

УДК 512.547.2:517.926

## РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕШИВАНИИ

Базилевич Ю. Н., к. ф.-м. н., доцент

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

bazilevich@yandex.ru

Выполнена декомпозиция уравнений, описывающих работу системы горизонтальной стабилизации экипажа высокоскоростного наземного транспорта на магнитном подвешивании. Для декомпозиции уравнений используются свойства симметрии выбранной расчётной схемы. Расчёты выполняются с помощью теории представлений конечных групп. Это позволяет до составления уравнений найти наборы новых переменных, при которых уравнения распадутся на независимые подсистемы. Для исследуемой системы получено, что система уравнений 78-ого порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26.

*Ключевые слова: группа симметрии, декомпозиция, электромагнитное подвешивание, уравнения движения.*

## РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ЕКІПАЖА НА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПІДВІШУВАННІ

Базилевич Ю. М., к. ф.-м. н., доцент

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

bazilevich@yandex.ru

Виконано декомпозицію рівнянь, що описують роботу системи горизонтальної стабілізації екіпажу високошвидкісного наземного транспорту на магнітному підвішуванні. Для декомпозиції рівнянь використовуються властивості симетрії обраної розрахункової схеми. Розрахунки виконуються за допомогою теорії зображень скінчених груп. Це дозволяє до складання рівнянь знайти набори нових змінних, при яких рівняння розпадутся на незалежні підсистеми. Для досліджуваної системи отримано, що система рівнянь 78 другого порядку розпадається на чотири підсистеми, які мають порядки 12, 12, 28 і 26.

*Ключові слова: група симетрії, декомпозиція, електромагнітне підвішування, рівняння руху.*

## DECOUPLING OF EQUATIONS OF ELECTROMAGNETICALLY LEVITATED MOTION OF THE VEHICLE

Bazilevich, Yu. N., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

*Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernychevskiy str., 24a, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

bazilevich@yandex.ru

Electromagnetic levitation of the vehicle is based on attractive forces generated between the electromagnets mounted on the vehicle and a ferromagnetic rail, laid along the whole length of the track. At that in each electromagnet the system of continuous current control is used. The guiding magnets, intended to stabilize the carriage motion in a horizontal plane, work on the same principle.

In this paper the decoupling of equations describing the work of a horizontal stabilization system of the high-speed overland transportation on a magnetic levitation has been performed. The equations of vehicle motion include both mechanical joint variables and current magnitudes in the electromagnets, resulting in the need to analyze the systems of differential equations of higher order.

For equations decoupling the symmetry properties of the selected design model are used. Calculations are performed using the representation theory of finite groups. This allows finding of sets of new variables under which the equations shall be split into independent subsystems before equations composition. For the system under study we have found that the equations system of the 78th order is broken down into four subsystems having orders 12, 12, 28 and 26.

*Key words: symmetry group, decoupling, electromagnetic levitation, the equations of motion.*

## ВВЕДЕНИЕ

Поезд на магнитном подвешивании, магнитоплан или маглев (от англ. *magnetic levitation* – «магнитная левитация») – это поезд, удерживаемый над полотном дороги, движимый и управляемый силой электромагнитного поля [1].

Наибольшее распространение получили два варианта магнитного подвеса. Первый вариант – электромагнитный подвес – основан на притягивающих усилиях, возникающих между установленными на экипаже электромагнитами и ферромагнитным рельсом, уложенным по всей длине трассы (рис. 1). Для преодоления принципиальной неустойчивости электромагнитного подвеса используется система непрерывного управления токами в каждом электромагните. По такому же принципу работают направляющие магниты, предназначенные для стабилизации движения вагона в горизонтальной плоскости.

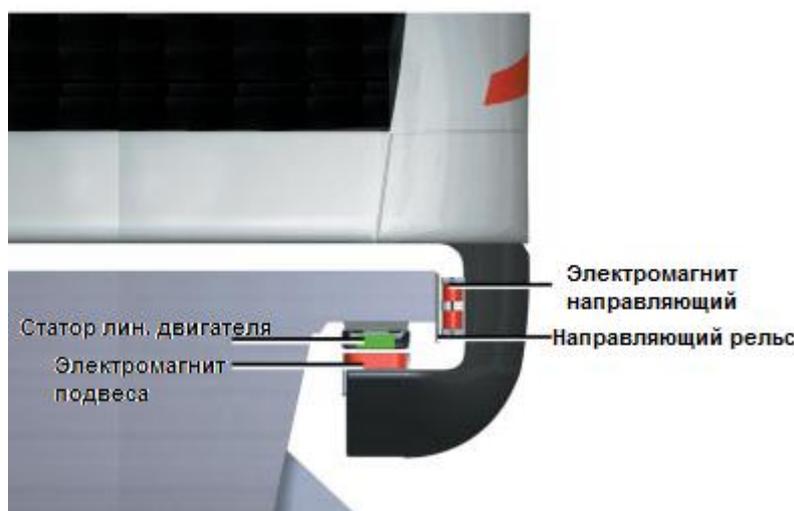


Рис. 1. Схема расположения магнитов и рельсов (электромагнитное подвешивание)

Второй вариант – электродинамический подвес – основан на усилиях отталкивания между источником магнитного поля на борту экипажа и проводником, уложенным вдоль трассы, при их взаимном движении. В процессе движения источника магнитного поля относительно проводящей пластины в последней возникают вихревые токи. Магнитное поле этих токов направлено противоположно внешнему магнитному полю, в результате чего возникает сила отталкивания.

Сама идея такого транспорта не нова, но экономические и технические ограничения пока не позволяют ей развернуться в полной мере.

## ГРУППА СИММЕТРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Группы симметрии давно используются физиками при расчётах колебаний молекул, кристаллов и при решении ряда других задач [2]. Применение этих же методов в технических задачах имеет ряд особенностей [3, 4].

Симметрия физической системы проявляется в том, что существуют преобразования  $g_i$  пространства, относительно которых система, а следовательно, и ее математическая модель, инвариантны (неизменны). К таким преобразованиям относятся отражения физической системы относительно плоскостей симметрии, повороты вокруг осей симметрии и т. п.

Если во множестве преобразований  $g_i$  ввести операцию последовательного применения преобразований  $g_c = g_a g_b$ , то это множество становится группой. Свойство инвариантности системы относительно преобразований  $g_i$  выражается в том, что матрицы  $T(g_i)$  коммутируют с матрицами коэффициентов системы уравнений.

В литературе (см., например, [2]) подробно описаны все конечные группы, встречающиеся в приложениях. Приведены также их неприводимые представления  $\tau_k(g_i)$  (здесь  $k = \overline{1, m}$ ,  $m$  – число различных неприводимых представлений данной группы). Разложение представлений  $\{T(g_i)\}$  на неприводимые соответствует разделению системы уравнений на несколько подсистем.

Пусть рассматривается некоторая механическая система. Вектор ее исходных обобщенных координат обозначим через  $\mathbf{q}$ . Эта система инвариантна относительно группы преобразований координат  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . В матричном виде данные преобразования записывают так:  $\tilde{\mathbf{q}} = T(g_i)\mathbf{q}$ . Требуется найти такую замену обобщенных координат  $\mathbf{q} = S\mathbf{x}$ , чтобы уравнения, составленные в новых координатах, получились разделенными на подсистемы.

Существуют два пути решения этой задачи. Первый путь – использование образующих элементов  $T(g_1), \dots, T(g_r)$  группы матриц. Здесь и далее образующие располагаются в начале списка элементов группы. Матрица  $T(g_1)$  коммутирует с матрицами коэффициентов  $\{B_i\}$  уравнений движения исследуемой системы. Поэтому можно применить «способ коммутирующей матрицы» [3]. Другими словами, в качестве столбцов матрицы преобразования  $S_1$  берём векторы канонического базиса матрицы  $T(g_1)$ . Тогда преобразование  $\mathbf{q} = S_1\mathbf{x}$  уже дает более удачные обобщенные координаты  $\mathbf{x}$ . Далее используем следующие образующие элементы группы.

Другой путь состоит в вычислении проекторов на инвариантные подпространства, соответствующие неприводимым представлениям. В случае одномерных неприводимых представлений формула для нахождения проекторов имеет вид:

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \overline{\tau_j(g_v)} T(g_v), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где  $N$  – число элементов группы,  $\tau_j(g_v)$  –  $v$ -е значение  $j$ -го одномерного неприводимого представления. Затем выбираются линейно независимые векторы-столбцы каждого из проекторов, которые служат строками матрицы преобразования  $S$ .

Такой подход уже давно используется при расчёте колебаний молекул, кристаллов и в других задачах теоретической физики [2]. К настоящему времени появилось большое число работ по применению групп симметрии и в технике (см., например, обзоры [5, 6]).

В случае, когда исходные матрицы имеют сравнительно высокий порядок, расчёты целесообразно выполнять на компьютере. Для вычисления проекторов по формуле (1) была составлена программа GROUPS [3].

### ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЁТОВ

Экипаж высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) на электромагнитном подвешивании [1, 7] является одним из примеров электромеханической системы. В качестве переменных при исследовании движения такого вагона используются механические величины (перемещения масс, размеры зазоров и т.п.) и значения токов в электромагнитах. При решении задачи стабилизации боковых колебаний такого экипажа появляются громоздкие системы уравнений. Становится актуальной задача их декомпозиции.

Рассматривается декомпозиция уравнений, описывающих работу системы горизонтальной стабилизации движения экипажа ВСНТ с четырьмя тележками (рис. 2). При исследовании устойчивости движения этого экипажа в горизонтальной плоскости принимаются во внимание следующие обобщенные координаты [7]:

$$\psi, y, \theta, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, y_1, y_2, y_3, y_4, \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{44}.$$

Координаты без индекса обозначают смещения и углы поворота кузова, с одним индексом – смещения и углы поворота соответствующих тележек,  $y_{kj}$  – боковой относ -го магнита, укрепленного на  $k$ -ой тележке. Кроме того, в дифференциальные уравнения входят величины токов в электромагнитах  $i_{kj}$ . Это связано с тем, что величины токов в электромагнитах не могут меняться мгновенно. «Инерция» возникает из-за индуктивности электромагнитов.

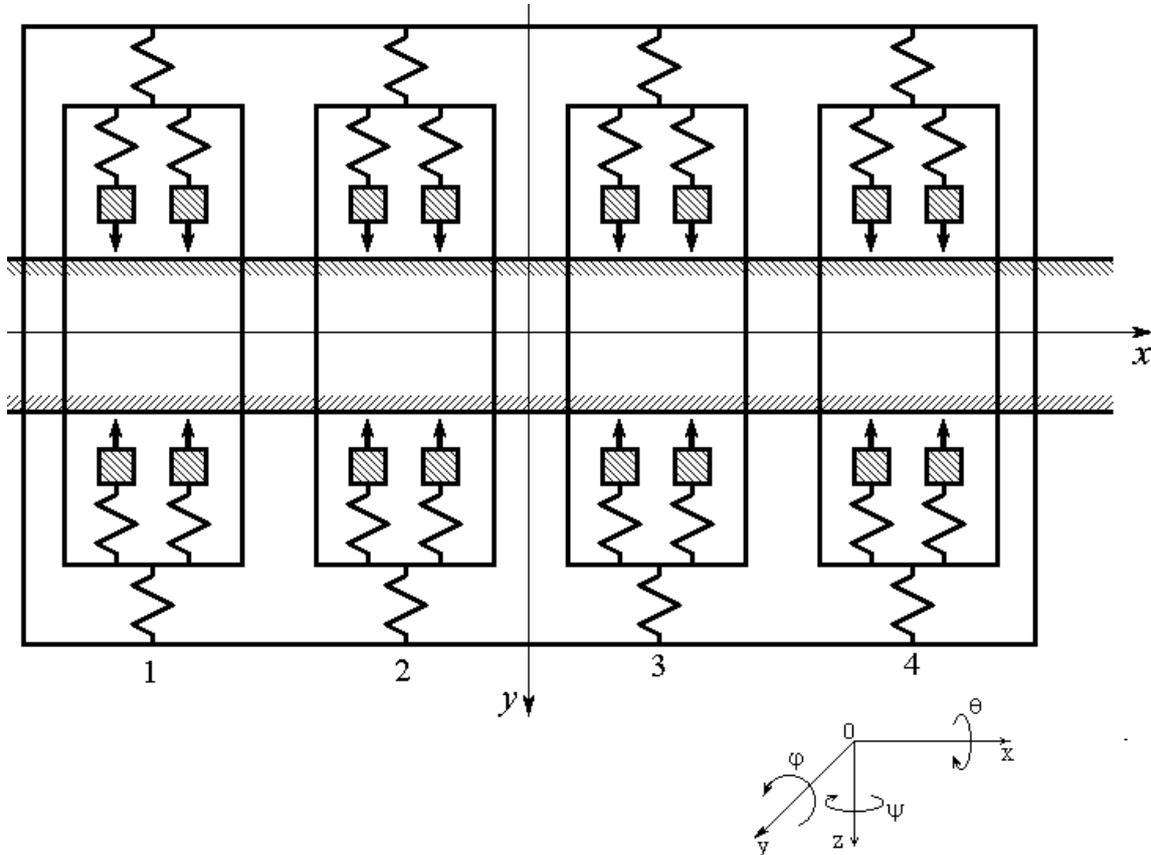


Рис. 2. Расчетная схема экипажа высокоскоростного наземного транспорта

Взаимосвязь между механическими и электрическими величинами следующая. Притягивающая сила электромагнита равна:

$$P = C_m \frac{i_{\Pi}^2}{\delta_{\Pi}^2},$$

где  $C_m$  – постоянная электромагнита,  $i_{\Pi}$  – ток,  $\delta_{\Pi}$  – зазор. При линеаризации эта зависимость заменяется следующей:

$$P = b_1 + b_2 i - b_3 \delta,$$

где  $b_1 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^2}$ ,  $b_2 = 2C_m \frac{i_0}{\delta_0^2}$ ,  $b_3 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^3}$ ,  $i_0$  и  $\delta_0$  – заданные значения тока и зазора,  $i$  и  $\delta$  – динамические добавки величин тока и зазора. Система управления подаёт напряжение на электромагнит в зависимости от величины зазора, скорости и ускорения изменения величины зазора:

$$U = k_1 \delta + k_2 \dot{\delta} - k_3 \ddot{\delta},$$

где  $U$  – динамическая добавка величины напряжения;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  – коэффициенты системы автоматического управления зазором между электромагнитами и путевой структурой.

Величина тока меняется в соответствии с уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U,$$

где  $L$  и  $R$  – индуктивность и сопротивление обмоток электромагнита.

Система уравнений имеет 78-й порядок.

Симметрия экипажа ВСНТ проявляется в том, что его расчетная схема остается неизменной при следующих преобразованиях:  $g_1$  – отражение всей системы относительно вертикальной поперечной плоскости  $Oyz$ ;  $g_2$  – отражение относительно продольной плоскости  $Oxz$ ;  $g_3$  – поворот на  $180^\circ$  вокруг оси  $Oz$ ;  $g_4$  – тождественное преобразование. Эти преобразования образуют группу  $G$  симметрии экипажа ВСНТ.

Матрицы преобразования обобщенных координат, соответствующие таким преобразованиям симметрии, имеют следующий вид:

$$T(g_1) = \text{diag} \left( -1, 1, 1, -M, M, M, M \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$T(g_2) = \text{diag} \left( -1, -1, -1, -E_4, -E_4, -E_4 - E_4 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$T(g_3) = \text{diag}(1, -1, -1, M, -M, -M, -M \times M),$$

$$T(g_4) = E_{31},$$

где  $M = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\times$  – знак прямого произведения матриц;  $E_m$  – единичная матрица порядка  $m$ .

Точки  $i_{kj}$  преобразуются так же, как и боковые перемещения магнитов  $y_{kj}$ .

Группа  $G$  совпадает с группой симметрии прямоугольника  $C_{2h}$  (см. [2]). Её неприводимые представления следующие:

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4 = e$
$\tau_1$	1	1	1	1
$\tau_2$	-1	1	-1	1
$\tau_3$	1	-1	-1	1
$\tau_4$	-1	-1	1	1

С помощью программы GROUPS были вычислены проекторы на инвариантные подпространства, соответствующие неприводимым представлениям этой группы. Элементы линейно независимых столбцов этих проекторов являются коэффициентами выражений для новых обобщенных координат.

Получены следующие новые наборы переменных:

$$\begin{aligned} \text{а) } q_1 &= \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} + y_{43} - y_{44}), & q_2 &= \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} + y_{41} - y_{42}), \\ q_3 &= \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} + y_{33} - y_{34}), & q_4 &= \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} + y_{31} - y_{32}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} + i_{43} - i_{44}), & s_2 &= \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} + i_{41} - i_{42}), \\
s_3 &= \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} + i_{33} - i_{34}), & s_4 &= \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} + i_{31} - i_{32}); \\
\text{б)} \quad q_5 &= \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} - y_{43} + y_{44}), & q_6 &= \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} - y_{41} + y_{42}), \\
q_7 &= \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} - y_{33} + y_{34}), & q_8 &= \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} - y_{31} + y_{32}), \\
s_5 &= \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} - i_{43} + i_{44}), & s_6 &= \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} - i_{41} + i_{42}), \\
s_7 &= \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} - i_{33} + i_{34}), & s_4 &= \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} - i_{31} + i_{32}); \\
\text{в)} \quad q_9 &= y, & q_{10} &= \theta, \\
q_{11} &= \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_4), & q_{12} &= \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_3), \\
q_{13} &= \frac{1}{2}(y_1 + y_4), & q_{14} &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3), \\
q_{15} &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_4), & q_{16} &= \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_3) \\
q_{17} &= \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} + y_{43} + y_{44}), & q_{18} &= \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} + y_{41} + y_{42}), \\
q_{19} &= \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} + y_{33} + y_{34}), & q_{20} &= \frac{1}{4}(y_{23} + 4 + y_{31} + y_{32}), \\
s_9 &= \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} + i_{43} + i_{44}), & s_{10} &= \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} + i_{41} + i_{42}), \\
s_{11} &= \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} + i_{33} + i_{34}), & s_{12} &= \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} + i_{31} + i_{32}); \\
\text{г)} \quad q_{21} &= \psi, & q_{22} &= \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_4), & q_{23} &= \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_3), \\
q_{24} &= \frac{1}{2}(y_1 - y_4), & q_{25} &= \frac{1}{2}(y_2 - y_3), \\
q_{26} &= \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_4), & q_{27} &= \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_3), \\
q_{28} &= \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} - y_{43} - y_{44}), & q_{29} &= \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} - y_{41} - y_{42}), \\
q_{30} &= \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} - y_{33} - y_{44}), & q_{31} &= \frac{1}{4}(y_{23} + y_{24} - y_{31} - y_{32}), \\
s_{13} &= \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} - i_{43} - i_{44}), & s_{14} &= \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} - i_{41} - i_{42}), \\
s_{15} &= \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} - i_{33} - i_{44}), & s_{16} &= \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} - i_{31} - i_{32}).
\end{aligned}$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате расчетов получаем, что система уравнений 78-ого порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26. Получены новые наборы переменных. Каждому набору переменных соответствует отдельная система уравнений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Maglev // Wikipedia, the free encyclopedia. – 2015. – Access to the resource : <https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev>.
2. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике : Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. – М. : URSS, 2016. – 360 с.
3. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. – К. : Наук. думка, 1987. – 156 с.

4. Базилевич Ю. М. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. – 2000. – №1. – С. 13-16.
5. Павлов В. Г. Системы, инвариантные относительно групп преобразований / В. Г. Павлов // Кибернетика и вычисл. техника. – 1983. – Вып. 58. – С. 17-21.
6. Павловский Ю. Н. Управление декомпозиционными структурами / Ю. Н. Павловский // Там же. – С. 11-16.
7. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. – Днепропетровск : ДИИТ, 1986. – С. 79-87.

### REFERENCES

1. (2015), “Maglev”, Wikipedia, the free encyclopedia, available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev>.
2. Lyubarskiy, G.Ya. (2016), *Teoriya grupp i ee primeneniye v fizike: Kurs lektsiy dlya fizikov-teoretikov* [Group theory and its application in physics: Lectures for theoretical physicists] URSS, Moscow, Russia.
3. Bazilevich, Yu.N. (1987), *Chislennyye metody dekompozitsii v lineynykh zadachah mehaniki* [Numerical decoupling methods in the linear problems of mechanics], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
4. Bazilevich, Yu.N. and Korotenko, M.L. (2000), “The choice of locomotive with three carriages joint variables considering the symmetry of its design scheme”, *Visnyk Zaporiz'kogo derzhavnogo universytetu. Fizyko-matematychni nauky, Biologichni nauky*, no. 1, pp. 13-16.
5. Pavlov, V.G. (1983), “Systems that are invariant with respect to transformation groups”, *Kibernetika i vychislitel'naya tehnika*, issue 58, pp. 17-21.
6. Pavlovskiy, Yu.N. (1983), “Decomposition structures management”, *Kibernetika i vychislitel'naya tehnika*, issue 58, pp. 11-16.
7. Korotenko, M.L., Koporulin, V.L. and Kryshko, E.P. (1986), “Sideways movements of the vehicle with contactless suspension”, *Problemy dinamiki, prochnosti i ustoychivosti dvizheniya zheleznodorozhnogo podvizhnogo sostava*, pp. 79-87.

УДК 519.85

## О ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПОРЯДОЧИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Барболина Т. Н.

*Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко,  
ул. Остроградского, 2, г. Полтава, 36000, Украина*

tm-b@ukr.net

Для использования в постановках оптимизационных задач предложен подход к упорядочиванию случайных величин. Введено отношение линейного порядка на фактор-множестве по эквивалентности, основанной на сравнении числовых характеристик случайной величины. Рассмотрены некоторые свойства этого отношения. Используя введенное отношение порядка, сформулированы оптимизационные задачи, которые учитывают вероятностную неопределенность данных.

*Ключевые слова: вероятностная неопределенность, линейный порядок, оптимизационная задача, числовые характеристики случайной величины.*