4. Базилевич Ю. М. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. – 2000. – №1. – С. 13-16.
5. Павлов В. Г. Системы, инвариантные относительно групп преобразований / В. Г. Павлов // Кибернетика и вычисл. техника. – 1983. – Вып. 58. – С. 17-21.
6. Павловский Ю. Н. Управление декомпозиционными структурами / Ю. Н. Павловский // Там же. – С. 11-16.
7. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. – Днепропетровск : ДИИТ, 1986. – С. 79-87.

REFERENCES

1. (2015), “Maglev”, Wikipedia, the free encyclopedia, available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev.
2. Lyubarskiy, G.Ya. (2016), *Teoriya grupp i ee primenenie v fizike: Kurs lektsiy dlya fizikov-teoretikov Izd. 2* [Group theory and its application in physics: Lectures for theoretical physicists] URSS, Moscow, Russia.
3. Bazilevich, Yu.N. (1987), *Chislennyye metody dekompozitsii v lineynyh zadachah mehaniki* [Numerical decoupling methods in the linear problems of mechanics], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
4. Bazilevich, Yu.N. and Korotenko, M.L. (2000), “The choice of locomotive with three carriages joint variables considering the symmetry of its design scheme”, *Visnyk Zaporiz'kogo derzhavnogo universytetu. Fizyko-matematychni nauky, Biologichni nauky*, no. 1, pp. 13-16.
5. Pavlov, V.G. (1983), “Systems that are invariant with respect to transformation groups”, *Kibernetika i vychislitelnaya tehnika*, issue 58, pp. 17-21.
6. Pavlovskiy, Yu.N. (1983), “Decomposition structures management”, *Kibernetika i vychislitelnaya tehnika*, issue 58, pp. 11-16.
7. Korotenko, M.L., Koporulin, V.L. and Kryshko, E.P. (1986), “Sideways movements of the vehicle with contactless suspension”, *Problemy dinamiki, prochnosti i ustoychivosti dvizheniya zheleznodorozhnogo podvizhnogo sostava*, pp. 79-87.

УДК 519.85

О ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПОРЯДОЧИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Барболина Т. Н.

Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко,
ул. Остроградского, 2, г. Полтава, 36000, Украина

tm-b@ukr.net

Для использования в постановках оптимизационных задач предложен подход к упорядочиванию случайных величин. Введено отношение линейного порядка на фактор-множестве по эквивалентности, основанной на сравнении числовых характеристик случайной величины. Рассмотрены некоторые свойства этого отношения. Используя введенное отношение порядка, сформулированы оптимизационные задачи, которые учитывают вероятностную неопределенность данных.

Ключевые слова: вероятностная неопределенность, линейный порядок, оптимизационная задача, числовые характеристики случайной величины.

ПРО ПІДХІД ДО ОПТИМІЗАЦІЇ З ІМОВІРНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ З ВИКОРИСТАННЯМ УПОРЯДКУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Барболіна Т. М.

Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка, вул. Остроградського, 2, м. Полтава, 36000, Україна

tm-b@ukr.net

Для використання в постановках оптимізаційних задач запропонований підхід до упорядкування випадкових величин. Уведено відношення лінійного порядку на фактор-множині за еквівалентністю, що ґрунтується на порівнянні числових характеристик випадкової величини. Розглянуто деякі властивості цього відношення. Використовуючи введене відношення порядку, сформульовані оптимізаційні задачі, які враховують імовірнісну невизначеність даних.

Ключові слова: імовірнісна невизначеність, лінійний порядок, оптимізаційна задача, числові характеристики випадкової величини.

ABOUT APPROACH TO OPTIMIZATION WITH PROBABILISTIC UNCERTAINTY USING ORDERING OF RANDOM VARIABLES

Barbolina T. M.

Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University, Ostrogradsky Str., 2, Poltava, 36000, Ukraine

tm-b@ukr.net

The problems with uncertainty, including probabilistic, attract the attention of researchers recently. Different ways have been proposed to construct constraints and criterions of stochastic optimization problems. For instance wide class of the stochastic models may be written in form of minimization of mathematical expectation of objective function on some domain. At the same time such approach doesn’t allow to compare different solutions if corresponding value of objective function has equal mathematical expectations. Specifically such problems arise in combinatorial optimization. In the paper an example of problem is given.

One possible approach for formalization of optimization problems under interval, fuzzy and probabilistic uncertainty would be to use a certain order on the set of relevant variables. In particular an order on a set of discrete random variables proposed earlier is defined through the comparison of the mathematical expectations, dispersions, possible values and associated probabilities. However in many practical problems probabilistic distribution is unknown. Therefore such order cannot be used. In this paper author proposes ordering through the comparison of numerical characteristics of random variables.

Let the characteristic vector of the random variable be a vector which components are numerical characteristics of the random variable. We mainly consider characteristic vector which components are initial moments of a random variable, i.e. mathematical expectation of its n-s power.

Random variables with equal characteristic vectors are called H-equivalent. H-equivalence relation on a set of random variables is an equivalence relation. Let the characteristic vector of equivalence class is a characteristic vector of its representative. We will call two equivalence classes organized in ascending (nondecreasing) order, if characteristic vector of the first class lexicographically less (less or equal) then characteristic vector of the second one. From properties of lexicographic order it follows that introduced order is linear one.

We define sum of two equivalence classes to be the class which contains sum of its representatives. We prove that this definition is correct. If random variables are independent and components of characteristic vectors are initial moments of a random variable then introduced order possesses property important for some practical problems. Ordering of two equivalency classes remained at addition to the left and right part of a relation of the same equivalence classes. Also we prove some corollaries of this property.

Consider finite subset Ω of the set of independent random variables. Using introduced linear order, let us order the elements of the factor set of Ω relative to H- equivalence. The first random variable in this ordered list is the minimum value and the last one is the maximum value. The definition of the minimum and maximum allows setting the optimization problem for finding the extreme elements in the given conditions.

Statement of optimization problems on factor set of Ω relative to H- equivalence in the general case requires to define operations with equivalence classes. At the same time if operation with classes defines through operation with their representatives then result may depend from choose of classes’ elements.

Since statement of optimization problems in the general case is difficult author formulate one class of problems. This statement uses sum of equivalence classes and multiplication class on real number. Also we assume that components of characteristic vector are initial moments of a random variable. If mathematical expectations of objective function and constraint are different under all feasible points then statements of optimization problems proposed in the paper is equivalent to problem of optimization of mathematical expectation under statistical constraints.

Studying of optimization problems on linear ordered sets allows to use branch and bound method for its solving. Subsequent studies suggest further study of the properties of the considered problems.

Key words: probabilistic uncertainty, linear order, optimization problem, numerical characteristics of a random variable.

ВВЕДЕНИЕ

Вероятностный характер исходной информации, имеющий место во множестве практических задач, обращает внимание исследователей на развитие моделей и методов стохастического программирования (см., например, [1-6]). При построении моделей задач стохастической оптимизации возникает вопрос о том, что считать допустимым решением и каким образом определять лучшее решение. Существуют различные подходы к формированию условий: жесткие постановки [2, 3], вероятностные ограничения и квантильная оптимизация [4, 5], модели со статистическими условиями [3] и др.

Столь же разнообразными являются подходы к выбору критерия, что является отдельной нетривиальной научной проблемой, решение которой зависит от особенностей исследуемых практических задач. Среди наиболее известных подходов к выбору критерия в стохастическом программировании можно указать:

- поиск экстремума математического ожидания значения функции;
- минимизация отклонения целевой функции от заданного значения;
- максимизация вероятности получить значение целевой функции выше заданного и др.

Следует отметить, что достаточно широкий класс стохастических моделей может быть записан в однообразной форме минимизации математического ожидания целевой функции в некоторой области [3]. В то же время такой подход не дает возможности сравнивать различные решения, для которых значение математического ожидания целевой функции одинаково. Такие ситуации нередко возникают, в частности, в задачах комбинаторной оптимизации. В качестве примера приведем так называемую задачу директора, которая формулируется следующим образом [7]. В приемной директора находятся k посетителей. Известно ожидаемое время приема каждого посетителя. Необходимо установить порядок приема посетителей таким образом, чтобы время приема было минимальным. Обобщая задачу, совершенно естественно полагать, что ожидаемое время приема является случайной величиной. В этом случае можно требовать минимизации математического ожидания суммарного времени приема. Однако, если математические ожидания всех случайных величин времени приема одинаковы, выбрать лучшее решение не представляется возможным. Поэтому целесообразно ставить вопрос об уточнении критерия.

Для оптимизационных задач интервальной и нечеткой оптимизации был предложен подход, основанный на введении отношения порядка [8, 9]. Развитие такого подхода для задач стохастической оптимизации представлено в [10, 11]. Один из предложенных способов упорядочивания дискретных случайных величин основывается на сравнении их числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия), возможных значений и соответствующих вероятностей.

Однако, как известно, во многих практически значимых задачах закон распределения случайной величины не может быть получен. В этом случае указанный способ упорядочивания случайных величин не может быть использован. Поскольку при неизвестном законе распределения случайной величины, как правило, ограничиваются числовыми характеристиками этой величины, в частности, моментами, то для таких задач целесообразно использовать упорядочивание, которое основывается на сравнении числовых характеристик случайных величин. В настоящей статье излагается такой подход и обосновывается ряд положений, изложенных в [10].

УПОРЯДОЧИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Будем обозначать дискретные случайные величины большими латинскими буквами (X, Y, Z), их возможные значения – малыми (x_i, y_i, z_i), а соответствующие вероятности через p_i^x, p_i^y, p_i^z. Пусть Ω – некоторое множество независимых случайных величин. Определим для случайной величины X характеристический вектор как вектор $H(X)=(h_1(X),...,h_s(X))$, где $h_i(X)$, $i=1,...,k$ – некоторые числовые характеристики случайной величины X.

В дальнейшем преимущественно будем рассматривать характеристический вектор, компонентами которого являются начальные моменты случайной величины. Как и в [13], начальным моментом k-го порядка случайной величины X будем называть математическое ожидание k-ой степени этой случайной величины:

$$\mu_k(X)=M\left(X^k\right). \tag{1}$$

Определение 1. Будем называть две случайные величины $X,Y\in\Omega$ H-эквивалентными (обозначать $X\simeq_k Y$) тогда и только тогда, когда $H(X)=H(Y)$.

Утверждение 1. Отношение $\simeq_k$ на множестве независимых случайных величин является отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность непосредственно следует из равенства $h_i(X)=h_i(X)$ для всех $i=1,...,k$.

Симметричность. Если $X\simeq_k Y$, то для всех $i=1,...,k$ имеют места равенства $h_i(X)=h_i(Y)$, а значит, и равенства $h_i(Y)=h_i(X)$, то есть $Y\simeq_k X$.

Транзитивность. Пусть $X\simeq_k Y$ и $Y\simeq_k Z$, тогда для всех $i=1,...,k$ имеют место равенства $h_i(X)=h_i(Y)$ и $h_i(Y)=h_i(Z)$. Тогда также $h_i(X)=h_i(Z)$ для всех $i=1,...,k$. Таким образом, $X\simeq_k Z$. Утверждение доказано.

Класс эквивалентности по отношению $\simeq_k$ с представителем X будем обозначать $[X]_k$, то есть $[X]_k\in\Omega/\simeq_k$. Обозначим также $H([X]_k)$ характеристический вектор некоторой дискретной случайной величины $X\in[X]_k$ (в соответствии с определением 1 эти вектора равны для всех представителей класса $[X]_k$). Пусть также $<_l$ обозначает лексикографическое упорядочение в m-мерном евклидовом пространстве: для любых $u,u'\in R^m$ $u<_l u'$, если первая ненулевая компонента разности $u-u'$ отрицательна. Если $u<_l u'$ или $u=u'$, то будем записывать $u\le_l u'$.

Определение 2. Будем называть классы $[X]_k,[Y]_k\in\Omega/\simeq_k$ упорядоченными по возрастанию (обозначать $[X]_k\prec[Y]_k$), если $H([X]_k)<_l H([Y]_k)$.

Определение 3. Будем называть классы $[X]_k,[Y]_k\in\Omega/\simeq_k$ упорядоченными по неубыванию (обозначать $[X]_k\preceq[Y]_k$), если $H([X]_k)\le_l H([Y]_k)$.

Из свойств лексикографического порядка следует, что отношение $\prec$ является отношением строгого порядка, а отношение $\preceq$ – отношением линейного порядка.

Для потребностей моделирования ряда практических задач, в частности, задач упаковки (см. например, [9, 12]), естественным было бы требовать, чтобы для введенных определенным образом порядка и суммы упорядочивание двух случайных величин сохранялось при прибавлении к левой и правой части соотношения одной и той же случайной величины.

Покажем, что такое свойство выполняется в случае независимых случайных величин для порядка, введенного в соответствии с определением 3, если для характеристического вектора $h_i(X)=\mu_i(X)$ для всех $i=1,\ldots,k$. Сумму классов эквивалентности определим следующим образом.

Определение 4. Суммой классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega/\simeq_k$ будем называть класс с представителем X_1+Y_1, где $X_1 \in [X]_k$, $Y_1 \in [Y]_k$.

Корректность определения 4 (в смысле независимости суммы от выбора представителей классов эквивалентности) обосновывается следующими рассуждениями. Пусть дискретные случайные величины X_1 и X_2 принадлежат классу эквивалентности $[X]_k \in \Omega/\simeq_k$, а величины Y_1 и Y_2 – классу $[Y]_k \in \Omega/\simeq_k$. Так как величины из множества Ω независимы, то для i-го момента суммы величин X_l+Y_l ($l=1,2$) имеет место формула [14]

$$M\left(X_l+Y_l\right)^i=\sum_{j=0}^{i} C_i^j M\left(X_l^j\right) M\left(Y_l^{i-j}\right). \tag{2}$$

Так как для всех $j=1,\ldots,k$ выполняются равенства $M\left(X_1^j\right)=M\left(X_2^j\right)$, $M\left(Y_1^j\right)=M\left(Y_2^j\right)$ (вследствие $X_1 \simeq_k X_2$, $Y_1 \simeq_k Y_2$), то также $M\left(X_1+Y_1\right)^i=M\left(X_2+Y_2\right)^i$ для всех $i=1,\ldots,k$, то есть $X_1+Y_1 \simeq_k X_2+Y_2$.

Вернемся к рассмотрению свойства сохранения упорядочивания классов эквивалентности из $\Omega/\simeq_k$ при прибавлении к левой и правой части соотношения одного и того же класса.

Утверждение 2. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1). Если для классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega/\simeq_k$ выполняется условие $[X]_k \prec [Y]_k$, то также имеет место $[X]_k+[Z]_k \prec [Y]_k+[Z]_k$, где $[Z]_k \in \Omega/\simeq_k$.

Доказательство. Пусть для классов $[X]_k, [Y]_k \in \Omega/\simeq_k$ выполняется условие $[X]_k \prec [Y]_k$, также $[Z]_k \in \Omega/\simeq_k$. Пусть r – наименьший порядок, для которого $\mu_r\left([X]_k\right) \neq \mu_r\left([Y]_k\right)$. Из определения 2 следует, что $\mu_r\left([X]_k\right) < \mu_r\left([Y]_k\right)$.

Если $r=1$, то $\mu_1\left([X]_k\right)=\mu_1(X)=M(X)$, $\mu_1\left([Y]_k\right)=\mu_1(Y)=M(Y)$. Следовательно,

$$\mu_1\left([X]_k+[Z]_k\right)=\mu_1(X+Z)=M(X+Z)=M(X)+M(Z)<$$
$$<M(Y)+M(Z)=M(Y+Z)=\mu_1(Y+Z)=\mu_1\left([Y]_k+[Z]_k\right),$$

откуда $[X]_k+[Z]_k \prec [Y]_k+[Z]_k$.

При $r>1$ на основании формулы (2) получаем, что для всех $i=1,\ldots,r-1$ равны соответствующие моменты сумм $[X]_k+[Z]_k$ и $[Y]_k+[Z]_k$: $\mu_i\left([X]_k+[Z]_k\right)=\mu_i\left([Y]_k+[Z]_k\right)$.

Рассмотрим r-е моменты:

$$\mu_r\left([X]_k+[Z]_k\right)=\mu_r(X+Z)=\sum_{j=0}^{r} C_r^j \mu_j(X)\mu_{r-j}(Z)=$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(X)\mu_{r-j}(Z) + \mu_r(X) = \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(Y)\mu_{r-j}(Z) + \mu_r(X) <$$

$$< \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j(Y)\mu_{r-j}(Z) + \mu_r(Y) = \mu_r(Y+Z) = \mu_r\left([Y]_k + [Z]_k\right).$$

Таким образом, $[X]_k + [Z]_k \prec [Y]_k + [Z]_k$. Утверждение доказано.

Следствие 1. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1), $[X]_k, [Y]_k, [Z]_k \in \Omega/\simeq_k$. Если выполняется условие $[X]_k \preceq [Y]_k$, то также имеет место $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$.

Доказательство. Согласно определению 3 $[X]_k \preceq [Y]_k$, если $[X]_k \prec [Y]_k$ или $[X]_k = [Y]_k$. В первом случае выполнение условия $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$ следует из утверждения 2, во втором, очевидно, выполняется равенство $[X]_k + [Z]_k = [Y]_k + [Z]_k$, откуда $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть компоненты характеристического вектора случайной величины определяются согласно (1), $[X]_k, [Y]_k, [Z]_k, [V]_k \in \Omega/\simeq_k$. Если выполняются условия $[X]_k \preceq [Y]_k$ и $[Z]_k \preceq [V]_k$, то также имеет место соотношение $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$.

Доказательство. Из условия $[X]_k \preceq [Y]_k$ в соответствии со следствием 1 имеем $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$. Аналогично из $[Z]_k \preceq [V]_k$ следует $[Y]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$. Тогда из транзитивности отношения $\preceq$ имеем, что $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [V]_k$. Следствие доказано.

Следствие 3. Если для классов $[A_1]_k, [A_2]_k, \ldots, [A_n]_k, [B_1]_k, [B_2]_k, \ldots, [B_n]_k \in \Omega/\simeq_k$ выполняются условия $[A_i]_k \preceq [B_i]_k$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $[A_1]_k + [A_2]_k + \ldots + [A_n]_k \preceq [B_1]_k + [B_2]_k + \ldots + [B_n]_k$.

ПОСТАНОВКИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Существенным в задачах оптимизации является определение минимума и максимума на заданном множестве дискретных случайных величин. Используя введенный в определении 3 линейный порядок, упорядочим элементы заданного конечного подмножества множества $\Omega/\simeq_k$: $\left[X^1\right]_k \preceq \left[X^2\right]_k \preceq \ldots \preceq \left[X^m\right]_k$. Максимумом является класс $\left[X^m\right]_k$, а минимумом – класс $\left[X^1\right]_k$.

Определение минимума и максимума дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при заданных условиях.

Постановка оптимизационных задач на фактор-множества $\Omega/\simeq_k$ в достаточно общем случае требует определения операций над классами эквивалентности. При этом следует отметить, что поэлементное определение операций не гарантирует их корректности, то есть независимости результата от выбора элементов класса. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть операция умножения классов определена как умножение их представителей: $[X]_k \cdot [Y]_k = [X \cdot Y]_k$. Рассмотрим дискретные случайные величины X и Y, заданные рядами распределения в соответствии с табл. 1.

Таблица 1 – Ряды распределения случайных величин X и Y

	X				Y			
Значения случайной величины	2	6	8	12	2	7	12	16
Вероятности значений случайной величины	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Так как $\mu_1(X)=\mu_1(Y)=7$ и $\mu_2(X)=\mu_2(Y)=62$, то $X\simeq_2 Y$. Следовательно, $[X]_2=[Y]_2$ и должно выполняться равенство $[X]_2\cdot[X]_2=[Y]_2\cdot[Y]_2$. Однако $[X\cdot X]_2\neq[Y\cdot Y]_2$. Действительно, ряды распределения величин $X\cdot X$ и $Y\cdot Y$ имеют вид как в табл. 2.

Таблица 2 – Ряды распределения случайных величин $X\cdot X$ и $Y\cdot Y$

	$X\cdot X$				$Y\cdot Y$			
Значения случайной величины	4	36	64	144	4	49	144	256
Вероятности значений случайной величины	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Таким образом, $\mu_2(X\cdot X)=4^2\cdot\frac{1}{4}+36^2\cdot\frac{1}{4}+64^2\cdot\frac{1}{4}+144^2\cdot\frac{1}{4}=6536$, тогда как $\mu_2(Y\cdot Y)=4^2\cdot\frac{1}{4}+49^2\cdot\frac{23}{45}+144^2\cdot\frac{9}{40}+256^2\cdot\frac{1}{72}=6807\neq 6536$. Это означает, что предложенный способ определения умножения классов зависит от выбора представителей классов.

Учитывая сложность постановки оптимизационной задачи в общем случае, предложим формулировку одного класса задач, которая использует операции сложения классов (введенную в определении 4) и умножения класса на вещественное (действительное) число. Полагаем также, что элементы множества Ω являются независимыми случайными величинами, а компоненты характеристического вектора, как и выше, определяются согласно (1).

Определение 5. Произведением класса $[X]_k\in\Omega/\simeq_k$ на число c будем называть класс с представителем cX, где $X\in[X]_k$, $c\in R^1$.

Рассмотрим корректность введенного определения. Пусть дискретные случайные величины $X,Y\in\Omega$ являются H-эквивалентными, c – некоторое число. Так как вследствие H-эквивалентности случайных величин X и Y для всех $j=1,\ldots,k$ выполняются равенства $\mu_j(X)=\mu_j(Y)$, то, используя свойства математического ожидания [13, 14], для j-х начальных моментов величин cX и cY для всех $j=1,\ldots,k$ имеем:

$$\mu_j(cX)=\sum_{i=1}^{\infty}(cx_i)^j\,p_i^x=\sum_{i=1}^{\infty}c^j x_i^j p_i^x=c^j\sum_{i=1}^{\infty}x_i^j p_i^x=c^j\sum_{i=1}^{\infty}y_i^j p_i^y=\sum_{i=1}^{\infty}c^j y_i^j p_i^y=\mu_j(cY),$$

то есть $cX\simeq_k cY$.

Используя введенные определениями 4 и 5 операции над элементами фактор-множества $\Omega/\simeq_k$ (Ω – конечное множество), понятие минимума, можем сформулировать следующую оптимизационную задачу на множестве классов эквивалентности по отношению $\simeq_k$: найти минимум функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[X^j \right]_k \tag{3}$$

в области

$$S = \left\{ \left(\left[X^1 \right]_k, \left[X^2 \right]_k, ..., \left[X^n \right]_k \right) \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[X^j \right]_k \preceq \left[b_i \right]_k, i = 1, ..., m \right\}, \tag{4}$$

где c_j, a_{ij} – детерминированные величины, $\left[X^j \right]_k, \left[b_i \right]_k \in \Omega / \simeq_k$.

Из определений 4, 5 следует, что задача (3), (4) эквивалентна задаче поиска минимума функции

$$\left[\sum_{j=1}^{n} c_j X^j \right]_k \tag{5}$$

в области

$$S' = \left\{ \left(X^1, X^2, ..., X^n \right) \middle| \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X^j \right]_k \preceq \left[b_i \right]_k, i = 1, ..., m \right\}, \tag{6}$$

где c_j, a_{ij}, как и выше, – детерминированные величины, $X^j, b_i \in \Omega$. Следует отметить, что в случае, когда известны законы распределения дискретных случайных величин множества Ω, можно рассматривать задачу (5), (6) при условии, что коэффициенты c_j, a_{ij} также являются случайными величинами. Также, если может быть получен закон распределения случайной величины $F\left(X^1, X^2, ..., X^n \right)$, возможна следующая постановка задачи с использованием упорядочивания классов фактор-множества $\Omega / \simeq_k$: найти в некоторой области S n-мерных случайных величин

$$\min_{\left(X^1, X^2, ..., X^n \right) \in S} \left[F\left(X^1, X^2, ..., X^n \right) \right]_k .$$

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Таким образом, в статье предложен подход к упорядочиванию случайных величин с использованием их числовых характеристик. Введение порядка дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при заданных условиях. Предложенные постановки оптимизационных задач можно рассматривать как расширение известных постановок оптимизации математического ожидания со статистическими условиями: в случае, когда для всех допустимых точек математические ожидания целевой функции и функций условий различны, то оптимумы таких задач совпадают.

Рассмотрение оптимизационных задач на линейно упорядоченных множествах позволяет использовать для их решения метод ветвей и границ. Как направление дальнейших исследований можно рассматривать изучение свойств сформулированных оптимизационных задач и развитие методов их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергієнко І. В. Застосування методів стохастичної оптимізації для дослідження трансформаційних процесів в економіці / І. В. Сергієнко, М. В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 4. – С. 7-29.

2. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 256 с.
3. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.
4. Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями / Ю. С. Кан, А. И. Кибзун. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с.
5. Наумов А. В. Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием / А. В. Наумов, С. В. Иванов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 2. – С. 142-158.
6. Marti K. Stochastic Optimization Methods / K. Marti. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg : Springer, 2008. – 340 p.
7. Шкурба В. В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1976. – 96 с.
8. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 38-50.
9. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу : http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.
10. Емец О. А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 11. – С. 40-45.
11. Емец О. А. Комбинаторная оптимизационная модель упаковки прямоугольников со стохастическими параметрами / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 4. – С. 99-111.
12. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу : http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Гл. ред. физ.-мат. литерат., 1969. – 576 с.
14. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник / Б. В. Гнеденко. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

REFERENCE

1. Sergienko, I.V. and Mikhalevich, M.V. (2004), “Application of stochastic optimization methods to analysis of the processes of economic transformation”, *Systemni doslidzhennya ta informatsiyni tekhnolohiyi*, no. 4, pp. 7-29.
2. Ermol'ev, Yu.M. and Yastremskii, A.I. (1979), *Stokhasticheskiye modeli i metody v ekonomicheskom planirovanii* [Stochastic models and methods in economic planning], Nauka, Moskow, Russia.
3. Yudin, D.B. (1974), *Matematicheskie metody upravleniya v usloviyakh nepolnoi informatsii* [Mathematical methods of a management in the conditions of incomplete information], Sovetskoe radio, Moskow, Russia.
4. Kan, Yu.S., and Kibzun, A.I. (2009), *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria], Fizmatlit, Moscow, Russia.
5. Naumov, A.V. and Ivanov, S.V. (2011), “On stochastic linear programming problems with the quantile criterion”, *Avtomatika i telemekhanika*, no. 2 , pp. 142-158.
6. Marti, K. (2008), [Stochastic Optimization Methods], Springer, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
7. Shkurba, V.V. (1976), *Zadacha trekh stankov* [Problem of three machines], Nauka, Moskow, Russia.

8. Sergienko, I.V., Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2013), "Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method", *Kibernetika i sistemnyy analiz*, no. 5, pp. 673-683.

9. Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2011), *Rozvyazuvanna zadach kombinatornoyi optymizatsiyi na nechitkykh mnozhynakh* [Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets], PUET, Poltava, Ukraine.

10. Iemets, O.O. and Barbolina, T.M. (2014), "About optimization problems with probabilistic uncertainty", Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny, no. 11, pp. 40-45.

11. Iemets, O.O. and Barbolina, T.M. (2015), "Combinatorial Optimization Model of Packing Rectangles with Stochastic Parameters", *Kibernetika i sistemnyy analiz*, no. 4, pp. 583-593.

12. Stoyan, Yu.G. and Iemets, O.O. (1993), *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiyi* [Theory and methods of euclidian combinatorial optimization], Instytut systemnykh doslidzhen osvity, Ukraine.

13. Ventsel, Ye.S. (1969), *Teoriya veroyatnostei* [Probability theory], Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, Moskow, Russia.

14. Gnedenko, B.V. (2005), *Kurs teorii veroyatnostei* [Course in probability theory], Editorial URSS, Moscow, Russia.

УДК 629.7.01 : 519.876.5 : 621.45.03

СОВРЕМЕННЫЕ САПР В АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Борисовская Ю. А., аспирант, Гоменюк С. И., д. т. н., профессор,
Аль-Омари М. А. В., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

julia.borisovskaya@gmail.com, serega@znu.edu.ua

В работе представлен обзор основных коммерческих и свободно распространяемых современных САПР-систем. Рассмотрены их основные возможности и методы, используемые для проведения анализа и расчета конструкций. Проведен анализ программных систем для автоматизированного анализа с точки зрения использования их при проектировании комплексов в аэрокосмической отрасли.

Ключевые слова: метод конечных элементов, САПР, моделирование, аэрокосмическая отрасль, обзор.

СУЧАСНІ САПР В АЕРОКОСМІЧНІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Борисовська Ю. О., аспірант, Гоменюк С. І., д. т. н., професор
Аль-Омарі М. А. В., аспірант

Запорізький національний університет,
вул.Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

julia.borisovskaya@gmail.com

У роботі представлений огляд основних комерційних та вільно розповсюджуваних сучасних САПР-систем. Розглянуті їх основні можливості та методи, що використовуються для проведення аналізу та розрахунку конструкцій. Проведено аналіз програмних систем для автоматизованого аналізу з точки зору їх використання при проектуванні комплексів в аерокосмічній галузі.

Ключові слова: метод скінчених елементів, САПР, моделювання, аерокосмічна галузь, огляд.