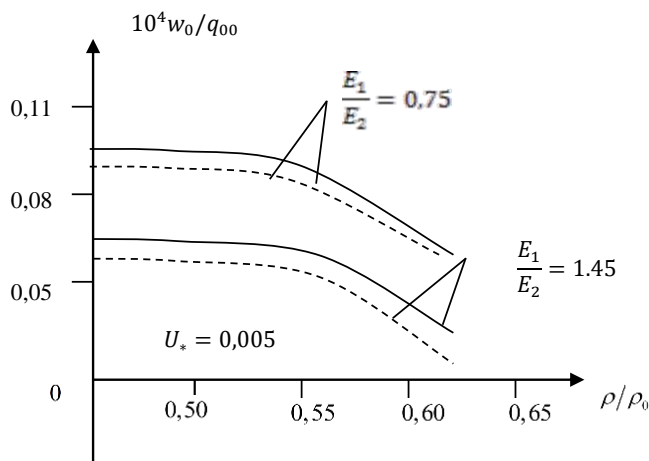


Рис. 2. Зависимость прогиба оболочки от плотности жидкости

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 367 с.
2. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 332 с.
3. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
4. Вольмир А. С. Оболочки в протоколе жидкости и газа. Задачи гидроупругости. Москва: Наука, 1979. 320 с.
5. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости. *Инженерный сборник*. 1956. № 24. С. 210–218.
6. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о собственных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика и машиностроение*. 2008. № 2. С. 18–20.
7. Салманов О. Ш. Задача о собственных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной жидкостью. *Механика и машиностроение*. 2008. № 1. С. 46–48.
8. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2008. № 4(5). С. 45–48.

REFERENCES

1. Amiro, I. Ya, Zarutskiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shell. Kiev: Naukova dumka.
2. Il'gamov, M. A., Ivanov, V. A. & Gulin, B. V. (1977). The strength of the stability and dynamics of shells with elastic filler. Moscow: Nauka.
3. Latifov, F. S. (1999). Fluctuations of shells with elastic and a liquid medium. Baku: Elm.

4. Vol'mir, A. S. (1979). Shell in the minutes of the liquid and gas. Problems hydroelasticity. Moscow: Nauka.
5. Bolotin, V. V. (1956). Oscillations and stability of elastic cylindrical shell in the flow of a compressible fluid. Inzhenernyy sbornik, No. 24, pp. 210-218.
6. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of its own axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid, Mekhanika. Mashinostroenie, No. 2, pp. 18-20.
7. Calmanov, O. SH. (2008). The problem of the natural vibrations of the system of cross-reinforced edges and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika. Mashinostroenie, No. 1, pp. 46-48.
8. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, No. 4(5), pp. 45-48.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Халилова Э. Н., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены системы уравнений движения продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Неоднородность материала оболочки по толщине учтена, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки являются функциями нормальной координаты. При исследовании свободных колебаний продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой, рассмотрены два случая неоднородности: а) линейный; б) квадратичный. Построены частотные уравнения и реализованы численно. Построены характерные кривые зависимости.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, ортотропная оболочка, вариационный принцип, твердая среда, свободное колебание.

КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТВЕРДИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Халілова Е. Н., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У запропонованій статті досліджено вільне коливання поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, побудовані системи рівнянь руху поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною