

4. Vol'mir, A. S. (1979). Shell in the minutes of the liquid and gas. Problems hydroelasticity. Moscow: Nauka.
5. Bolotin, V. V. (1956). Oscillations and stability of elastic cylindrical shell in the flow of a compressible fluid. Inzhenernyy sbornik, No. 24, pp. 210-218.
6. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of its own axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid, Mekhanika. Mashinostroenie, No. 2, pp. 18-20.
7. Calmanov, O. SH. (2008). The problem of the natural vibrations of the system of cross-reinforced edges and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika. Mashinostroenie, No. 1, pp. 46-48.
8. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, No. 4(5), pp. 45-48.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Халилова Э. Н., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены системы уравнений движения продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Неоднородность материала оболочки по толщине учтена, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки являются функциями нормальной координаты. При исследовании свободных колебаний продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой, рассмотрены два случая неоднородности: а) линейный; б) квадратичный. Построены частотные уравнения и реализованы численно. Построены характерные кривые зависимости.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, ортотропная оболочка, вариационный принцип, твердая среда, свободное колебание.

КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТВЕРДИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Халілова Е. Н., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У запропонованій статті досліджено вільне коливання поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, побудовані системи рівнянь руху поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною

враховано, приймаючи, що модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки є функціями нормальної координати. При дослідженні вільних коливань поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем, розглянуті два випадки неоднорідності: а) лінійний; б) квадратичний. Побудовані частотні рівняння і реалізовані чисельно. Побудовані характерні криві залежності.

Ключові слова: підкріплена оболонка, ортотропна оболонка, варіаційний принцип, тверде середовище, вільне коливання.

OSCILLATIONS OF A PERMANENTLY REINFORCED HETEROGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A SOLID MEDIUM

Latifov F. S., doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khalilova E. N, doctoral student

*Azerbaijan Architecture and Construction University,
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

The free oscillation of a longitudinally reinforced, orthotropic, non-uniform in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium is investigated in the present paper. Using the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, systems of equations of motion of a longitudinally reinforced, orthotropic, inhomogeneous in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium are constructed. The inhomogeneity of the shell material over the thickness is taken into account, assuming that the Young's modulus and the density of the shell material are functions of the normal coordinate. When investigating free oscillations of a longitudinally reinforced, orthotropic, inhomogeneous in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium, two cases of inhomogeneity are considered: a) linear b) quadratic. Frequency equations are constructed and numerically realized. Characteristic dependency curves are constructed.

Key words: reinforced shell, orthotropic shell, variational principle, solid medium, free oscillation.

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость, колебания и расчеты на прочность тонкостенных элементов конструкций оболочечного типа, контактирующих со средой, играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются различными ребрами. Такие конструкции могут находиться в контакте с твердой средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Однако, поведению неоднородных ортотропных тонкостенных элементов конструкций, имеющих ребра, учет их дискретного расположения, влияния среды исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных неоднородных ортотропных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей с твердой средой, являются актуальными задачами.

Отметим, что в работе [1] с помощью вариационного принципа решена задача о собственном колебании поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней средой и протекающей жидкости. Влияния внешней среды учтены с помощью системы уравнений Ламе в перемещениях. Работа [2] посвящена исследованию свободных колебаний, усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. В работе [3] приведены результаты исследования свободных колебаний продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с заполнителем. В работе [4] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения цилиндрических оболочек, контактирующих с твердой и жидкой средой, получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы. Анализ приведенных работ подсказывает, что колебание продольно подкрепленной,

ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой, изучены недостаточно.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рибристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости. Кроме того, предполагается, что все ребра образуют регулярную систему. Под регулярной системой продольных и кольцевых ребер понимается такая система, в которой жесткости всех ребер, их взаимные расстояния равны, а расстояния от края оболочки до ближайшего к нему ребра равно расстоянию между ребрами.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u , \mathcal{G} и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и \mathcal{G} с

помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , \mathcal{G}_i , w_i i -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad \mathcal{G}_i(x) = \mathcal{G}(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i).$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 – расстояния от осей i -го продольного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i , φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений продольных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к составляющим q_x , q_y и q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной цилиндрической оболочки с твердой средой получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерного функционала. Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из них заключается в том, что модуль Юнга и плотность

материала оболочки принимаются функциями нормальной координаты z [5]: $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1(z)$, $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_2(z)$, $\rho = \rho(z)$. Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае функционал полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \int \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \left(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy} + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz. \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma_x = b_{11}(z) e_x + b_{12}(z) e_y; \quad \sigma_y = b_{12}(z) e_x + b_{22}(z) e_y; \quad \sigma_{xy} = b_{66}(z) e_{xy}; \quad (2)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \quad (3)$$

где

$$b_{11}(z) = \frac{\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{22} = \frac{\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{12}(z) = \frac{\nu_2\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{66}(z) = G_{12}(z) = G(z).$$

Учитывая (2) и (3) в (1), можно написать:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int & \left[b_{11}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b_{12}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + b_{22}(z) \left(\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 + 2w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + w^2 \right) + b_{66}(z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (4) \end{aligned}$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного ребра таковы [6, 7]:

$$P_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (5)$$

Кинетическая энергия ребер записывается в виде [6, 7]:

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (6)$$

В выражениях (4) и (6) F_i , J_{zi} , J_{yi} , J_{kpi} – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_i , \tilde{G}_i – модули упругости и сдвига материала i -го продольного t – временная координата, ρ_i – соответственно плотности материалов, из которых изготовлен i -й продольный стержень.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны твердых сред, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими

нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta \vartheta + q_z w) dx dy. \quad (7)$$

Полная энергия системы равна сумме энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны твердых сред:

$$J = V + \sum_{i=1}^{k_1} (\Pi_i + K_i) + A_0. \quad (8)$$

Здесь k_1 – количество продольных ребер.

Действующие со стороны среды на продольно подкрепленную оболочку поверхностные нагрузки q_x , q_y и q_z определяются из решений системы [8, 9]:

$$\begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} - \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} + 2\mu_s \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x} - \rho_s \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varphi} - 2\mu_s \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + 2\mu_s \frac{\partial \omega_x}{\partial r} - \rho_s \frac{\partial^2 s_\varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} - \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi) + \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \rho_s \frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь s_x , s_φ , s_r – продольная, крутильная и радиальная компоненты вектора перемещения среды, соответственно; λ_s , μ_s – коэффициенты Ламе для среды; x , r , θ – продольная, нормальная и окружная координаты.

Объемное расширение $\tilde{\theta}$ и компоненты вращения ω_x , ω_θ , ω_r определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_x}{\partial x}; \quad 2\omega_x = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r s_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right]; \\ 2\omega_\varphi &= \frac{\partial s_r}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial r}; \quad 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial s_\varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

В свою очередь, напряжения посредством функций s_x , s_φ , s_r выражаются [8, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu_s \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right]; \\ \sigma_{rr} &= \lambda_s \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r s_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что контакт между оболочкой и средой является скользящим, т.е. при $r = R$

$$w = s_z, \quad (11)$$

$$q_x = -\sigma_{rx} = 0, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0, \quad q_z = -\sigma_{rr}. \quad (12)$$

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т.е. при $x = 0$ и $x = L_1$ выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A \cos n\theta \cos kx \sin \omega t; \quad \mathcal{G} = B \sin n\theta \sin kx \sin \omega t; \\ w &= C \cos n\theta \sin kx \sin \omega t, \end{aligned} \quad (13)$$

где A, B, C – неизвестные постоянные, ω – искомая частота.

Используя решение системы (9) перемещением точек срединной поверхности оболочки (13) и контактные условия (11), (12), можно определить контактное давление q_z . Это выражение представим в виде:

$$q_z = q_z^{(0)} C \cos n\theta \sin kx \sin \omega t.$$

Здесь, в случае малых инерционных действий среды на процесс колебаний системы, $q_z^{(0)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} q_z^{(0)} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left\{ \left(2(1-2\nu_s) I_n(k^*) + 2k^* I_n'(k^*) \right) k^{*2} \times \right. \\ &\left[2k^{*2} (k^{*2} - n^2) \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} + 2n^2 k^* \right] - 2 \left(k^* I_n'(k^*) - (k^{*2} + n^2) I_n(k^*) \right) k^{*3} \times \\ &\left[2(3-2\nu_s) k^* \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} - 2n^2 \right] + 2n \left(I_n(k^*) - k^* I_n'(k^*) \right) k^{*3} \times \\ &\left. \times \left[2(3-2\nu_s) k^* \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} - 2n^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае, когда инерционные действия среды на процесс колебаний системы существенны, $q_z^{(0)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} q_z^{(0)} &= \frac{E_s}{1+\nu_s} I_n(\gamma_l^*) \left[\frac{I_n(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_l^*)} \left(-\gamma_l^* \frac{I_n'(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} + \gamma_l^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \mu_l^{*2} \right) \times \right. \\ &\left. - n^2 k^{*2} \mu_t^* + \frac{R^4 k^{*3} \gamma_t^{*2} I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n^2(\gamma_t^*)} + \frac{2nk^* \gamma_l^* \mu_t^* I_n'(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} + \frac{2nk^{*3} \gamma_t^* I_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_t^*)} \right] \times \\ &\times \frac{-\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)} + \frac{2nk^* \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)}}{-\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)} - \frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)}} \times \\ &\times \left(-n^2 + n\gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_t^*)} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} n\gamma_t^* \left(\gamma_t^* - \gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_t^*)} \right) \right) + \\ &+ \left(\frac{k^* \gamma_t^* I_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_t^*)} + \gamma_t^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \frac{2k^* \gamma_t^{*2}}{\mu_t^*} \right) \cdot \frac{\left[-\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)} \right]}{2k^{*2} \gamma_l^* \gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_l^*) I_n'(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_l^*) I_n(\gamma_t^*)} - 2n^2 k^{*2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь I_n – модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода, k, n, γ_e, γ_i – волновые числа, $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2, \gamma_i^2 = k^2 - \mu_i^2, k^* = kR, \gamma_i^* = \gamma_i R, \gamma_e^* = \gamma_e R, \mu_i^* = \mu_i R, \mu_e^* = \mu_e R$.

Дополняя контактными условиями (11), (12) полной энергии системы (8), уравнение движения среды (9), приходим к контактной задаче о колебаниях неоднородной по толщине цилиндрической ортотропной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и заполненной средой.

Частотные уравнения ребристой неоднородной оболочки заполненной средой получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \tag{16}$$

где $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ – действие по Гамильтону, t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

Используя (4)-(7), (14) или (15), (13) и (16), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}v_0 + a_{i3}w_0 = 0 \quad (i=1,2,3). \tag{17}$$

Элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i=1,2,3$) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (17) возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя:

$$\det \|a_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 3. \tag{18}$$

Частотное уравнение (18) решено численно при следующих исходных данных: $R = 160 \text{ мм};$

$$\tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad h = 0,45 \text{ мм}; \quad L = 800 \text{ мм}; \quad \rho_i = 7,82 \text{ г/см}^3; \quad b_{11} = 18,3 \text{ ГПа}, \quad b_{12} = 2,77 \text{ ГПа},$$

$$b_{22} = 25,2 \text{ ГПа}, \quad b_{66} = 3,5 \text{ ГПа}, \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad I_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; \quad \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1};$$

$$\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha = 0,5; \quad a_e = 2,25 a_i; \quad a_i = 308 \text{ м/сек}.$$

Рассмотрены два вида законов изменений неоднородности: линейный –

$$\tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right] \quad \rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right] \quad \text{и параболический} \quad - \quad \tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]. \quad \text{Здесь } \tilde{E}_{0i} \quad (i=1,2) \text{ – модуль Юнга, } \alpha \text{ – параметр неоднородности.}$$

Отметим, что при линейном законе изменение $|\alpha| < 1$, при параболическом изменении α – произвольная.

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты ω_1 от относительной плотности среды ρ_s/ρ_0 для различных законов изменений неоднородности по толщине оболочки. Видно, что увеличение плотности среды приводит к снижению частоты колебаний исследуемой системы. Рис. 2 иллюстрирует влияние количества продольных ребер k_1 на параметры частоты ω_1 колебаний рассмотренной системы. Видно, что с увеличением k_1 параметры частоты ω_1 колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенном значении k_1 начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что с увеличением k_1 вес стержней увеличивается и это

приводит к существенному влиянию их инерционных свойств на процесс колебаний. Результаты счета показывают, что учет неоднородности приводит к снижению значений собственных частот колебаний рассмотренной системы по сравнению с собственными частотами колебаний этой же системы, когда оболочка однородная. Кроме того, расчеты показывают, что с увеличением жесткости материала оболочки в продольном направлении частоты колебаний системы увеличиваются.

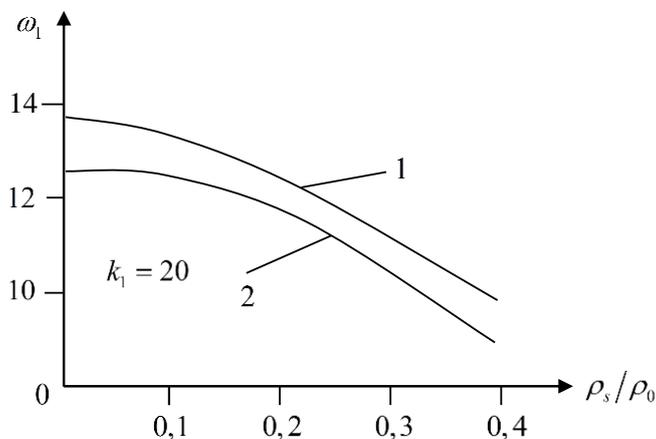


Рис. 1. Зависимость параметра частот колебаний от относительной плотности среды:
1 – линейный закон, 2 – параболический закон

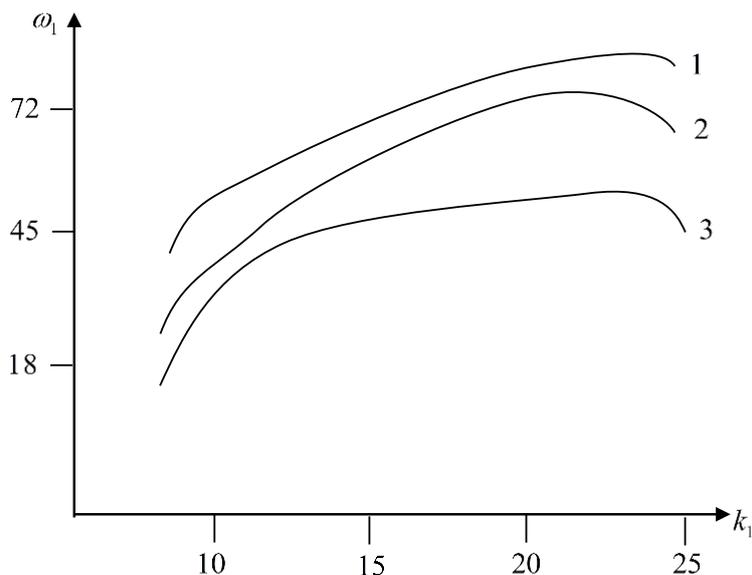


Рис. 2. Зависимость параметра частот от количества продольных ребер:
1 – однородная оболочка, 2 – линейный закон, 3 – параболический закон

ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Микаилов С. Б. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2013. Вып. 21. С. 132–139.
2. Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1. С. 59–62.
3. Сулейманова С. Г. Свободные колебания продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с наполнителем. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*. 2007. Vol. XXVII. P. 135–140.
4. Latifov F. S., Seyfullayev F. A. Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. *Trans. of NAS. Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences*. 2004. Vol. XVIV, N 1. P. 227–230.

5. Ломакин В. А. Теория неоднородных тел. Москва: Изд-во МГУ, 1975. 355 с.
6. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
7. Абовский Н. П. Ребристые оболочки. Ч. 1. Красноярск: Красноярский политехнический институт, 1967. 64 с.
8. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
9. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Прочность устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 332 с.

REFERENCES

1. Latifov, F. S., Isgkenderov, R. A. & Mikailov, S. B. (2013). Fluctuation transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium. Problemi vichislitelnoy mexaniki i prochnosti konstrukchiy, Iss. 21, pp. 132-139.
2. Latifov, F. S. & Suleymanova, S. Q. (2009). The problem of free oscillations of a reinforced system of cross-by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium. Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov, No. 1, pp. 59-62.
3. Suleymanova, S. G. (2007). Free vibrations longitudinally reinforced and loaded with axial compressive forces of a cylindrical shell with a filler. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XXVII, pp. 135-140.
4. Latifov, F. S. & Seyfullayev, F. A. (2004). Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. Trans.of NAS. Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences, Vol. XXIV, No. 1, pp. 227-230.
5. Lomakin, V. A. (1975). The theory of heterogeneous bodies. Moscow: Izdatelstvo MGU.
6. Amiro, I. Ya., Zaruchkiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova dumka.
7. Abovskiy, N. P. (1967). Ribbed shells. Pt. 1. Krasnoiarstk: Krasnoiarstkii politekhnicheskii institut.
8. Latifov, F. S. (1999). Fluctuations shells with elastic and liquid media. Baku: Elm.
9. Ilqamov, M. A., Ivanov, V. A. & Qulin, B. A. (1977). Strength, Stability and Dynamics of Shells with an elastic filler. Moscow: Nauka.

УДК 531.383

ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ, РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И НАБЛЮДЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В статье разработана и представлена методика проведения анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, которая позволяет систематизировать основные этапы, методы и подходы к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования гироскопических систем в условиях полной и неполной информации об исследуемом объекте. Выделена связь между анализируемыми свойствами систем и рядом задач управления, регулирования, наблюдения, идентификации и адаптации. Предложены отдельные задачи, опирающиеся на результаты разработанной методики, стоящие при основном и/или дополнительном изучении и моделировании гироскопических систем.

Ключевые слова: гироскоп, гироскопическая система, методика, анализ, управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость, чувствительность, адаптируемость.