УДК 539.375

ЗАДАЧА ЗГИНУ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАПОВНЕНОЮ ЩІЛИНОЮ

[1]Шацький І. П., д. ф.-м. н., [2]Курташ І. С.

[1]*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,*
вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна

[2]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,*
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

У рамках класичної теорії Кірхгофа розглянуто задачу про згин пружної пластини, послабленої вузькою прямолінійною наскрізною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку. Сформульовано крайову задачу для бігармонічного рівняння з ускладненими крайовими умовами на розрізі. Побудовано аналітичний розв’язок сингулярного інтегродиференціального рівняння задачі для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного згинального навантаження. Особлива увага приділяється питанню граничної рівноваги композиції. Розглянуто два механізми руйнування: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Знайдено величину відносної жорсткості заповнювача, для якої руйнівне навантаження сягає максимуму.

Ключові слова: пластина, заповнена щілина, згин, класична теорія, руйнування, гранична рівновага.

ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С ЗАПОЛНЕННОЙ ЩЕЛЬЮ

[1]Шацкий И. П., д. ф.-м. н., [2]Курташ И. С.

[1]*Ивано-Франковский отдел Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины,*
ул. Микитинецкая, 3, г. Ивано-Франковск, 76002, Украина

[2]*Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа,*
ул. Карпатская, 15, г. Ивано-Франковск, 76019, Украина

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

В рамках классической теории Кирхгофа рассмотрена задача об изгибе упругой пластины, ослабленной узкой прямолинейной сквозной щелью, заполненной низкомодульным материалом. Для включения малой ширины принята гипотеза упругой винклеровской прослойки. Сформулирована краевая задача для бигармонического уравнения с усложненными краевыми условиями на разрезе. Построено аналитическое решение сингулярного интегродифференциального уравнения задачи для случая эллиптической формы щели и равномерной изгибающей нагрузки. Особенное внимание уделяется вопросу предельного равновесия композиции. Рассмотрены два механизма разрушения: растрескивание пластины возле вершин щели и нарушение целостности заполнителя. Определена величина относительной жесткости заполнителя, при которой разрушающая нагрузка достигает максимума.

Ключевые слова: пластина, заполненная щель, изгиб, классическая теория, разрушение, предельное равновесие.

PROBLEM OF BENDING OF A PLATE WITH FILLED SLIT

[1]Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc., [2]Kurtash I. S.

[1]*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine,*
Mykytynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine

[2]*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gaz,*
Karpatska str., 15, Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

The problem of bending of an elastic plate weakened by narrow rectilinear through slit filled with low-modulus material is considered within framework the classical Kirchhoff's theory. It is supposed that the filler and plate are in perfect mechanical contact. For the inclusion of narrow width the hypothesis of elastic Winkler's layer is accepted. The boundary problem for the biharmonic equation with complicated boundary conditions on the cut is formulated. The analytical solution of singular integrodifferential equation of the problem is built in case of the elliptical form of slit and uniform bending load. The jump of the normal rotation angle on the cut, the stress intensity factor for crack tips and the stresses in the filler are obtained. Special attention is paid to the issue of limited equilibrium of composition. The two mechanisms of fracture are considered: cracking of the plate near the peak of a slit and breach of filler integrity. The first of them is described by the criterion of the linear mechanics of fracture and the second one is described by the classical theory of strength. The considered model of the filled slit allows analytically to evaluating the results of the renovation of defective lamellar structures under bending conditions. The key parameters that determine the reinforcement efficiency are relative stiffness and relative strength of the filler. For a given strength value there is a rigidity value for which the composition is equable according to the criteria of the boundary state of the plate and inclusion. In this case the ultimate bending load reaches the maximum.

Key words: plate, filled slit, bending, classical theory, fracture, limited equilibrium.

ВСТУП

Проблема подовження ресурсу виробів, споруд та біологічних об'єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. Одним із продуктивних засобів реновації пошкоджених конструкцій є ін'єкційні технології заліковування дефектів [1]. Заповнення тріщиноподібної порожнини іншим матеріалом може суттєво розвантажити її вершини. Однак, заповнювач щілини, розвантажуючи її окіл, сам сприймає частину зовнішнього навантаження. Тому врахування концентрації напружень у підкріпленні є обов'язковим елементом розрахунку на міцність композиційної конструкції.

Рівновагу тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами часто розглядають в рамках моделі прошарку Вінклера і зводять задачу до розв'язання інтегродиференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на розрізах [1]. У такій постановці досліджено багато плоских та просторових задач. Стосовно задач згину пластин відомі праці [2, 3], де розглядалися тонкостінні включення з довільною жорсткістю. Модель тріщини, частково залікованої неконтрастним матеріалом, запропоновано в публікаціях [4, 5].

У цій роботі розглядаємо задачу згину пластини, послабленої прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом, який моделюється прошарком Вінклера. Мета дослідження полягає у докладному аналізі граничної рівноваги пластини з заповненим дефектом як гетерогенного об'єкта.

ПОСТАНОВКА ТА ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо безмежну пружну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену наскрізною щілиною завдовжки $2l$ та завширшки $2b(x)$, розташованою вздовж відрізка осі абсцис $(-l, l)$. Щілина вважається вузькою: $\max_x b(x) << l$. Нехай такий дефект заповнено матеріалом, який набагато податливіший від матеріалу пластини. Вважаємо, що заповнювач і пластина перебувають в ідеальному механічному контакті. Композиція зазнає дії згинальних моментів, рівномірно розподілених на безмежності; лицьові поверхні пластини та включення вільні від зовнішнього навантаження. Досліджуємо вплив низькомодульного заповнювача на пружну та граничну рівновагу пластини з тріщиною. При цьому використаємо співвідношення класичної теорії пластин та модель Вінклера для моделювання прошарку заповнювача.

За умов симетрії об'єкта та навантаженнями відносно осі абсцис крайова задача буде такою:

рівняння рівноваги в області:

$$\Delta\Delta w = 0, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \tag{1}$$

крайові умови на розрізі:

$$M_y = -\frac{2E_0 h^3}{3}\frac{[\theta_y]}{2b(x)}, \quad y = 0, \; x \in (-l,l); \tag{2}$$

умови на безмежності:

$$M_y = m, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad (x,y) \to \infty. \tag{3}$$

w – прогин пластини, Δ – двовимірний оператор Лапласа, M_x, M_y, M_{xy} – згинальні та крутний моменти, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі на розрізі; E_0 – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

Для побудови розв'язку крайової задачі (1)-(3) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральне подання згинального моменту на лінії розрізу через похідну від стрибка кута повороту має вигляд [6]:

$$M_y(x,0) = m - \frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{[\theta_y]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x}, \tag{4}$$

де $D = 2Eh^3 \big/ \left(3(1-\nu)^2\right)$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Перший доданок у виразі (4) відповідає напруженому станові бездефектної пластини, другий – відображає вплив щілини.

Після підстановки подання (4) у крайову умову (2) отримали сингулярне інтегродиференціальне рівняння відносно розриву кута повороту:

$$\frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{[\theta_y]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \frac{2E_0 h^3}{3}\frac{[\theta_y]}{2b(x)} = m, \quad x \in (-l,l), \tag{5}$$

яке слід розв'язувати за додаткової умови однозначності переміщень:

$$[\theta_y](\pm l) = 0. \tag{6}$$

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

За довільної форми щілини $b(x)$ розв'язок задачі (5), (6) можливо побудувати лише числовими методами. У цій статті скористаємося можливістю [7] побудувати аналітичний розв'язок рівняння (5) для щілини спеціальної форми, а саме еліптичної:

$$b(x) = \beta\sqrt{l^2 - x^2}, \tag{7}$$

де $\beta = b_0/l$, $2b_0 = 2b(0)$ – максимальна ширина дефекту.

Отже, за умови (7) розв'язок задачі шукаємо у вигляді $[\theta_y](x) = A\sqrt{l^2 - x^2}$, A – довільна стала. Після підстановки у рівняння (5) та обчислення сингулярного інтеграла, знаходимо:

$$A = -\frac{4}{D(3-2\nu-\nu^2)}\frac{m}{1+\omega},$$

і остаточно:

$$\left[\theta_y\right](x) = -\frac{4}{D\left(3-2\nu-\nu^2\right)}\frac{m}{1+\omega}\sqrt{l^2-x^2}\,. \tag{8}$$

Тут $\omega = \dfrac{2\varepsilon\kappa}{3\beta}$ – ключовий безрозмірний параметр задачі, а $\varepsilon = \dfrac{E_0}{E}$, $\kappa = \dfrac{3(1+\nu)}{3+\nu}$.

За припущенням $\varepsilon << 1$, $\beta << 1$. При зміні ν від 0 до 1/2 величина κ змінюється від 1 до 9/7. Тому в розглянутій моделі $\omega = O(\varepsilon/\omega)$.

За знайденим стрибком кута повороту нормалі вираховуємо коефіцієнт інтенсивності згинальних моментів поблизу вершини щілини [8]:

$$K_M = -\frac{D\left(3-2\nu-\nu^2\right)}{4}\sqrt{l}\lim_{x\to\pm l}\frac{\left[\theta_y\right](x)}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{m\sqrt{l}}{1+\omega} \tag{9}$$

та згинальний момент у заповнювачі:

$$M_y = \frac{m\omega}{1+\omega}\,. \tag{10}$$

За результатами (9), (10) можемо відновити розподіл характеристик напруженого стану по товщині пластини та включення:

$$k_1(z) = \frac{3z}{2h^3}K_M = \frac{3z}{2h^3}\frac{m\sqrt{l}}{1+\omega}, \tag{11}$$

$$\sigma_y(z) = \frac{3z}{2h^3}M_y = \frac{3z}{2h^3}\frac{m\omega}{1+\omega}\,. \tag{12}$$

ОЦІНКА ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ

Питання міцності пластини із заповненою щілиною аналізуємо, розглядаючи її як гетерогенне тіло. Мислимі два механізми руйнування: розтріскування пластини в місцях високої концентрації напружень поблизу вершин дефекту та порушення цілісності заповнювача, який сприймає частину зовнішнього навантаження.

Для першого варіанту скористаємось локальним силовим критерієм лінійної механіки руйнування [9]:

$$\max_z k_1(z) \le \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}} \equiv \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi}}\,, \tag{13}$$

а для другого варіанту застосуємо класичну теорію міцності заповнювача:

$$\max_z \sigma_y(z) \le \left[\sigma_0\right]. \tag{14}$$

Тут $K_{1c} = \sqrt{2E\gamma_*}$ – тріщиностійкість, а γ_* – питома поверхнева енергія матеріалу пластини, $\left[\sigma_0\right]$ – допустиме напруження для матеріалу заповнювача.

Враховуючи, що за результатами (11), (12)

$$\max_z k_1(z) = k_1(h\operatorname{sgn} m) = \frac{3|m|\sqrt{l}}{2h^2}\frac{1}{1+\omega},$$

$$\max_z \sigma_y(z) = \sigma_y(h\operatorname{sgn} m) = \frac{3|m|}{2h^2}\frac{\omega}{1+\omega},$$

отримуємо оцінки допустимих згинальних навантажень:

$$\frac{3|m|}{2h^2} \le \sigma^0 \left(1+\omega\right), \tag{15}$$

$$\frac{3|m|}{2h^2} \le \eta\sigma^0 \left(1+\omega^{-1}\right), \tag{16}$$

за яких зберігається цілісність пластини та включення відповідно.

Тут $\sigma^0 = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi l}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi l}}$ – Гріффітсове напруження для розтягнутої пластини з наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, $\eta = \frac{[\sigma_0]}{\sigma^0}$ – відносний показник міцності заповнювача.

За параметр руйнівного навантаження слід, вочевидь, обрати меншу з величин (15), (16):

$$\frac{3|m_*|}{2h^2} = \sigma^0 F\left(\eta,\omega\right), \quad F\left(\eta,\omega\right) = \min\left\{1+\omega, \eta\left(1+\omega^{-1}\right)\right\}. \tag{17}$$

Графіки на рис. 1 демонструють вплив параметра відносної жорсткості заповнювача ω на його підкріплювальну здатність для різних значень параметра η, відповідального за відносну міцність заповнювача.

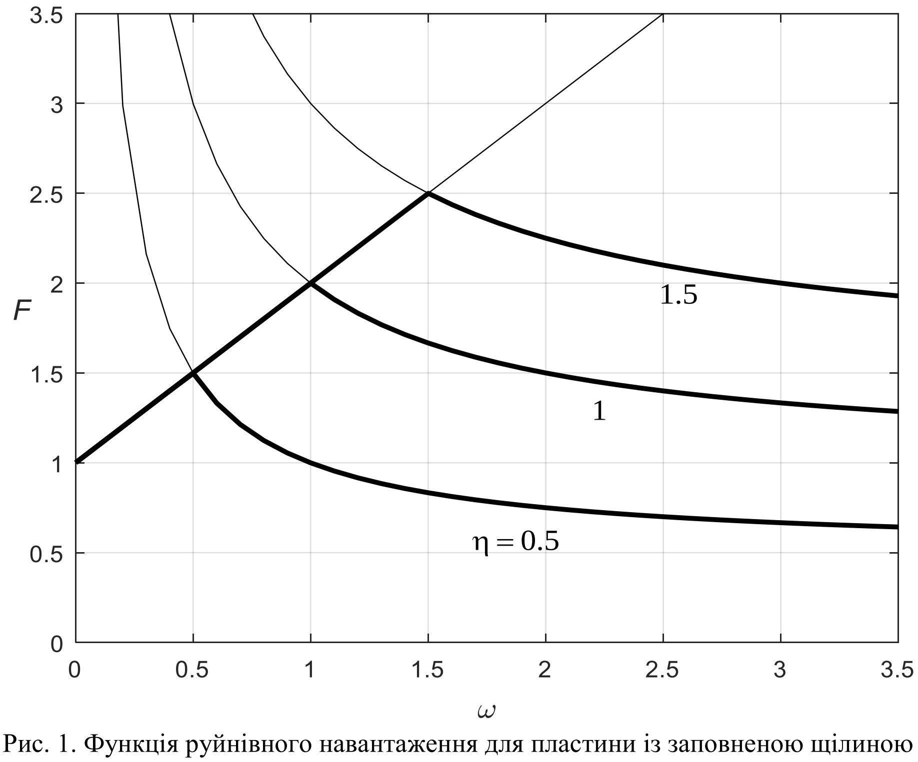

Рис. 1. Функція руйнівного навантаження для пластини із заповненою щілиною

При $\varepsilon = 0$ або/і $\eta = 0$ отримуємо результат для пластини з незаповненою щілиною (тріщиною) [9]:

$$F\left(0,0\right) = 1.$$

За фіксованих η найбільше значення функції (17) («стеля» конструкції) досягається на перетині кривих при $\omega = \eta$:

$$\max_{\omega} F\left(\eta,\omega\right) = F\left(\eta,\eta\right) = 1+\eta\,.$$

У цьому разі обидва критерії міцності дають один і той самий результат. При $\omega < \eta$ за відповідного значення $m = m_*$ руйнується пластина, а при $\omega > \eta$ – заповнювач.

Цікавими є лише дані, для яких $F > 1$ (досягається позитивний ефект). При $\eta \geq 1$ ефект підкріплення реалізується для всіх ω, при $\eta < 1$ – лише для $\omega < \eta / (1 - \eta)$.

ВИСНОВКИ

Розглянута у статті модель заповненої щілини дозволяє аналітично оцінювати результати відновлення дефектних пластинчастих конструкцій за умов згину. Ключовими параметрами, які визначають ефективність підкріплення, є показники відносної жорсткості ω та відносної міцності η заповнювача. При заданому η існує значення ω, для якого композиція є рівноміцною за критеріями міцності пластини та включення і має найбільшу утримувальну здатність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Marukha V. I., Panasyuk V. V., Sylovanyuk V. P. Injection technologies for the repair of damaged concrete structures. New York: Springer, 2014. 230 p.
2. Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением. *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*. 1979. № 3. С. 83–88.
3. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Драган М. С. Изгиб плиты с системой тонких упругих включений. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20, № 9. С. 81–86.
4. Шацький І. П. Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною. *Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. 2014. № 1. С. 91–93.
5. Шацький І. П. Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2015. Т. 51, № 3. С. 25–31.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: ГИТТЛ, 1950. 252 с.
8. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
9. Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.

REFERENCES

1. Marukha, V. I., Panasyuk, V. V. & Sylovanyuk, V. P. (2014). Injection technologies for the repair of damaged concrete structures, New York: Springer, USA.
2. Grilitskii, D. V., Dragan, M. S. & Opanasovich, V. K. (1979). Bending of a plate with a rectilinear thin-walled inclusion. Mekh. Tverd. Tela, No. 3, pp. 83-88.
3. Grilitskii, D. V., Opanasovich, V. K. & Dragan, M. S. (1984). Bending of a plate with a system of thin elastic inclusions. Sov. Appl. Mech., Vol. 20, No. 9, pp. 848-852.
4. Shatsky, I. P (2014). Problems of bending of plate with partially healed crack. Visnyk Donez. naz. un-tu. Ser. A. Pryrodnychi nauky, No. 1, pp. 91-93.
5. Shats'kyi, I. P (2015). Limiting equilibrium of a plate with partially healed crack. Mater. Sci., Vol. 51, No. 3, pp. 322-330.
6. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
7. Vekua, N. P. (1950). Systems of singular integral equations and some boundary problems. Moscov: GITTL, USSR.
8. Osadchuk, V. A. (1985). Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
9. Berezhnitskii, L. T., Delyavskii, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with crack defects. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.