12. Panchal, D. D. & Patel, A. M. (2016). Experimental Investigations in Pipe Bending Methods: A Literature Review. International Journal of Advanced Research, Vol. 4, Is. 4, pp. 77-81. Journal DOI: 10.21474/IJAR01.

13. Wang, Z. T. & Hu, Z. (1990). Theory of pipe–bending to a small bend radius using induction heating . J. Mater. Process. Technol, Vol. 21, pp. 275-284. DOI: 10.1016/0924–0136(90)90047–X.

14. Xu, Y., Zhang, S., Cheng, M., Song, H. & Zhang, X. (2014). Application of pulsating hydroforming in manufacture of engine cradle of austenitic stainless steel. Procedia Engineering, Vol. 8, pp. 12205-2210. doi:10.1016/j.proeng.2014.10.309.

15. Svitlinets, A. M., Onishchenko, I. S. & Chernyakov, Yu. A. (2016). Residual stresses and strains in the pipe after preliminary bending and local heating. Stroitel'stvo, materialovedeniye, mashinostroyeniye: sb. nauchn. Trudov, Iss. 92, pp. 132-137.

УДК 517.988 : 519.632

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФУНКЦІЙ ГРІНА ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

Харківський національний університет радіоелектроніки, просп. Науки, 14, Харків, 61000, Україна

maxim.sidorov@nure.ua

У роботі розглянуто питання побудови двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної крайової задачі $-\Delta u = f(\mathbf{x},u)$ у $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $u = 0$ на $\partial\Omega$. Дослідження цієї задачі проводиться методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. За допомогою методу функцій Гріна або методу квазіфункцій Гріна-Рвачова нелінійна задача перетворюється на нелінійне інтегральне рівняння Гаммерштейна або Урисона відповідно, розглядуване як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій $C(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Далі для розв'язання нелінійного інтегрального рівняння застосовується метод послідовних наближень. Отримано умови двобічної збіжності побудованого ітераційного процесу. Обчислювальний експеримент проведено для задачі зі степеневою нелінійністю.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; додатний розв'язок; сильно інваріантний конусний відрізок; гетеротонний оператор; двобічні наближення; функція Гріна; квазіфункція Гріна-Рвачова.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФУНКЦИЙ ГРИНА И КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА-РВАЧЕВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДВУСТОРОННИХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, просп. Науки, 14, Харьков, 61000, Украина

maxim.sidorov@nure.ua

В работе рассмотрен вопрос построения двусторонних приближений к положительному решению нелинейной краевой задачи $-\Delta u = f(\mathbf{x},u)$ в $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $u = 0$ на $\partial\Omega$. Исследование этой задачи проводится методами теории нелинейных операторов в полуупорядоченных пространствах. С помощью метода функций Грина или метода квазифункций Грина-Рвачева нелинейная задача преобразовывается в нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна или Урысона соответственно, рассматриваемое как нелинейное операторное уравнение с гетеротонным оператором в пространстве непрерывных функций $C(\bar{\Omega})$, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. Далее для решения нелинейного интегрального уравнения применяется метод последовательных приближений. Получены условия двусторонней сходимости построенного итерационного процесса. Вычислительный эксперимент проведено для задачи со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача; положительное решение; сильно инвариантный конусный отрезок; гетеротонный оператор; двусторонние приближения; функция Грина; квазифункция Грина-Рвачёва.

CONSTRUCTION TWO-SIDED ITERATIVE PROCESSES FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS USING METHODS OF GREEN'S FUNCTIONS AND THE QUASI-FUNCTIONS OF GREEN-RVACHEV

Sidorov M. V., Ph.D. in Physis and Maths, associate professor

Kharkov National University of Radio Electronics,
14, Nauka Ave, Kharkov, 61000, Ukraine

maxim.sidorov@nure.ua

In this paper we consider the nonlinear boundary value problem $-\Delta u = f(\mathbf{x},u)$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$, where $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ – bounded domain with a piecewise-smooth boundary $\partial\Omega$. This problem is a mathematical model of many stationary processes that are considered in chemical kinetics, biology, combustion theory, etc. We will assume that the function $f(\mathbf{x},u)$ is non-negative and continuous by all variables $\mathbf{x}$, u, if $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$, $u\ge 0$. To analyze the problem and construct two-sided approximations to its positive solutions, we use the methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces. Let the space $C(\bar{\Omega})$ be semiordered by a cone $\mathcal{K}_+=\{u\in C(\bar{\Omega}): u\ge 0\}$. The problem in the space $C(\bar{\Omega})$ is equivalent to the Hammerstein equation $u(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\xi)\, f(\xi,u(\xi))d\xi$ or Urysohn equation $u(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega} L(\mathbf{x},\xi,u(\xi))d\xi$, where $G(\mathbf{x},\xi)$ is Green's function of the first boundary value problem for the operator $-\Delta$ in the domain Ω, $L(\mathbf{x},\xi,u(\xi))=K(\mathbf{x},\xi)u(\xi)+G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,f(\xi,u(\xi))$, $K(\mathbf{x},\xi)=-\Delta_\xi q(\mathbf{x},\xi)$, $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)$ is Green-Rvachev's quasi-function of the first boundary value problem for the operator $-\Delta$ in the domain Ω, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Let us assume that the function $f(\mathbf{x},u)$ allows a diagonal representation $f(\mathbf{x},u)=\hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, where the function $\hat{f}(\mathbf{x},v,w)$ is continuous on the set of variables $\mathbf{x}$, v, w, monotonically increases with respect to v and monotonically decreases with respect to w for all $\mathbf{x}\in\Omega$. For nonlinear integral Hammerstein equation or nonlinear integral Urysohn equation we construct scheme of two-sided approximations. As initial approximations we choose ends of strongly invariant segment $<v_0, w_0>$ for according heterotone operator. Herewith it has been proven that $v_0\le v_1\le ...\le v_k\le ...\le u^*\le \ldots \le w_k\le \ldots\le w_1\le w_0$. In the paper the results of the computational experiment for power nonlinearity $f(\mathbf{x},u)=u^p$, $0<p<1$, are presented, that allow us to draw a conclusion about efficiency of the suggested method.

Key words: nonlinear boundary value problem, positive solution, strongly invariant cone segment, heterotone operator, two-sided approximations, Green's function, quasi-function of Green-Rvachev.

ВСТУП

При математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах часто виникає проблема розв'язання задач для рівняння $-\Delta u = f\left(\mathbf{x},u\right)$. У ряді робіт [1, 2 та ін.] проведено дослідження цього рівняння, отримано умови існування та єдності додатних розв'язків. Проблемі побудови двобічних методів розв'язання крайових задач для рівняння $-\Delta u = f\left(\mathbf{x},u\right)$ присвячені роботи [3-7 та ін.]. Ця робота продовжує дослідження, розпочаті у [6, 7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою роботи є розробка нових методів побудови двобічних ітераційних процесів знаходження додатних розв'язків нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\Delta u = f\left(\mathbf{x}, u\right) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2\right)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$.

Вважатимемо, що функція $f\left(\mathbf{x}, u\right)$ невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, u, якщо $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, $u \geq 0$.

Припустимо також, що межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i\left(\mathbf{x}\right) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, де кожна $\sigma_i\left(\mathbf{x}\right)$ – елементарна функція. Тоді за допомогою методу R-функцій [8] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega\left(\mathbf{x}\right)$ таку, що:

а) $\omega\left(\mathbf{x}\right) > 0$ у Ω;

б) $\omega\left(\mathbf{x}\right) = 0$ на $\partial\Omega$;

в) $\left|\nabla\omega\left(\mathbf{x}\right)\right| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Також функція $\omega\left(\mathbf{x}\right)$ можне мати певні властивості диференційованості, завдяки використанню різних достатньо повних систем R-функцій [8].

Задачу (1), (2) і побудовані нижче еквівалентні їй інтегральні рівняння розглядатимемо у просторі неперервних функцій $C\left(\bar{\Omega}\right)$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних у $C\left(\bar{\Omega}\right)$ функцій [3, 4]. Зазначимо, що конус $\mathcal{K}_+$ у $C\left(\bar{\Omega}\right)$ є нормальним [3, 4].

2. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ФУНКЦІЙ ГРІНА

Нехай $G\left(\mathbf{x}, \xi\right)$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ в області Ω, $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2\right)$, $\xi = \left(\xi_1, \xi_2\right)$. Тоді задача (1), (2) у просторі $C\left(\bar{\Omega}\right)$ еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню Гаммерштейна [3, 4]

$$u\left(\mathbf{x}\right) = \int_{\Omega} G\left(\mathbf{x}, \xi\right) f\left(\xi, u\left(\xi\right)\right) d\xi. \tag{3}$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T, який діє $C\left(\bar{\Omega}\right)$ за правилом

$$T\left(u\right) = \int_{\Omega} G\left(\mathbf{x}, \xi\right) f\left(\xi, u\left(\xi\right)\right) d\xi. \tag{4}$$

Припустимо, що функція $f\left(\mathbf{x}, u\right)$ дозволяє діагональне подання $f\left(\mathbf{x}, u\right) = \hat{f}\left(\mathbf{x}, u, u\right)$, де функція $\hat{f}\left(\mathbf{x}, v, w\right)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор T вигляду (4) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}\left(v, w\right) = \int_{\Omega} G\left(\mathbf{x}, \xi\right) \hat{f}\left(\xi, v\left(\xi\right), w\left(\xi\right)\right) d\xi. \tag{5}$$

Оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними [3, 4].

Зауважимо, що для випадку, коли функція $f(\mathbf{x}, u)$ монотонно зростає за u для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, можна обрати $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$, а для монотонно спадної за u функції $f(\mathbf{x}, u)$ можна покласти $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$.

Розглянемо у $\mathcal{K}_+$ конусний відрізок $< v_0, w_0 >=< \alpha\omega, \beta\omega >$, $0 \le \alpha < \beta$. Оберемо α і β так, щоб цей конусний відрізок був сильно інваріантним для гетеротонного оператора (5), тобто щоб виконувалися умови

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geqslant v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leqslant w_0. \tag{6}$$

Для оператора (5) умови (6) призводять до нерівностей

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\, \hat{f}(\xi, \alpha\omega(\xi), \beta\omega(\xi))\, d\xi \ge \alpha\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7}$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\, \hat{f}(\xi, \beta\omega(\xi), \alpha\omega(\xi))\, d\xi \le \beta\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх} \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8}$$

Нехай система нерівностей (7), (8) розв’язна. Тоді сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

тобто

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\, \hat{f}(\xi, v_n(\xi), w_n(\xi))\, d\xi, \tag{10}$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\, \hat{f}(\xi, w_n(\xi), v_n(\xi))\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка можна зробити висновок про те, що послідовність $\{v_{n+1}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w_{n+1}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Крім того, з нормальності конуса $\mathcal{K}_+$ і цілком неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0 .$$

І нарешті припустимо, що для всіх додатних чисел v, w і будь-якому $\tau \in (0, 1)$ виконується нерівність

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{12}$$

яка гарантує u_0-псевдоугнутість оператора (4) з $u_0(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \xi)\, d\xi$.

Тоді інтегральне рівняння (3) (а отже, і крайова задача (1), (2)) має єдиний додатний розв’язок [4], до якого двобічно збігається ітераційний процес (10), (11).

Отже, справджується теорема.

Теорема 1. Нехай система нерівностей (7), (8) має розв’язок (α, β) такий, що $0 \le \alpha < \beta$ і виконується умова (12). Тоді ітераційний процес (10), (11) з $v_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ двобічно збігається до єдиної в конусі $\mathcal{K}_+$ нерухомої точки u^* оператора T :

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0 .$$

3. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА

Практичне використання методу побудови двобічних ітераційних процесів методом функцій Гріна блокується тим, що функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ відома лише для незначної кількості класичних областей. При розгляді нелінійної крайової задачі (1), (2) в областях некласичної геометрії або в областях, для яких функція Гріна відома, але має складний аналітичний вираз, для побудови відповідного (1), (2) інтегрального рівняння можна використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції [8].

Означення. Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у $\mathbf{R}^2$ назвемо функцію

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = g_2(r) - q(\mathbf{x}, \xi),$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $r = |\mathbf{x} - \xi|$, $g_2(r) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа у $\mathbf{R}^2$, $q(\mathbf{x}, \xi) = g_2\left(\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}\right)$.

Отже,

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}} = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}{r^2}} . \tag{13}$$

З властивостей функції $\omega(\mathbf{x})$ та з (13) випливає, що квазіфункція $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)$ Гріна-Рвачова має такі властивості:

а) $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = 0$ на $\partial\Omega$;

б) є симетричною функцією: $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = G_{\text{quasi}}(\xi, \mathbf{x})$;

в) має таку ж особливість при $\mathbf{x} = \xi$, що і звичайна функція Гріна;

г) додатна в області Ω : $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) > 0$, $\mathbf{x}, \xi \in \Omega$, $\mathbf{x} \ne \xi$.

Нехай $u(\mathbf{x})$ – класичний розв’язок задачі (1), (2). Використовуючи інтегральне подання функції класу C^2

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega}\left[g(r)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(r)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]d_\xi s - \int_{\Omega} g(r)\Delta_\xi u(\xi)\,d\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega ,$$

другу формулу Гріна

$$\int_{\Omega}\left[u(\xi)\Delta_\xi q(\mathbf{x}, \xi) - q(\mathbf{x}, \xi)\Delta_\xi u(\xi)\right]d\xi = \int_{\partial\Omega}\left[u(\xi)\frac{\partial q(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - q(\mathbf{x}, \xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]d_\xi s$$

та поведінку функцій $u(\mathbf{x})$, $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)$ на $\partial\Omega$, від задачі (1), (2) переходимо до інтегрального рівняння Урисона

$$u(\mathbf{x})=\int_{\Omega} L(\mathbf{x},\xi,u(\xi))\,d\xi\,, \tag{14}$$

де

$$L(\mathbf{x},\xi,u(\xi))=K(\mathbf{x},\xi)u(\xi)+G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,f(\xi,u(\xi)),$$

$$K(\mathbf{x},\xi)=-\Delta_{\xi}q(\mathbf{x},\xi).$$

Рівняння (14) розглядатимемо в банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_{+}$ невід'ємних функцій.

Уведемо до розгляду нелінійний оператор T, що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)=\int_{\Omega} L(\mathbf{x},\xi,u(\xi))\,d\xi\,. \tag{15}$$

З результатів робіт [3, 4] випливає, що оператор T вигляду (15) буде цілком неперервним.

Позначимо

$$K_{+}(\mathbf{x},\xi)=\max\{0,K(\mathbf{x},\xi)\},\quad K_{-}(\mathbf{x},\xi)=\max\{0,-K(\mathbf{x},\xi)\}.$$

Тоді

$$K(\mathbf{x},\xi)=K_{+}(\mathbf{x},\xi)-K_{-}(\mathbf{x},\xi)$$

і оператор (15) набуває вигляду

$$T(u)=\int_{\Omega}K_{+}(\mathbf{x},\xi)u(\xi)\,d\xi-\int_{\Omega}K_{-}(\mathbf{x},\xi)u(\xi)\,d\xi+\int_{\Omega}G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,f(\xi,u(\xi))\,d\xi\,.$$

Якщо функція $f(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x},u)=\hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, де функція $\hat{f}(x,v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$, то оператор T буде гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}(v,w)=\int_{\Omega}K_{+}(\mathbf{x},\xi)v(\xi)\,d\xi-\int_{\Omega}K_{-}(\mathbf{x},\xi)w(\xi)\,d\xi+\int_{\Omega}G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat{f}(\xi,v(\xi),w(\xi))\,d\xi\,.$$

Як і у випадку методу функцій Гріна в конусі $\mathcal{K}_{+}$ невід'ємних у $C(\bar{\Omega})$ функцій виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора T конусний відрізок $<v_0,w_0>=<\alpha\omega,\beta\omega>$, де $0\le\alpha<\beta$. Умови сильної інваріантності (6) призводять до системи нерівностей

$$\alpha\int_{\Omega}K_{+}(\mathbf{x},\xi)\omega(\xi)\,d\xi-\beta\int_{\Omega}K_{-}(\mathbf{x},\xi)\omega(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{\Omega}G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat{f}(\xi,\alpha\omega(\xi),\beta\omega(\xi))\,d\xi\ge\alpha\omega(\mathbf{x})\ \text{ для всіх }\ \mathbf{x}\in\Omega\,, \tag{16}$$

$$\beta\int_{\Omega}K_{+}(\mathbf{x},\xi)\omega(\xi)\,d\xi-\alpha\int_{\Omega}K_{-}(\mathbf{x},\xi)\omega(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat f\big(\xi,\beta\omega(\xi),\alpha\omega(\xi)\big)d\xi\le\beta\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх} \quad \mathbf{x}\in\Omega\,. \tag{17}$$

У випадку розв'язності системи нерівностей (16), (17) будуємо ітераційний процес за формулами (9):

$$v_{n+1}(\mathbf{x})=\int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)v_n(\xi)d\xi-\int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)w_n(\xi)d\xi+$$

$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat f\big(\xi,v_n(\xi),w_n(\xi)\big)d\xi\,, \tag{18}$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x})=\int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)w_n(\xi)d\xi-\int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)v_n(\xi)d\xi+$$

$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat f\big(\xi,w_n(\xi),v_n(\xi)\big)d\xi,\quad n=0,1,2,\dots, \tag{19}$$

де покладемо $v_0(\mathbf{x})=\alpha\omega(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x})=\beta\omega(\mathbf{x})$.

Теорема 2. Якщо система нерівностей (17), (18) має розв'язок (α,β) такий, що $0\le\alpha<\beta$, то ітераційний процес (18), (19) збігається: $v_n\to v^*$, $w_n\to w^*$, причому

$$\alpha\omega=v_0\leqslant v_1\leqslant\dots\leqslant v_n\leqslant\dots\leqslant v^*\leqslant w^*\leqslant\dots\leqslant w_n\leqslant\dots\leqslant w_1\leqslant w_0=\beta\omega\,.$$

Якщо при цьому $v^*=w^*=u^*$, то u^* – єдина на $<\alpha\omega,\ \beta\omega>$ нерухома точка оператора (15).

Зауважимо, що перевагою побудованих двобічних ітераційних процесів є те, що на кожній n -й ітерації ми маємо зручну оцінку похибки для наближеного розв'язку $u_n(\mathbf{x})=\dfrac{w_n(\mathbf{x})+v_n(\mathbf{x})}{2}$:

$$\left\|u^*-u_n\right\|_{C(\bar\Omega)}\le\frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}\big(w_n(\mathbf{x})-v_n(\mathbf{x})\big).$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon>0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}\big(w_n(\mathbf{x})-v_n(\mathbf{x})\big)<2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x})\approx u_n(\mathbf{x})$.

4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо задачу (1), (2) з $f(\mathbf{x},u)=u^p$, $p>0$. Оскільки $f(\mathbf{x},u)=u^p$ зростає за u, то функцію $\hat f(x,v,w)$ оберемо у вигляді $\hat f(x,v,w)=v^p$.

Застосуємо до розв'язання задачі метод функцій Гріна. Умова (12) має вигляд $(\tau v)^p>\tau v^p$, або $(\tau^p-\tau)v^p>0$, і справджується для всіх $v>0$, $\tau\in(0,1)$, якщо $0<p<1$. Нерівності (7), (8), які визначають сильно інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\alpha^{1-p}\omega(\mathbf{x})\le\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)\,\omega^p(\xi)d\xi \quad \text{для всіх} \quad \mathbf{x}\in\Omega\,, \tag{20}$$

$$\beta^{1-p}\omega(\mathbf{x})\ge\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)\,\omega^p(\xi)d\xi \quad \text{для всіх} \quad \mathbf{x}\in\Omega\,, \tag{21}$$

а ітераційний процес (10), (11) формується за формулами

$$v_{n+1}(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\xi)\,v_n^p(\xi)d\xi\,, \tag{22}$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) w_n^p(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

де $u_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $v_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$.

Теорема 3. Якщо система нерівностей (20), (21) має розв’язок (α, β) такий, що $0 \le \alpha < \beta$, і $0 < p < 1$, то послідовні наближення, які формуються за схемою (22), (23), двобічно збігаються до єдиного додатного розв’язку задачі (1), (2) з $f(\mathbf{x}, u) = u^p$.

Застосуємо тепер до розв’язання задачі метод квазіфункцій Гріна-Рвачова для значень p, які задовольняють нерівність $0 < p < 1$. Нерівності (16), (17), які визначають сильно інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\alpha \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi - \beta \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi +$$

$$+\alpha^p \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \ge \alpha\omega(\mathbf{x}) \ \text{ для всіх } \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{24}$$

$$\beta \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi - \alpha \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi +$$

$$+\beta^p \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \le \beta\omega(\mathbf{x}) \ \text{ для всіх } \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{25}$$

а ітераційний процес (18), (19) формується за формулами

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) v_n^p(\xi) d\xi, \tag{26}$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) w_n^p(\xi) d\xi, \tag{27}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $u_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $v_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$.

Теорема 4. Якщо система нерівностей (24), (25) має розв’язок (α, β) такий, що $0 \le \alpha < \beta$ і $0 < p < 1$, то послідовні наближення, які формуються за схемою (26), (27), двобічно збігаються до єдиного додатного розв’язку задачі (1), (2) з $f(\mathbf{x}, u) = u^p$.

Обчислювальний експеримент було проведено для значень параметра p від 0,1 до 0,9 з кроком 0,1 в області $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$. Функція Гріна, квазіфункція Гріна-Рвачова і функція $\omega(x_1, x_2)$, побудована методом R-функцій, мають відповідно вигляд

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k, m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi k \xi_1 \sin \pi m \xi_2}{k^2 + m^2},$$

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}{r^2}},$$

де $\omega(\mathbf{x}) = [x_1(1 - x_1)] \wedge_0 [x_2(1 - x_2)]$, $\wedge_0$ – знак R-кон’юнкції [8].

Ітерації припинялись, коли у значенні $\frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\left(w_n\left(\mathbf{x}\right)-v_n\left(\mathbf{x}\right)\right)$ незмінними ставали чотири значущі цифри після коми. Значення α, β, кількість зроблених ітерацій N і норма наближеного розв'язку $u_N\left(\mathbf{x}\right)$ залежно від p при застосуванні методу функцій Гріна наведені в таблиці 1, а при застосуванні методу квазіфункцій Гріна-Рвачова – у таблиці 2.

Таблиця 1 – Результати реалізації метода функцій Гріна

p	α	β	N	$\left\|u_N\right\|_{C(\bar{\Omega})}$
0,1	0,222	0,367	4	$0,5263\cdot10^{-1}$
0,2	0,135	0,248	5	$0,3486\cdot10^{-1}$
0,3	$0,722\cdot10^{-1}$	0,150	6	$0,2051\cdot10^{-1}$
0,4	$0,313\cdot10^{-1}$	$0,764\cdot10^{-1}$	7	$0,1010\cdot10^{-1}$
0,5	$0,976\cdot10^{-2}$	$0,299\cdot10^{-1}$	12	$0,3749\cdot10^{-2}$
0,6	$0,170\cdot10^{-2}$	$0,732\cdot10^{-2}$	18	$0,8472\cdot10^{-3}$
0,7	$0,941\cdot10^{-4}$	$0,704\cdot10^{-3}$	25	$0,7098\cdot10^{-4}$
0,8	$0,288\cdot10^{-6}$	$0,653\cdot10^{-5}$	41	$0,4980\cdot10^{-6}$
0,9	$0,841\cdot10^{-14}$	$0,523\cdot10^{-11}$	82	$0,1718\cdot10^{-12}$

Таблиця 2 – Результати реалізації метода квазіфункцій Гріна-Рвачова

p	α	β	N	$\left\|u_N\right\|_{C(\bar{\Omega})}$
0,1	0,140	0,398	12	$0,5314\cdot10^{-1}$
0,2	$0,622\cdot10^{-1}$	0,274	14	$0,3523\cdot10^{-1}$
0,3	$0,131\cdot10^{-1}$	0,172	17	$0,2076\cdot10^{-1}$
0,4	$0,856\cdot10^{-2}$	$0,894\cdot10^{-1}$	19	$0,1025\cdot10^{-1}$
0,5	$0,486\cdot10^{-2}$	$0,365\cdot10^{-1}$	29	$0,3820\cdot10^{-2}$
0,6	$0,146\cdot10^{-2}$	$0,891\cdot10^{-2}$	42	$0,8683\cdot10^{-3}$
0,7	$0,227\cdot10^{-3}$	$0,908\cdot10^{-3}$	58	$0,7348\cdot10^{-4}$
0,8	$0,288\cdot10^{-5}$	$0,952\cdot10^{-5}$	95	$0,5261\cdot10^{-6}$
0,9	$0,315\cdot10^{-11}$	$0,984\cdot10^{-11}$	152	$0,2214\cdot10^{-12}$

Як бачимо, результати, отримані обома методами, майже збігаються. Різницю можна пояснити тим, що при реалізації метода функцій Гріна точна функція замінювалася частковою сумою відповідного ряду. Крім того, зауважимо, що побудований для методу квазіфункцій Гріна-Рвачова інваріантний конусний відрізок виявився дещо ширшим, ніж для методу функцій Гріна. Це призвело до більш повільної збіжності метода квазіфункцій Гріна-Рвачова.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто два методи побудови ітераційних процесів, які двобічно збігаються до додатних розв'язків нелінійних крайових задач вигляду (1), (2). Перший метод використовує точну функцію Гріна і дозволяє не тільки побудувати двобічні наближення, а й провести у ряді випадків теоретичне дослідження поставленої задачі. Другий метод використовує квазіфункцію Гріна-Рвачова і також дозволяє за деяких умов побудувати двобічні наближення до додатного розв'язку задачі. Цей метод стає в нагоді у випадках, коли для області, у якій розглядається задача, функція Гріна невідома або має складний аналітичний вираз. Порівняння запропонованих методів та їх ефективність проілюстрована серією обчислювальних експериментів. Методи функцій Гріна і квазіфункцій Гріна-Рвачова можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є нелінійні крайові задачі. Крім того, запропоновані методи можуть бути поширені на крайові задачі для систем нелінійних еліптичних рівнянь та еліптичних рівнянь вищих порядків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. *Int. J. Bifurcation Chaos*. 2000. 10, № 7. P. 1565–1612.
2. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. *International Mathematical Forum*. 2008. 3 (17). P. 811–816.
3. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
4. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
5. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. Киев: Наук. думка, 1980. 268 с.
6. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35–42.
7. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107–120.
8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.

REFERENCES

1. Chen, G., Zhou, J. & Ni, W.-M. (2000). Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. Int. J. Bifurcation Chaos, 10, No. 7, pp. 1565-1612.
2. Matinfar, M. & Nemati, K. (2008). A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. International Mathematical Forum, 3 (17), pp. 811-816.
3. Krasnosel'skij, M. A. (1962). Positive Solutions of Operator Equations. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
4. Opojtsev, V. I. & Khurodze, T.A. (1984). Nonlinear Operators in Spaces with a Cone. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta (in Russian).
5. Kurpel', N. S. & Shuvar, B. A. (1980). Twosided operator inequalities and their application. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
6. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2013). About construction iterative methods of boundary value problems for nonlinear elliptic equations. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, No. 1, pp. 35 – 42 (in Russian).
7. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2015). On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, No. 3, pp. 107 – 120 (in Russian).
8. Rvacev, V. L. (1982). Theory of R-functions and its some applications. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).