

ЛІТЕРАТУРА

1. Величко И. Г., Приварников А. К., Спица О. Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты. *Теор. и прикл. мех.* 2001. Вып. 34. С. 38–43.
2. Приварников А. К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1982. Рукопись. 350 с.
3. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. Упругие многослойные основания. Днепропетровск, 1985. 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789 –В.
4. Приварников А. К., Годес Ю. Я. О решении первой граничной задачи для упругого многослойного основания. *Устойчивость и прочность элементов конструкций*, 1986. С. 6–28.
5. Шевляков Ю. А., Приварников А. К. К расчету слоистых оснований. *Прикладная механика*. 1962. Т.8, Вып. 2. С. 113–119.

REFERENCES

1. Velychko, Y. H., Pryvarnykov, A. K. & Spytza, O. H. (2001). Matrix algorithm for the analytical determination of the stress-strain state of an elastic multilayer plate. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, Iss. 34, pp. 38-43.
2. Privarnikov, A. K. (1982). Boundary-value problems of the theory of elasticity for multilayered bases of a simple and complex structure (Unpublished doctor thesis). Moscow, SSSR.
3. Privarnikov, A. K. & Lamzyuk, V. D. (1985). Elastics multilayer bases. Dnepropetrovsk.
4. Privarnikov, A. K. & Godes, YU. YA. (1986). On the solution of the first boundary value problem for an elastic multilayered base. *Ustoychivost' i prochnost' elementov konstruktsey*, pp.6–28.
5. Shevlyakov, YU. A. & Privarnikov, A. K. (1962). To the calculation of layered bases. *Prikladnaya mekhanika*, Vol.8, Iss. 2, pp. 113–119.

УДК 539.312

ДИНАМІКА НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОВЗДОВЖНІМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ, ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Фасоляк А. В.

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

antonfasolyak@mail.ru

У роботі розглянуто динаміку нескінченно довгої циліндричної оболонки у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі. Досліджується вплив поздовжніх ребер жорсткості та їх взаємного розташування на динамічний напружено-деформований стан цієї механічної системи. До сьогодні подібні задачі розглядалися лише у стаціонарній постановці, тому новизною нашої роботи є те, що задача розглядається у нестационарній постановці. Рух середовища описувався динамічними рівняннями теорії пружності, рух оболонки – рівняннями, що враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а рух поздовжніх ребер жорсткості – рівняннями теорії балок. Розв'язок задачі отримано шляхом розкладання невідомих функцій у тригонометричний ряд Фур'є, а також методом інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Обернення інтегральних перетворень здійснювалося чисельно. Отримані результати проаналізовано та проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, поздовжні ребра жорсткості, пружне середовище, динамічне навантаження.

ДИНАМИКА БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Фасоляк А. В.

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина*

antonfasolyak@mail.ru

В работе рассмотрена динамика бесконечно длинной цилиндрической оболочки в линейно-упругой, однородной, изотропной и инерциальной трехмерной среде. Исследуется влияние продольных ребер жесткости и их взаимного расположения на динамическое напряженно-деформированное состояние данной механической системы. До настоящего времени подобные задачи рассматривались только в стационарной постановке, поэтому новизной данной работы является то, что задача рассмотрена в нестационарной постановке. Движение среды описывалось динамическими уравнениями теории упругости, движение оболочки – уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения, а движение продольных ребер жесткости – уравнениями теории балок. Решение данной задачи получено путем разложения неизвестных функций в тригонометрический ряд Фурье, а также методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Обращение интегральных преобразований проводилось численно. Полученные результаты проанализированы и проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, продольные ребра жесткости, упругая среда, динамическое нагружение.

DYNAMIC OF INFINITE CYLINDRICAL SHELL, WHICH IS REINFORCED BY LONGITUDINAL RIBS OF RIGIDITY, IN THREE-DIMENSIONAL ELASTIC MEDIA

Fasoliak A. V.

*Zaporizhzhya national technical university,
Zhykovskago str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

antonfasolyak@mail.ru

Dynamic of infinite cylindrical shell in linearly elastic, homogeneous, isotropic and inertial three-dimensional media is considered in this work. Influence of longitudinal ribs of rigidity, which under action dynamic load, and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system are investigated. In present paper not stationary problem was considered and it's scientific novelty of this work, because before these problems has been considered only in stationary formulations. Purpose of present work is analyzing influence of longitudinal ribs of rigidity and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system. Also purpose of this work is compare results for cylindrical shell, which is reinforced by longitudinal rib of rigidity, and cylindrical shell, which isn't reinforced, under action corresponding loads.

Media motions are described by dynamic equations of elastic theory, which are solved by method of three potential functions. Shell motions – by equations, which consider transverse shear and inertia of rotation (Timoshenko's shell). Motions of longitudinal ribs of rigidity are described by dynamic equations of beams theory. The problem is solved in dimensionless quantities. All quantities are expanded in trigonometrically Fourier series on angle variable. Integral transforms Fourier (on axial variable) and Laplace (on dimensionless time variable) are also used.

Solution was received as Fourier series of inversion of integral Fourier and Laplace transforms. Integral transforms are inversed numerically. Filon's method (to inverse Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used. Then after summarizing of trigonometrically Fourier series, we obtain solution of the problem.

Case, when shell, which is reinforced by two, four and six longitudinal ribs of rigidity, has been considered. Radial displacement on angle and axial variables for the shell was illustrated graphically.

Also case, when the shell, which is reinforced by two longitudinal ribs of rigidity, is compared with cylindrical shell, which isn't reinforced, under action of corresponding loads.

Key words: cylindrical shell, longitudinal rib of rigidity, elastic media, dynamic loads.

ВСТУП

На сьогодні важливе місце для практики мають динамічні задачі для пружних, тонких циліндричних оболонок у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі під дією нестационарних навантажень. Зокрема, до таких розрахункових схем зводяться задачі моделювання динаміки трубопроводів та тунелів глибокого залягання (глибина залягання перевищує 10 радіусів оболонки). У подібних

задачах напруження і навантаження, викликані дією поверхневих нестационарних динамічних навантажень, можуть значно перевищувати відповідні статичні значення, а тому не можуть бути розраховані за допомогою коефіцієнта динамічності. Тому ця задача є актуальною.

На сьогодні досить добре вивчена динаміка циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі. У монографії [1] досліджені подібні задачі у стаціонарній постановці. У нестационарній постановці такі задачі розглянуті зокрема в роботах [2, 3], причому у роботі [2] у осесиметричній постановці, а в [3] – неосесиметричній.

Також важливе значення для практики мають оболонки, підкріплені поздовжніми ребрами жорсткості (стрингерами). У монографії [1] розглянута подібна динамічна задача у стаціонарній постановці.

Нашу роботу присвячено нестационарним динамічним задачам для дискретно підкріплених поздовжніми ребрами жорсткості циліндричним оболонкам, у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному середовищі. Припускається, що динамічне навантаження діє на ребра жорсткості. Важливим є дослідження впливу кількості ребер. Також проводиться порівняння з невідкріпленою оболонкою при аналогічних навантаженнях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай оболонка і середовище віднесені до нерухої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, причому вісь оболонки збігається з оссю Ox . Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $r = b$, а зовнішня – $r = a$ ($h = a - b$ – товщина оболонки). Середовище задається співвідношенням $r \geq a$. Контакт між оболонкою і середовищем будемо вважати ковзним.

На внутрішній поверхні оболонки розміщено N поздовжніх ребер жорсткості. Положення кожного ребра жорсткості на внутрішній поверхні оболонки задається рівнянням $\theta = \theta_j$, $j = \overline{1, N}$.

Рух середовища будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності, які у векторній формі мають вигляд [4]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div}(\bar{u}) - \mu_2 \text{rot rot}(\bar{u}) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $\bar{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$ – вектор переміщень; λ_2, μ_2 – параметри Ламе для простору, ρ_2 – щільність простору.

Рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), та в загальному випадку мають вигляд [5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2a} \chi_\theta - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_\theta, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{a^2} + \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (p - q_r), \\ -6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_x + \frac{1-\nu_1}{2a^2} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x, \\ -6k^2 \frac{1-\nu_1}{ah^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_\theta + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_\theta, \end{cases} \quad (2)$$

де u , v , w – осьове, кільцеве та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки відповідно; χ_x , χ_θ – кути повороту нормалі до серединної поверхні в осьовому і кільцевому напрямках; q_r , q_x , q_θ – нормальна, осьова та кільцева реакція з боку середовища на границі контакту між середовищем та оболонкою; p – нормальне навантаження; G_1 , ρ_1 , ν_1 , h , a – модуль зсуву, густина, коефіцієнт Пуассона, товщина та зовнішній радіус оболонки; $k^2 = \frac{2}{3}$ – числовий коефіцієнт.

Для опису руху кожного ребра використовуємо рівняння теорії балок [6]:

$$E_{\delta j} I_j \frac{\partial^4 y_{\delta j}}{\partial x^4} + \rho_{\delta j} F_j \frac{\partial^2 y_{\delta j}}{\partial t^2} = p_{\delta j}(x, t) - q_{c j}(x, t); \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де $p_{\delta j}(x, t)$ – інтенсивність заданого навантаження на j -е ребро; $q_{c j}(x, t)$ – невідома реакція з боку оболонки на j -е ребро; $E_{\delta j}$, $\rho_{\delta j}$ – модуль Юнга і щільність j -го шпангоута; $y_{\delta j}$ – прогин j -го ребра; I_j , F_j – момент інерції і площа поперечного перетину ребра.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції ϕ , φ , χ за формулами [4]

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}. \quad (4)$$

Підставляємо залежності (4) у рівняння (1).

Маємо:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{ \varphi, \chi \} = 0; \quad (5)$$

$$c_p^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (6)$$

Граничні умови між оболонкою і середовищем мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_r(x, t, \theta) &= -\sigma_{rr}(a, x, t, \theta), \quad q_x(x, t, \theta) = q_\theta(x, t, \theta) = 0, \\ w(x, t, \theta) &= u_r(a, x, t, \theta), \quad \sigma_{rx}(a, x, t, \theta) = \sigma_{r\theta}(a, x, t, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (7), виражаються через переміщення, згідно з формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{G_2}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Умови контакту ребер і оболонки запишемо так:

а) у місцях контакту $\theta = \theta_j$ нормальне переміщення ребра рівне нормальному переміщенню оболонки:

$$w(x, t, \theta_j) = y_{\delta j}(x, t); \quad (9)$$

б) внутрішнє навантаження на оболонку дорівнює сумі тисків, які передаються через кожне ребро

$$p(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^N q_{cj}(x, t) \delta(\theta - \theta_j), \quad (10)$$

де N – кількість ребер, а $\delta(\theta)$ – дельта-функція Дірака.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто, при $t=0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (11)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \quad (12)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\Phi, X\} &= \frac{1}{a^2} \{\phi, \chi\}; \quad \{\Psi\} = \frac{1}{a^3} \{\varphi\}; \quad \{U_x, U_\theta, U_r, U, V, W, Y_j\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_\theta, u_r, u, v, w, y_j\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{\sigma}_{r\theta}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}\}; \quad \{P, P_{\delta j}\} = \frac{a}{G_2} \{p, p_{\delta j}\}; \quad \{\bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{q}_\theta, \bar{q}_{cj}\} = \frac{1}{G_2} \{q_r, q_x, q_\theta, q_{cj}\}; \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \tau = \frac{c_s}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; \\ \gamma_j &= \frac{G_{\delta j}}{G_2}; \quad \rho_j^* = \frac{\rho_{\delta j}}{\rho_2}; \quad I_j^* = \frac{I_j}{a^4}; \quad F_j^* = \frac{F_j}{a^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (5), та розкладаємо зображення потенціальних функцій в ряд Фур'є за формулами:

$$\{\Phi_{LF}, \Psi_{LF}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{LF,n}, \Psi_{LF,n}\} \cos(n\theta), \quad X_{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{LF,n} \sin(n\theta). \quad (14)$$

Рівняння (5) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_p^2 p^2 - s^2 \right) \Phi_{LF,n} &= 0; \\ \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - p^2 - s^2 \right) \{\Psi_{LF,n}, X_{LF,n}\} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

де $\eta_p^2 = \frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}$.

Загальний розв'язок рівнянь (15), з урахуванням умов згасання на нескінченності, має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{1n}(s, p) K_n(m_p r_*); \quad \Psi_{LF,n}(r_*, s, p) = C_{2n}(s, p) K_n(m_s r_*); \\ X_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{3n}(s, p) K_n(m_s r_*); \end{aligned} \quad (16)$$

де $m_p = \sqrt{s^2 + \eta_p^2 p^2}$, $m_s = \sqrt{s^2 + p^2}$, а K_n – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до компонент переміщень і напружень середовища, та розкладаємо їх у ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned} \{U_{rLF}, U_{xLF}, \bar{\sigma}_{rrLF}, \bar{\sigma}_{rxLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{rLF,n}, U_{xLF,n}, \bar{\sigma}_{rrLF,n}, \bar{\sigma}_{rxLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{U_{\theta LF}, \bar{\sigma}_{r\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{\theta LF,n}, \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Рівності (4) та (8) мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_{xLF,n} &= is\Phi_{LF,n} + \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} \right) \Psi_{LF,n}, \quad U_{rLF,n} = \frac{d\Phi_{LF,n}}{dr_*} - is \frac{d\Psi_{LF,n}}{dr_*} + \frac{n}{r_*} X_{LF,n}, \\ U_{\theta LF,n} &= -\frac{n}{r_*} \Phi_{LF,n} + \frac{isn}{r_*} \Psi_{LF,n} - \frac{dX_{LF,n}}{dr_*}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rrLF,n} &= \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(isU_{xLF,n} + \frac{n}{r_*} U_{\theta LF,n} + \frac{U_{rLF,n}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLF,n}}{dr_*}, \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \frac{dU_{xLF,n}}{dr_*} + isU_{rLF,n}, \quad \bar{\sigma}_{r\theta LF,n} = \frac{1}{r_*} \left(-nU_{rLF,n} + \frac{dU_{\theta LF,n}}{dr_*} - \frac{U_{\theta LF,n}}{r_*} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Розкладаємо зображення шуканих величин у ряд Фур'є таким чином:

$$\begin{aligned} \{U_{LF}, W_{LF}, \bar{q}_{rLF}, \bar{q}_{xLF}, \chi_{xLF}, \chi_{\theta LF}, F_{LF}, P_{LF}\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{LF,n}, W_{LF,n}, \bar{q}_{rLF,n}, \bar{q}_{xLF,n}, \chi_{xLF,n}, P_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{V_{LF}, \bar{q}_{\theta LF}, \chi_{\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{LF,n}, \bar{q}_{\theta LF,n}, \chi_{\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (20)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом система (2) має вигляд:

$$\begin{cases} -\left(\frac{1-\nu_1}{2}(n^2 + p^2) + s^2 \right) U_{LF,n} + isn \frac{1+\nu_1}{2} V_{LF,n} + \nu_1 is W_{LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ -isn \frac{1+\nu_1}{2} U_{LF,n} - \left(\frac{1-\nu_1}{2}(s^2 + p^2) + n^2 \right) V_{LF,n} - n \left(1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) W_{LF,n} + \\ + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \chi_{\theta LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}, \\ is\nu_1 U_{LF,n} + nV_{LF,n} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (is\chi_{xLF,n} + n\chi_{\theta LF,n}) + \left(\frac{1-\nu_1}{2}((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) W_{LF,n} = \\ = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}), \\ -6k^2 is \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} W_{LF,n} + isn \frac{1+\nu_1}{2} \chi_{\theta LF,n} - \left(s^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2 \right) \right) \chi_{xLF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ 6k^2 n \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} W_{LF,n} - isn \frac{1+\nu_1}{2} \chi_{xLF,n} - \left(n^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2 \right) \right) \chi_{\theta LF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}. \end{cases} \quad (21)$$

Граничні умови (7) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{rLF,n}(s,p) &= -\bar{\sigma}_{rrLF,n}(1,s,p), \quad \bar{q}_{xLF,n}(s,p) = \bar{q}_{\theta LF,n}(s,p) = 0, \\ W_{LF,n}(s,p) &= U_{rLF,n}(1,s,p), \quad \bar{\sigma}_{rxLF,n}(1,s,p) = \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}(1,s,p) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Враховуючи граничні умови (22), у системі (21) з четвертого та п'ятого рівнянь знаходимо невідомі функції $\chi_{xLF,n}$, $\chi_{\theta LF,n}$, а потім з першого та другого рівнянь знаходимо функції $U_{LF,n}$, $V_{LF,n}$ відповідно:

$$\begin{aligned} \chi_{xLF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \quad \chi_{\theta LF,n}(s,p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \\ U_{LF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p); \quad V_{LF,n}(s,p) = \frac{\Delta_5}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p), \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= A_1 A_2 - A_3^2; \quad \Delta_1 = iA_4(sA_2 - nA_3); \quad \Delta_2 = A_4(-sA_3 + nA_1); \\ \Delta_3 &= B_1 B_2 - B_3^2; \quad \Delta_4 = -i(v_1 s B_2 + n B_4 B_3); \quad \Delta_5 = v_1 s B_3 - B_4 B_1; \\ A_1 &= s^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2 \right); \quad A_2 = n^2 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2 \right); \\ A_3 &= sn \frac{1+v_1}{2}; \quad A_4 = 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2}; \\ B_1 &= \frac{1-v_1}{2} (n^2 + p^2) + s^2; \quad B_2 = \frac{1-v_1}{2} (s^2 + p^2) + n^2; \\ B_3 &= sn \frac{1+v_1}{2}; \quad B_4 = -k^2 \frac{(1-v_1)\Delta_2}{2\Delta} + n \left(1 + \frac{(1-v_1)k^2}{2} \right). \end{aligned}$$

У результаті третє рівняння системи (21) набуде вигляду:

$$\left(isv_1 \frac{\Delta_4}{\Delta_3} + n \frac{\Delta_5}{\Delta_3} - k^2 \frac{1-v_1}{2\Delta} (is\Delta_1 + n\Delta_2) + \frac{1-v_1}{2} ((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}). \tag{24}$$

Отже, враховуючи рівняння (24) та дві останні рівності з (22), отримуємо систему рівнянь відносно змінних $C_{1n}(s,p)$, $C_{2n}(s,p)$, $C_{3n}(s,p)$, яка розв'язується методом Гауса. Нехай $\bar{C}_{1n}(s,p)$, $\bar{C}_{2n}(s,p)$, $\bar{C}_{3n}(s,p)$ – розв'язки цієї системи. Тоді можемо записати:

$$U_{rLF,n}(r_*,s,p) = T_n(r_*,s,p) P_{LF,n}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned} T_n(r_*,s,p) &= \bar{C}_{1n}(s,p) \left(\frac{nK_n(m_p r_*)}{r_*} - m_p K_{n+1}(m_p r_*) \right) - is\bar{C}_{2n}(s,p) \left(\frac{nK_n(m_s r_*)}{r_*} - m_s K_{n+1}(m_s r_*) \right) + \\ &+ \bar{C}_{3n}(s,p) \frac{nK_n(m_s r_*)}{r_*}. \end{aligned}$$

Аналогічно до (25) можна записати вираз і для інших переміщень та всіх напружень.

Тепер для знаходження нормальних переміщень за співвідношенням (25) потрібно знайти навантаження, яке передається на оболонку з боку шпангоутів. Для цього застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівняння (3):

$$2\gamma_j(1+\nu_{\delta_j})I_j^*s^4Y_{jLF} + \rho_j^*F_j^*p^2Y_{jLF} = P_{\delta_{jLF}}(s, p) - \bar{q}_{cjLF}(s, p). \quad (26)$$

Введемо позначення:

$$A_j = 2\gamma_j(1+\nu_{\delta_j})I_j^*s^4 + \rho_j^*F_j^*p^2.$$

Тоді:

$$Y_{\delta_{jLF}}(s, p) = \frac{P_{\delta_{jLF}}(s, p) - \bar{q}_{cjLF}(s, p)}{A_j}. \quad (27)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (10). Отримаємо:

$$P_{LF,n}(s, p) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(s, p) D_n^j, \quad (28)$$

$$\text{де } \delta(\theta - \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j \cos(n\theta).$$

Підставляємо (28) в (25). Будемо мати:

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = T_n(r_*, s, p) \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(s, p) D_n^j. \quad (29)$$

Підсумовуємо в (29) тригонометричний ряд Фур'є. Отримаємо:

$$U_{rLF}(r_*, x_*, p, \theta) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta). \quad (30)$$

У виразі (30) замість θ підставляємо θ_k , ($k = \overline{1, N}$), та отримаємо N рівностей:

$$U_{rLF}(r_*, x_*, p, \theta_k) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (31)$$

Використовуємо тепер граничну умову (9). З урахуванням (27) будемо мати:

$$\frac{P_{ckLF}(s, p) - \bar{q}_{\delta kLF}(s, p)}{A_k} = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}) \quad (32)$$

або

$$P_{ckLF}(s, p) = \left(1 + A_j \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_j) \right) \bar{q}_{cjLF}(s, p) + \\ + A_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \bar{q}_{cjLF}(s, p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (33)$$

Розв'язуємо систему (33) відносно невідомих $\bar{q}_{c1LF}(s, p), \dots, \bar{q}_{cNLF}(s, p)$. Підставляємо отримані результати у вираз (29) та отримуємо кінцевий вираз для нормальних переміщень у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Проілюструємо описаний алгоритм для випадку двох, чотирьох та шести ребер. Для спрощення розрахунків припустимо, що всі ребра мають однакові фізичні характеристики, та прикладемо до них однакові навантаження. Також, будемо припускати, що всі ребра

знаходяться у вершинах правильного N -кутника, який вписано в коло, що описує поперечний переріз оболонки. У такому випадку для всіх ребер реакції з боку оболонки будуть однакові.

Позначимо:

$$P_{\delta LF}(s, p) = P_{\delta 1LF}(s, p) = \dots = P_{\delta NLF}(s, p); \quad A = A_1 = \dots = A_N;$$

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \bar{q}_{c1LF}(s, p) = \dots = \bar{q}_{cNLF}(s, p).$$

У такому випадку будемо мати:

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \frac{P_{\delta LF}(s, p)}{1 + Af_1(r_*, s, p)}, \tag{34}$$

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = \frac{T_n(r_*, s, p)P_{\delta LF}(s, p)}{1 + Af_1(r_*, s, p)} \sum_{j=1}^N D_n^j, \tag{35}$$

де $f_1(r_*, s, p) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) \sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1)$.

Відповідні вирази для нормальних напружень отримуються аналогічно.

Коефіцієнти D_n^j отримуються так:

$$D_n^j = \frac{\sigma_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta - \theta_j) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \cos(n\theta_j) \sigma_n, \tag{36}$$

де $\sigma_n = 1, n=0, \sigma_n = \frac{NF+1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{NF+1}\right), n > 0$ – множники, для прискорення збіжності тригонометричних рядів Фур'є [7]; NF – кількість доданків у ряді Фур'є.

Через властивості кутів вписаного в коло правильного N -кутника, будемо мати:

$$\sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1) = \begin{cases} N\sigma_n, & n = Nk, \quad k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, \quad k \in Z, \end{cases} \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^N D_n^j = \begin{cases} N\sigma_n, & n = Nk, \quad k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, \quad k \in Z. \end{cases} \tag{38}$$

Іншими словами, співвідношення (37) та (38) означають, що у формулах (34) та (35), при підсумовуванні рядів Фур'є, потрібно враховувати лише ті доданки, номер яких кратний N .

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в області $\theta = \theta_k \left(k = \overline{1, N}\right), r = b, -d \leq x \leq d$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на відповідній ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$p_{\delta}(x, t) = F_0 H(t) H(d - |x|). \tag{39}$$

Трансформанта навантаження (39) має вигляд:

$$P_{\delta LF}(s, p) = \frac{\sqrt{2}F_0 \sin(sd^*)}{\sqrt{\pi s p a}}, \quad (40)$$

$$\text{де } d^* = \frac{d}{a}.$$

Після оберненого перетворення Фур'є та Лапласа і підсумовування рядів Фур'є отримаємо вирази для оригіналу функції нормальних переміщень:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, t, \theta) G_2}{F_0/a} = \frac{N}{\pi^3 i} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{Nn} \left[\int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \left(\int_0^{\infty} \frac{T_{Nn}(r_*, s, p) \sin(sd^*)}{s(1 + Af_1(r_*, s, p))} \cos(sx_*) ds \right) dp \right] \cos(n\theta). \quad (41)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразі (41) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [8], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [9].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_\delta = 0,3$, $\gamma = 30$, $\gamma_\delta = 300$, $\rho^* = 4$, $\rho_\delta^* = 8$, $F_\delta^* = 7 \cdot 10^{-4}$, $I_\delta^* = 10^{-6}$, $\kappa = 0,02$, $r_* = 1$, $d_* = \frac{1}{2}$. Величини θ , τ , x_* – змінювались.

На рис. 1 проілюстровано зміну нормальних переміщень (41) середовища за кутовою координатою в різні моменти безрозмірного часу на границі контакту з оболонкою, підкріпленою двома ребрами, у характерній точці ($x_* = 0$). На рис. 2 наводяться аналогічні результати за осьовою координатою (при $\theta = 0$) у різні моменти безрозмірного часу. На рис. 3 та рис. 5 наведені аналогічні до рис. 1 результати для оболонок, підкріплених чотирма та шістьма ребрами відповідно. На рис. 4 та рис. 6 наведені аналогічні до рис. 2 результати для оболонок, підкріплених чотирма та шістьма ребрами відповідно.

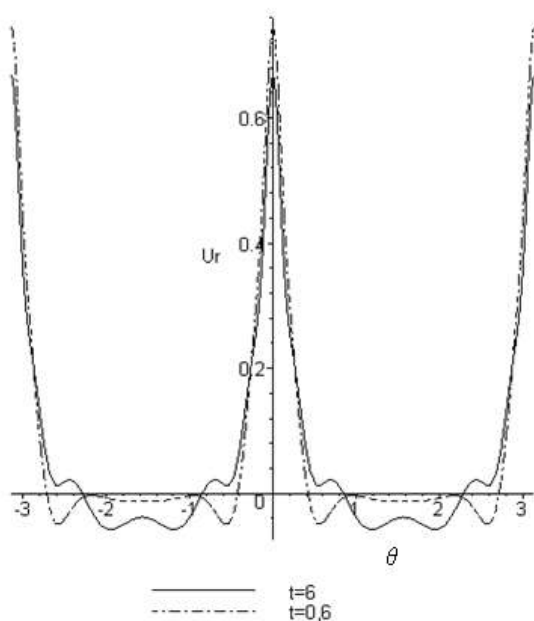


Рис. 1. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

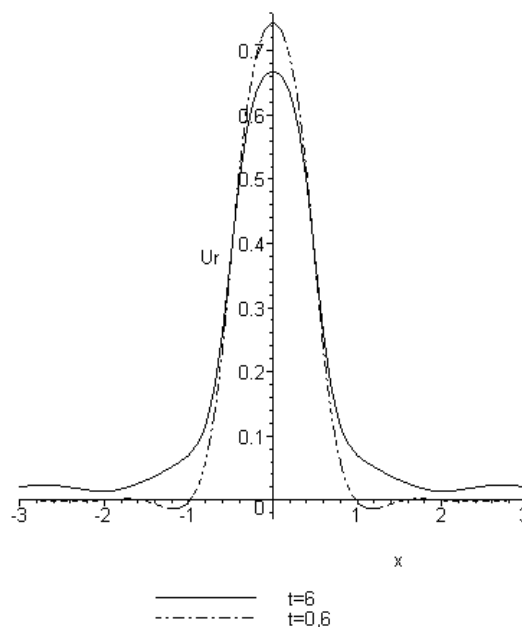


Рис. 2. Розподіл нормальних переміщень за осьовою координатою

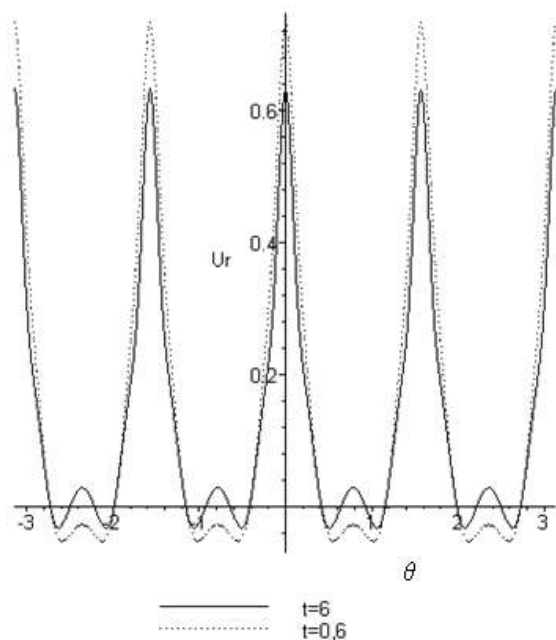


Рис. 3. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

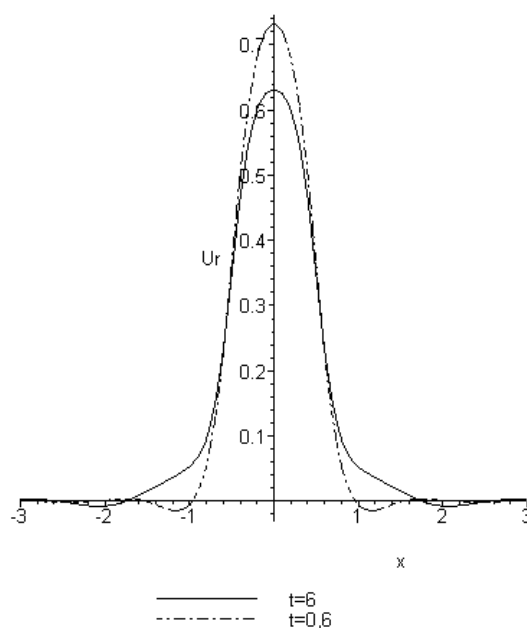


Рис. 4. Розподіл нормальних переміщень за осью координатою

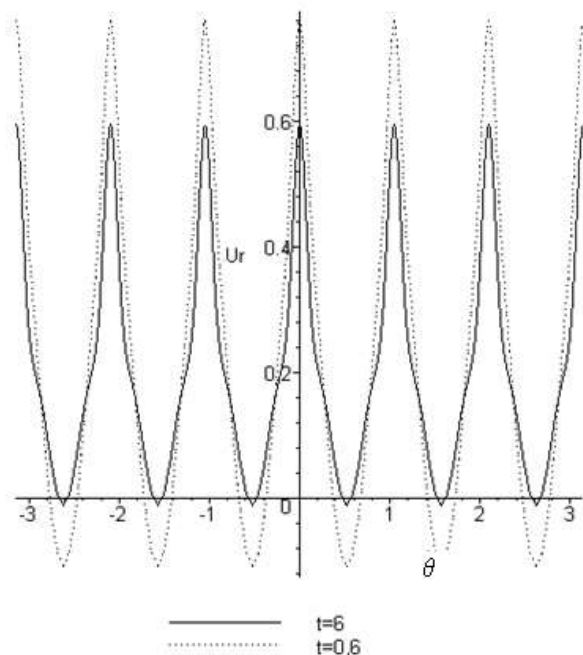


Рис. 5. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

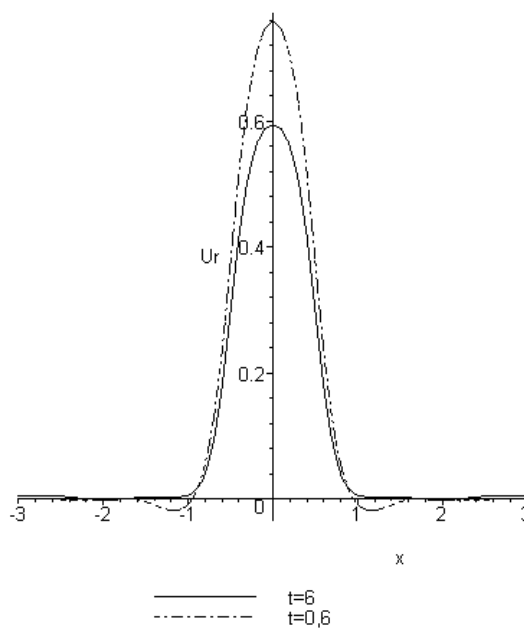


Рис. 6. Розподіл нормальних переміщень за осью координатою

З отриманих результатів зрозуміло, що збільшення кількості ребер збільшує міцність конструкції.

Тепер порівняємо отримані результати з невідкритою оболонкою. Розглянемо випадок, коли оболонка підкріплена двома поздовжніми ребрами жорсткості. Невідкритую оболонку розглянемо під дією навантаження, яке залежить від осової змінної та безрозмірної змінної часу аналогічно до (38), та діє на ділянці, яка в першому випадку підкріплена ребрами. Друга задача розв'язана методами, описаними в роботі [2]. На рис. 6 проілюстровано порівняння нормальних переміщень оболонки на границі контакту з середовищем у точці $\theta = x_* = 0$ за змінною безрозмірного часу, причому крива 1 відповідає підкріпленій оболонці, а крива 2 – невідкритою.

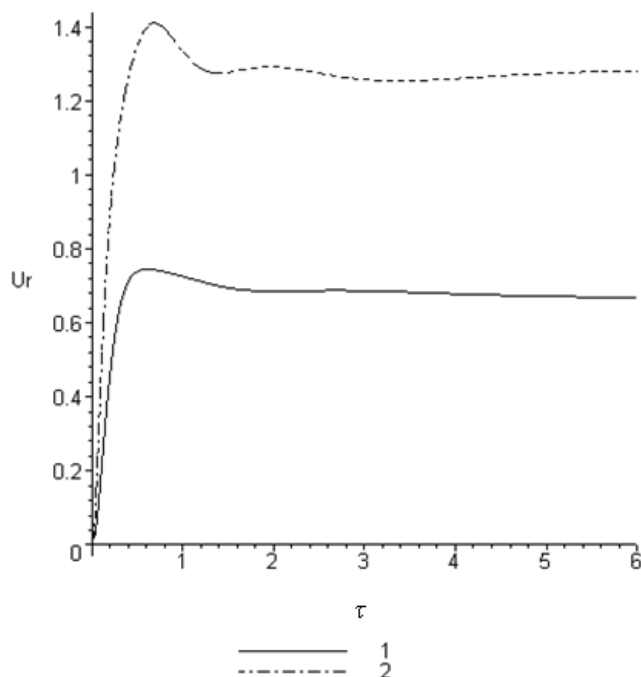


Рис. 7. Порівняння нормальних переміщень оболонки за змінною безрозмірного часу

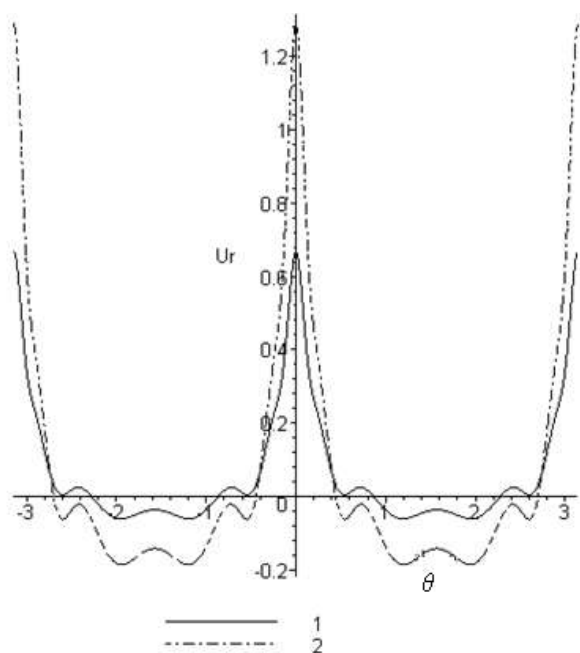


Рис. 8. Порівняння нормальних переміщень за кутовою координатою

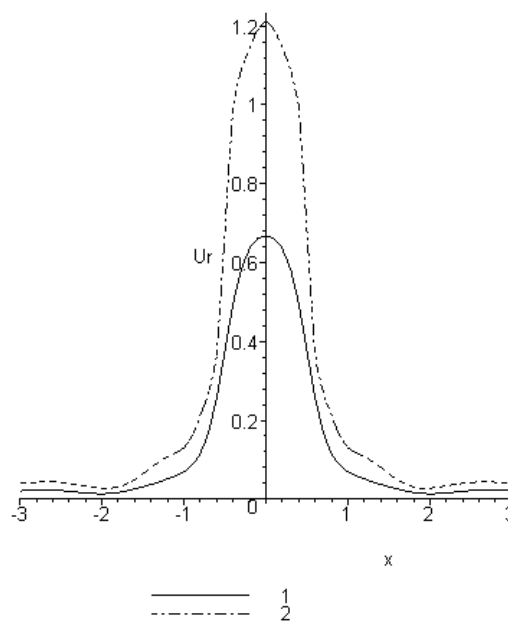


Рис. 9. Порівняння нормальних переміщень за осьовою координатою

З рис. 7 видно, що підкріплення оболонки повздовжніми ребрами жорсткості майже вдвічі зменшує нормальні переміщення (на 48%).

На рис. 8 показано аналогічні результати порівняння, але за кутовою координатою при $\tau = 6$, $x_* = 0$, а на рис. 9 – за осьовою (при $\tau = 6$, $\theta = 0$). Причому на рис. 8-9 крива 1 ілюструє підкріплену оболонку, а крива 2 – непідкріплену.

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок динамічної задачі для дискретно підкріпленої поздовжніми ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі. При цьому вирази для переміщень і напружень в оболонці і довільній точці середовища подано у вигляді рядів Фур'є від подвійних невластних інтегралів Фур'є та Лапласа. Для отримання результатів

запропоновано ефективний чисельний алгоритм, який ґрунтується на методі Файлона та многочленів Лежандра. Проілюстровано графічно розподіл за кутовою та осьювою координатою в різні моменти часу нормальних переміщень оболонки на межі контакту з пружним середовищем. Проаналізовано вплив кількості ребер. Проведено порівняння з невідкріпленою оболонкою при аналогічних навантаженнях. Отримані результати і запропоновані алгоритми можуть використовуватися при динамічному розрахунку підземних споруд, зокрема тунелів метро та підземних трубопроводів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. Москва: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 2. С. 108–114.
3. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 200–213.
4. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва: Наука, 1972. 432 с.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 736 с.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 524 с.
8. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. Москва: Наука, 1966. 370 с.
9. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва: Наука, 1974. 223 с.

REFERENCES

1. Gorshkov, A. G. & Pozhuev, V. I. (1992). Planes and shells on inertial foundations under action of moving loads. Moscow: Izd-vo MAI.
2. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2015). Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads. *Novi materialy i tehnologiyi v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 2, pp. 108-115.
3. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Non-stationar deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads. *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 200-213.
4. Novatskiy, V. (1975). Elastic theory. Moscow: Mir.
5. Volmir, A. S. (1972). Non-linear dynamic of planes and shells. Moscow: Nauka.
6. Filippov, A. P. (1970). Vibrations of deformable systems. Moscow: Mashynostroenie.
7. Lantsosh, K. (1961). Practical methods of applied analysis. Moscow: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit.
8. Krylov, V. I. & Shulina, L. T. (1966). Reference book of numerical integrations. Moscow: Nauka.
9. Krylov, V. I. & Skoblya, N. S. (1974). Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform. Moscow: Nauka.