

3. Fil'shtinskiy, L. A., Nosov, D. N. & Yeremenko, A. A. (2015). Plane magnetoelasticity problem for a piezomagnetic medium with cracks. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*, Vol. 51, No. 2, pp. 109-115.
4. Novatskiy, V. (1986). *Electromagnetic effects in solids*. Moscow: Nauka.
5. Vladimirov, V. S. (1973). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka.
6. Fil'shtinskiy, L. A. (1976). Elastic equilibrium of a plane anisotropic medium, weakened by arbitrary curvilinear cracks. Limit transition to an isotropic medium. *Izv. AN SSSR. Mekh. tv. tela*, No. 5, pp. 91-97.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, ²Стеблянко П. А., д. ф.-м. н., профессор,
¹Петров А. Д., аспирант

¹*Днепро́вский национальный университет им. Олесь Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

²*Днепро́вский государственный технический университет,
ул. Днепро́строевская, 2, г. Каменское, Днепропетровская обл., 51900, Украина*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Рассматривается нестационарная термо-упруго-пластическая задача для тел из псевдоупругого материала. Особенность теории состоит в том, что диаграмма напряжения деформаций представляется в виде трехзвенной ломаной и может иметь ниспадающий участок. При этом характерные точки диаграммы зависят от температуры и фазового состояния материала. Такой характер диаграммы приводит к разрывным решениям и, как следствие, к подвижным границам фазовых переходов. Рассмотрен пример тонкой полосы при одноосном растяжении. Показано, что деформация неоднородна по образцу и её развитие зависит от свойств материала.

Ключевые слова: термо-упруго-пластичность, псевдоупругость, фазовые переходы.

МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ПСЕВДОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, ²Стеблянко П. О., д. ф.-м. н., професор,
¹Петров О. Д., аспірант

¹*Дніпро́вський національний університет ім. Олесь Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

²*Дніпро́вський державний технічний університет,
вул. Дніпро́будівська, 2, м. Кам'янське, Дніпропетровська обл., 51900, Україна*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Розглядається нестационарна термо-пружно-пластична задача для тіл з псевдопружного матеріалу. Особливість теорії полягає в тому, що діаграма напруги деформацій представляється у вигляді триланкової ламаної і може мати спадаючу ділянку. При цьому характерні точки діаграми залежать від температури і фазового стану матеріалу. Такий характер діаграми призводить до розривних рішень і, як наслідок, до рухливих меж фазових переходів. Розглянутий приклад тонкої смуги при одноосному розтягуванні. Показано, що деформація неоднорідна вздовж зразка і її розвиток залежить від властивостей матеріалу.

Ключові слова: термо-пружно-пластичність, псевдопружність, фазові переходи.

MODEL OF BEHAVIOR OF PSEUDOELASTICITY MATERIAL UNDER NONSTATIONARY LOADING

Chernyakov Yu. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Steblyanko P. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Petrov A. D., Graduate Student

¹*Oles Honchar Dnipro National University,
Ave. Gagarin, 72, Dnepr, 49000, Ukraine*

²*Dniprovsk State Technical University,
DniproStroevskaya str., 2, Kamenskoye, Dnepropetrovsk region, 51900, Ukraine*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

The list of alloys that exhibit pseudoelasticity includes Ni-Ti alloys and various copper, iron, silver and gold-based alloys. Pseudoelasticity is the ability of a material to accumulate deformations upon loading at a high temperature regime and then return to its original state after unloading (through the hysteresis loop). The mechanism of this reduction is the transformation from the martensite phase to the original austenite phase. Such alloys as NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd and others can restore deformations up to 3%. Important characteristics of some of these materials are internal damping, pseudoelasticity and high yield strength.

A nonstationary thermo-elastic-plastic problem is examined for bodies from pseudoelasticity material. The feature of theory consists of that the diagram of tension of deformations appears as three-unit broken and can have a handing down area. Thus the characteristic points of diagram depend on a temperature and phase state of material. Such character of diagram results in break decisions and as a result to the moving boundaries of phase transitions. The example of thin stripe is considered at monaxonic tension. It is shown that deformation is inhomogeneous according to bar and her development depends on properties of material.

A version of the model of behavior of a pseudoelastic material has been developed and experimentally substantiated. In this model, the possibility of quantitative evaluation of the associated interactions between stresses, temperature, deformation and material loading rate is built that is suitable for modeling the continual level.

We obtained the numerical confirmation that the front of the stepwise change in the strain propagates at a constant rate that depends only on the mechanical properties of the material.

Recurrent formulas allow us to obtain the third (for temperature) and fourth (for the velocities of displacements, stresses and deformations) order of approximation of the method with respect to the coordinates.

Key words: thermo-elastic-plasticity, pseudoelasticity, phase transitions.

ВВЕДЕНИЕ

Список сплавов, которые демонстрируют псевдоупругость, включает сплавы Ni-Ti и много медных, железных, серебряных и полученных на основе золота сплавов. Псевдоупругость относится к способности материала при более высоком температурном режиме накапливать деформации при нагружении и потом возвращаться в исходное положение после разгрузки (через петлю гистерезиса). Механизмом такого восстановления является преобразование из мартенситной фазы в изначальную аустенитную фазу.

Такие сплавы как NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd и другие, могут восстанавливать деформации до 3%. Важными характеристиками некоторых из этих материалов являются внутреннее демпфирование, псевдоупругость и высокий предел текучести. При этом отмечается, что количество экспериментальных данных высокого качества макроскопического поведения NiTi остается ограниченным.

Характерной чертой диаграммы материала СПФ при активном нагружении является участок идеальной пластичности (Fig. 2., Fig. 16. NiTi stress-strain response at 70°C [4]). Аналогичные участки имеют место и при разгрузке, но при определенных температурах.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИАГРАММА ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Для записи локальной зависимости между физическими величинами использовалась модель упругопластического тела с участком разупрочнения (AC) при активном нагружении и постоянной температуре [6]. Температурное поле тела считаем известным, полученным

путем решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности либо из других источников [2].

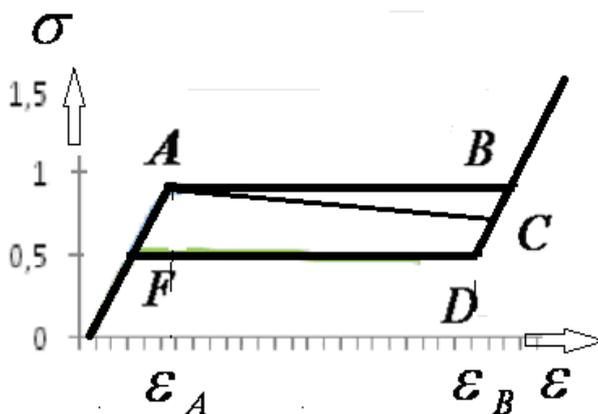


Рис. 1. Локальная диаграмма материала

Координаты точек, полученных на основании обработки экспериментальных данных, приведенных в работе [4], даны в таблице ниже.

Таблица 1

$T^{\circ}C$	$A(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$B(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$D(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$F(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$
100	1,00; 0,82	6,50; 0,82	6,05; 0,45	0,55; 0,45
90	1,00; 0,78	6,50; 0,78	6,03; 0,41	0,53; 0,41
80	1,00; 0,67	6,50; 0,67	6,07; 0,38	0,57; 0,38
70	1,00; 0,59	6,30; 0,59	5,81; 0,30	0,51; 0,30
60	1,00; 0,44	6,20; 0,44	5,72; 0,23	0,52; 0,23
50	1,00; 0,42	5,80; 0,42	5,16; 0,15	0,36; 0,15
40	1,00; 0,39	5,70; 0,39	4,88; 0,07	0,18; 0,07

При изменении температуры в процессе нагружения происходит переход от одной диаграммы к другой. Причем в различных точках тела могут использоваться разные локальные диаграммы материала.

ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕРМО-УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Определим скорость медленной волны, с которой распространяется поле пластических деформаций вдоль одномерного тела $x \in [0; L]$. На краю $x = 0$ задается скорость растяжения образца $v = V_0$, а его край $x = L$ закреплен и здесь $v = 0$.

В общем случае искомыми величинами являются: скорость перемещения в осевом направлении $v(x, t)$ (перемещение $u(x, t)$ при необходимости определяется путем интегрирования $v(x, t)$ по времени); осевое напряжение $\sigma(x, t)$; осевая деформация $\varepsilon(x, t)$ и температура $T(x, t)$. Здесь $x \in [0; L]$, $t \in [0, \infty)$.

Для определения искомых величин использована такая система уравнений [1, 2, 6]:

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \varepsilon - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [0, \varepsilon_S], \\ E_2 (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [\varepsilon_S, \varepsilon_C], \\ E_3 (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in (\varepsilon_C, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность материала, модули E_1 , E_2 , E_3 локальной диаграммы материала (рис. 1), а также коэффициент линейного теплового расширения α_T , которые могут зависеть от температуры.

Перейдем в системе (1) к безразмерным нормированным величинам, для которых сохраним прежние обозначения

$$v \Rightarrow \frac{v}{v_*}, \quad \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ST}}, \quad \sigma \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{ST}}, \quad T \Rightarrow \frac{T}{T_*}, \quad x \Rightarrow \frac{x}{x_*}, \quad t \Rightarrow \frac{t}{t_*}. \quad (2)$$

Здесь v_* , T_* , x_* , t_* – некоторые заданные масштабные величины скорости перемещений, температуры, пространственной координаты и времени. Через σ_{ST} , ε_{ST} ($\sigma_{ST} = E_1(T_*)\varepsilon_{ST}$) обозначены пределы текучести материала по напряжению и деформации, определенные при температуре $T = T_*$.

В результате перехода к безразмерным нормированным величинам (2) систему уравнений (1) перепишем так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k_{1*} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = k_{2*} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\sigma = \begin{cases} E_{1*} \varepsilon - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [0; \varepsilon_S], \\ E_{2*} (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [\varepsilon_S; \varepsilon_C], \\ E_{3*} (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in (\varepsilon_C; \infty). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$k_{1*} = \frac{\sigma_{ST} t_*}{\rho x_* v_*}, \quad k_{2*} = \frac{v_* t_*}{x_* \varepsilon_{ST}}, \quad E_{1*} = \frac{E_1(T)}{E_1(T_*)}, \quad E_{2*} = \frac{E_2(T)}{E_2(T_*)},$$

$$E_{3*} = \frac{E_3(T)}{E_3(T_*)}, \quad \alpha_{T*} = \frac{\alpha_T T_*}{\varepsilon_{ST}}, \quad K_* = \frac{E_{1*}}{1 - 2\nu}, \quad k_{3*} = t_* \frac{d^2}{x_*^2}. \quad (4)$$

С целью упрощения вычислений выберем $k_{2*} = 1$. Тогда можно взять $v_* = \varepsilon_{ST} \frac{x_*}{t_*}$, а $k_{1*} = \frac{E_{1*} t_*^2}{\rho x_*^2}$.

Воспользуемся конечно-разностным методом. Для численного решения системы (3) введем сетки по времени t и координате x следующим образом [2]

$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_x = \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h; x_0 = 0; h = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n \right\}. \quad (5)$$

Тогда явную разностную систему, эквивалентную полной системе дифференциальных уравнений в частных производных (3), можно записать так [2, 3]

$$v^{p+1} = v^p + \tau k_{1*} \lambda(\sigma^p), \quad \varepsilon^{p+1} = \varepsilon^p + \tau \lambda(v^p). \quad (6)$$

Величина напряжения в произвольный момент времени определяется явно по соответствующей формуле из (3). В расчетных формулах (6) введены обозначения для разностных операторов аппроксимирующих первую производную по координате. Они могут задаваться по-разному.

Отметим, что приведенные выше формулы (7), (9) имеют второй порядок аппроксимации, а формулы (8) дают погрешность первого порядка. Более высокая точность вычисления производных достигается при помощи разностных формул, полученных в работе [2]. Здесь для аппроксимации первых производных получены такие разностные формулы:

$$\begin{aligned} \lambda(y_i^p) &= \frac{n_0 [y_{i+1}^p - y_{i-1}^p] - k_0 [y_{i+2}^p - y_{i-2}^p]}{12h}, \quad i = 2; 3; \dots; n-2, \\ \lambda(y_0^p) &= \frac{-k_1 y_0^p + k_2 y_1^p - k_3 y_2^p + k_4 y_3^p}{6h}, \\ \lambda(y_1^p) &= \frac{-k_4 y_0^p - k_5 y_1^p + k_6 y_2^p - k_0 y_3^p}{6h}, \\ \lambda(y_{n-1}^p) &= \frac{k_4 y_n^p + k_5 y_{n-1}^p - k_6 y_{n-2}^p + k_0 y_{n-3}^p}{6h}, \\ \lambda(y_n^p) &= \frac{k_1 y_n^p - k_2 y_{n-1}^p + k_3 y_{n-2}^p - k_4 y_{n-3}^p}{6h}. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (7) применены коэффициенты, которые были определены с использованием сплайн-функции. Если используются кубические В-сплайны, которые имеют четвертый порядок аппроксимации, то

$$n_0 = 8; \quad k_0 = 1; \quad k_1 = 11; \quad k_2 = 18; \quad k_3 = 9; \quad k_4 = 2; \quad k_5 = 3; \quad k_6 = 6.$$

В случае использования напряженных сплайнов, которые имеют пятый порядок аппроксимации,

$$\begin{aligned} n_0 &= 7,9136; \quad k_0 = 0,9568; \quad k_1 = 11,2646; \quad k_2 = 18,4641; \\ k_3 &= 9,1344; \quad k_4 = 1,9349; \quad k_5 = 3,0870; \quad k_6 = 5,9787. \end{aligned}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим серию численных результатов. На рис. 2 в левом столбце показано изменение во времени поля деформаций и напряжений при активном нагружении. Переход из А в В, аустенит – мартенсит ($A \rightarrow M$) при $V_0 = -1,3v_*$, а в правом столбце показано изменение во времени поля деформаций и напряжений при обратном переходе ($M \rightarrow A$) из D в F при $V_0 = 1,7v_*$. Линии 1 дают распределение деформаций по длине стержня в фиксированные моменты времени, а линии 2 показывают соответствующее распределение напряжений в теле.

Полученные результаты подтверждают предположение о том, что фронт скачкообразного изменения деформации распространяется с постоянной скоростью, которая зависит лишь от механических свойств материала [5].

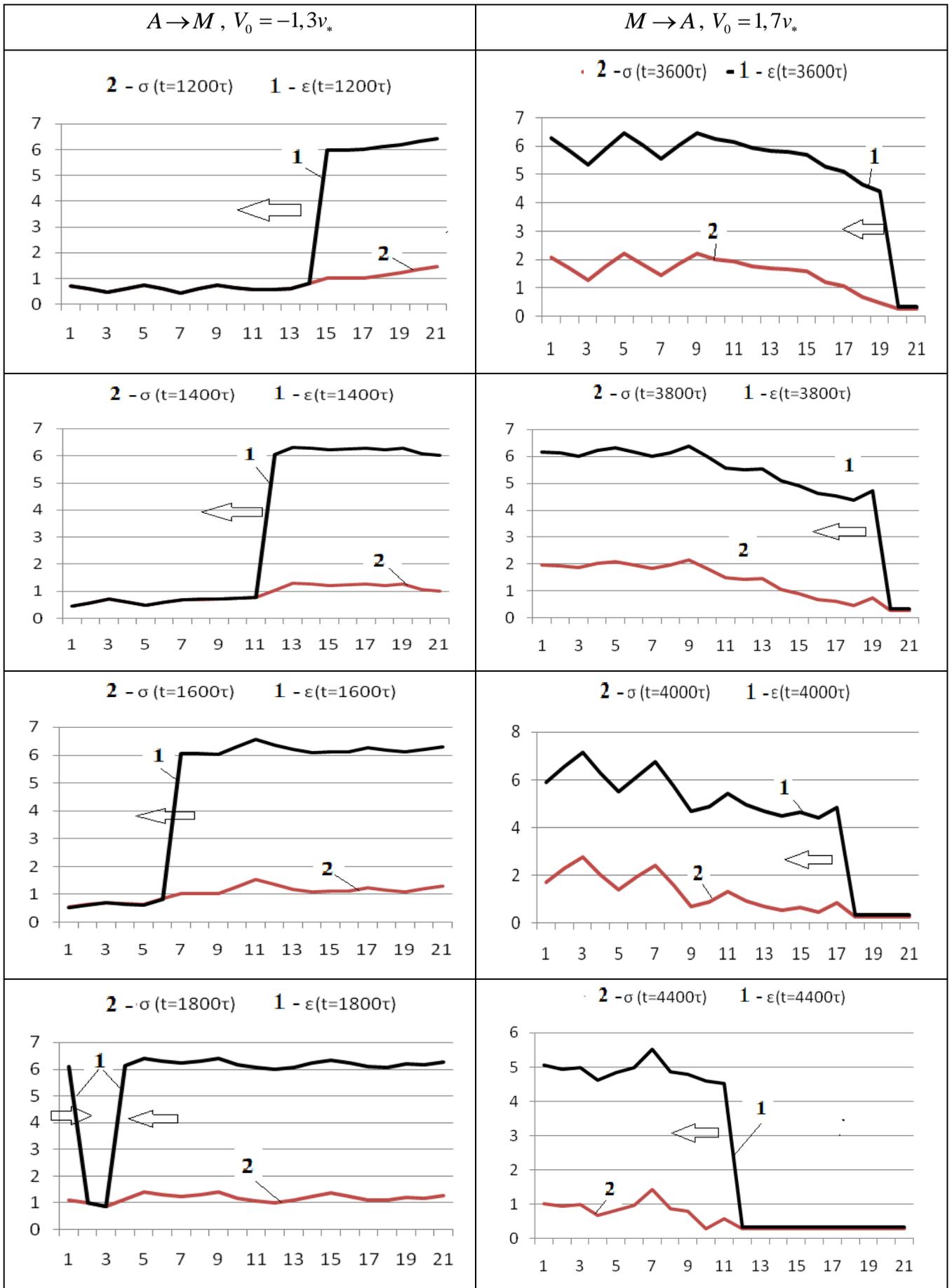


Рис. 3. Распределение напряжений и пластических деформаций для различных моментов времени ($\tau = 0,001$)

ВЫВОДЫ

Разработан и экспериментально обоснован вариант модели поведения псевдоупругого материала. В этой модели заложена возможность количественной оценки связанных взаимодействий между напряжениями, температурой, деформацией и скоростью нагружения материала, которые будут пригодны и для моделирования континуального уровня.

Получено численное подтверждение того, что фронт скачкообразного изменения деформации распространяется с постоянной скоростью, которая зависит лишь от механических свойств материала.

Рекуррентные формулы позволяют получить соответственно третий (для температуры) и четвертый (для скоростей перемещений, напряжений и деформаций) порядок аппроксимации метода по координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров О. Д., Черняков Ю. А. Термо-напряжено-деформированный стан стрижения з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету*. 2015. Вип. 1(26): додаток. С. 26–36.
2. Стеблянюк П. А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. Киев: Наукова думка, 1998. 304 с.
3. Шевченко Ю. Н., Стеблянюк П. О., Петров А. Д. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць*. 2014. Вип. 22. С. 250–264.
4. Shaw J. A., Kyriakides S. Thermomechanical aspects of NiTi. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 1995. 43. P. 1243–1281.
5. Shaw J. A., Kyriakides S. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. *Acta Materialia*. 1997. 45. P. 683–700.
6. Abeyaratne R., Knowles J. K. Evolution of phase transitions. *Cambridge University Press*, 2006. 258 p.

REFERENCES

1. Petrov, O. D. & Chernyakov, Yu. A. (2015). Thermo-stressed-deformed state of a shear from a non-uniform material in the presence of phase transformations. *Zbirnyk naukovykh prats' Dniprodzerzhyn's'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*, Iss. 1(26): addition, pp. 26-36.
2. Steblyanko, P. A. (1998). Methods of splitting in the spatial problems of the theory of plasticity. Kiev: Naukova Dumka.
3. Shevchenko, Yu. N., Steblyanko, P. O. & Petrov, A. D. (2014). Numerical methods in nonstationary problems of thermoplasticity theory. *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktzii*. *Zbirnyk naukovykh prats*, Iss. 22, pp. 250-264.
4. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1995). Thermomechanical aspects of NiTi. *J. Mechanics and Physics of Solids*, 43, pp. 1243-1281.
5. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1997). On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. *Acta Materialia*, 45, pp. 683-700.
6. Abeyaratne, R. & Knowles, J. K. (2006). Evolution of phase transitions. Cambridge University Press.