8. Поршнев С. В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

REFERENCES

1. Yakushevich, L.V. (2004), [Nonlinear Physics of DNA] Wiley, New York.
2. Peyrard, M. (2004), Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA, *Nonlinearity*, no. 17, pp. R1-R40.
3. Shygayev, A.S., Ponomarev, O.A. and Lakhno, V.D. (2013), "Theoretical and experimental studies of the open state of DNA", *Matenaticheskaya biologiya i bioinformatika*, vol. 8, no. 2, pp. 553-664.
4. Peyrard, M. and Bishop, A.R. (1989), "Statistical Mechanics of a Nonlinear Model for DNA Denaturation", *Physical Review Letters*, vol. 62, pp. 2755-2758.
5. Dauxois, T., Peyrard, M. and Bishop, A.R. (1993), "Entropy-driven DNA denaturation", *Physical Review E*, vol. 47, pp. R44-R47.
6. Fakhretdinov, M.I. and Zakirianov, F.K. (2013), "Discrete breathers in the model of DNA Peyrara-Bishop", *Zhurnal Tekhnicheskoi Phisiki*, vol. 83, no. 7, pp. 1-5.
7. Fakhretdinov, M.I., Zakirianov, F.K. and Ekomasov, E.G. (2015), "Discrete breathers and multibrizery model DNA Peyrara-Bishop", *Nelineinaya Dynamika*, vol. 11, no. 1, pp. 77-87.
8. Porshnev, S.V. and Belenkova, I.V. (2005), *Chislennye metody na baze Mathcad* [Numerical methods based Mathcad], BKhV-Peterburg, St. Petersburg.

удк 531/534:001.8

МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТА ІНТЕГРУВАННЯ У БЕЗСІТКОВИХ ПІДХОДАХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Гоменюк С. І., д. т. н., професор, Козлова О. С., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Запропонований короткий огляд публікацій, у яких розглядається та досліджується застосування безсіткового підходу до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Особлива увага приділяється таким ключовим етапам безсіткового підходу, як апроксимація функцій форми та метод дискретизації диференційного рівняння.

Ключові слова: безсітковий метод, функція форми, слабке формулювання, сильне формулювання, задачі механіки.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ В БЕССЕТОЧНЫХ ПОДХОДАХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Гоменюк С. И., д. т. н., профессор, Козлова О. С., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, м. Запорожье, 69600, Украина

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Представлен краткий обзор публикаций, в которых рассматривается и исследуется применение бессеточного подхода к решению задач механики деформированного твердого тела. Особое внимание уделяется таким ключевым этапам бессеточного подхода, а именно аппроксимации функции формы и методу дискретизации дифференциального уравнения.

Ключевые слова: бессеточный метод, функция формы, слабая формулировка, сильная формулировка, задачи механики.

MESHFREE APPROXIMATION AND INTEGRATION TECHNIQUES IN SOLID MECHANICS PROBLEMS

Gomenyuk S. I., D.Sc in Technical Sciences, Kozlova O. S., postgraduate

Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukaine

oskozlova@gmail.com, serega78@gmail.com

Meshless approach is an alternative of the Finite Element Method. This approach represents an approximated value of a function in terms of nodes. A lot of papers is devoted to meshless methods and their applications, including solid mechanics problems. This article will describe the methods of shape function approximation and explain integration techniques in meshfree approaches. Possible applications to solid mechanics of the shape functions will be examined in details.

The major stage of the meshless methods is the approximation of shape functions. This stage based entirely on an arbitrary distributed nodes. The most used methods of shape functions approximation in mechanics problems are the moving least square (MLS), the point interpolation method (PIM), and the radial point interpolation method (RPIM). These methods usually use locally supported shape functions.

The discretization of a governing equation is based on different technics such as strong form (collocation methods) or Galerkin methods (based on weak formulation or variational principle). Strong formulation is effective and very easy programming, but often leads to bad conditioned matrices that require additional correction tools. The weak formulation is more common used, because it gives good results and has more flexibility to develop different variations. Integral evaluation may be done in various ways, such as nodal integration (local weak form), cell background integration (global weak form) or a background of finite-element mesh. The global weak form uses integration within the entire domain and its borders. On the contrary local weak forms based on overlapping subdomains, which make up entire domain. Then the integration is carried out in this subdomain. Moreover, the strong form often applied together with RPIM, while the weak form used effectively both of the approximation method.

This article has shown a possible development direction of meshfree methods in solid mechanics problems is using specific basis functions and numerical algorithm optimization.

Key words: meshfree/meshless methods, shape function, strong form, weak form, solid mechanics problems.

ВСТУП

Останні декілька років актуальним напрямком розвитку чисельних методів є розвиток безсіткових методів (БМ), які використовуються в широкому колі проблем механіки (в тому числі у механіці руйнування та розповсюдження тріщин) та розв’язку систем диференційних рівнянь з частинними похідними, наприклад, задачі переносу тепла, електромагнетизм тощо. Безсіткові підходи є однією з альтернатив методу скінчених елементів у дослідженні цих проблем. Серед сучасних тенденцій розвитку САПР-систем як комерційних, так і вільно-розповсюджуваних (зазвичай дослідницьких) є інтеграція цих нових методів у свої програмні продукти, що зумовлено відносною легкістю генерації та регенерації системи вузлів. Це дозволяє більш ефективно використовувати їх у задачах моделювання великих деформацій, розповсюдження тріщин або моделювання тонких оболонок.

Наближене значення шуканої функції у будь-якій точці області розв’язання у безсітковому підході базується на значеннях функцій форми у деяких вузлах невеликої обмеженої області підтримки та має вигляд:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i \in S_n} \phi_i(x) u_i ,$$

де S_n – набір вузлів, що входять до локальної області підтримки, $\phi_i(x)$– функція форми i-го вузла, що побудована з використанням усіх вузлів області підтримки, y_i – значення змінної у i-му вузлі області підтримки [1].

Загальна схема алгоритму БМ дуже схожа на метод скінченних елементів, але на кожному з етапів виникають свої особливості. Першим кроком загального алгоритму методу є побудова сітки вузлів, але безсітковий підхід вимагає лише їх координати, та не вимагає зазначати зв’язок між цими вузлами. Приклад скінченно-елементного та безсіткового представлення тривимірного об’єкта зображений на рис. 1. Наступний етап – побудова функцій форми. Апроксимація функції форми зазвичай відбувається з використанням певного набору базисних функцій, які є дуже різними, але всі вони повинні мати обмежену область підтримки, бути неперервними та додатними в межах цієї області [2]. Найчастіші техніки апроксимації розглянуті нижче.

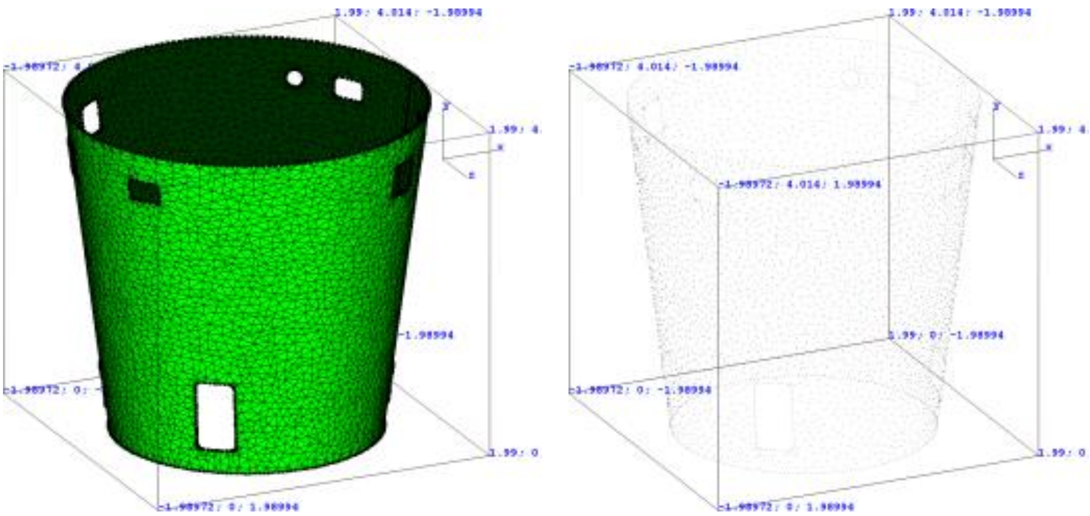

Рис. 1. Скінченно-елементне (а) та безсіткове (б) представлення оболонки об‘єкта

Ще однією особливістю безсіткових підходів порівняно з МСЕ є різні методи дискретизації головного диференційного рівняння. Деякі дослідники використовують на цьому етапі методи коллокації (сильне формулювання), інші – варіаційну постановку (слабке формулювання), або поєднання обох вказаних підходів (слабо-сильне формулювання). Для інтегрування також застосовується декілька технік, таких, як інтегрування в межах фонової комірки, скінченно-елементної сітки або області підтримки кожного окремого вузла [2].

Наразі існує декілька великих оглядів з використання БМ та історією їх розвитку [2-7]. Найбільш повний опис безсіткових підходів, їх класифікація та приклади розв’язання задач наведені у роботах [1, 8, 9]. **Метою статті** є аналіз методів апроксимації функції форми та інтегрування у безсіткових підходах, їх використання у розв’язанні саме задач механіки твердого тіла, особливостей застосування та визначення можливих напрямів подальших досліджень.

МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ФОРМИ

Головною ознакою та відмінністю БМ є процес апроксимації функції форми, що відбувається повністю базуючись на довільному наборі вузлів. Перевагою функції форми у БМ є те, що можна сконструювати функцію необхідного степеню неперервності. Генерація функцій форми у БМ можлива декількома способами, заснованими на інтегральному представленні (метод згладжених часток SPH, метод відтворення часток ядра RKPM), диференціальному представлені (метод скінчених різниць), представлені у нескінченних рядах (метод рухливих найменших квадратів MLS, метод точкової інтерполяції PIM, метод розбиття одиниці PU) та ін. [1, 5, 7].

Основними способами апроксимації функцій форми у задачах механіки є метод рухливих найменших квадратів (moving least square – MLS) та метод точкової інтерполяції (point interpolation method – PIM), що має декілька варіацій. Ці методи використовують довільний набір вузлів для побудови функцій форми, які зазвичай є фінітними, тобто за межами так званої області підтримки функція форми дорівнює нулю [9].

Метод точкової інтерполяції представляє функцію у вигляді скінченної суми

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i B_i(x),$$

де a_i – невідомі коефіцієнти, $B_i(x)$ – базисні функції. Як базисні розглядають або поліноміальні або радіальні базисні функції (РБФ). Найчастіше у задачах як РБФ використовують мультиквадратичну функцію, гаусіан та інші, або фінітні РБФ, запропоновані Wendland та Wu [9]. Основною перевагою використання РБФ є нескінчена неперервність, що забезпечує можливість генерування дуже гладких розв'язків [10].

При використанні цього методу інтерполяції зростають затрати часу на обчислення функції форми у кожному вузлі, тому актуальною є оптимізація алгоритму, наприклад, як у роботі [11].

Використання як базисних нескінченно-диференційованих функцій з компактним носієм, що є розв'язками функціонально-диференціальних рівнянь спеціального виду, запропоновано у [12]. Такий підхід дозволяє враховувати локальні особливості задач, але має велику залежність точності результату від якості обчислення базисних функцій.

У **методі рухливих найменших квадратів (МРНК)** апроксимація функції має вигляд:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x),$$

де m – число елементів базису, $p_i(x)$ – мономіальні базисні функції, та $a_i(x)$ – числові коефіцієнти, які визначаються з умови мінімуму зваженої дискретної норми L_2 (квадрату різниці між апроксимованим значенням та дійсним). Явний вигляд виразу в матричній формі для обчислення коефіцієнтів буде таким

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) U,$$

де

$$A = \sum_{i=1}^{n} W_i(x) p(x_i) p^T(x_i),$$

$$B = \{W_1(x) p(x_1), W_2(x) p(x_2), \ldots, W_n(x) p(x_n)\}.$$

Важливим моментом при апроксимації методом рухливих найменших квадратів є вибір функції ваги $W_i(x)$, яка повинна відповідати певним вимогам, а саме, бути додатною, монотонно спадною залежно від відстані до носія та мати певний степінь неперервності разом із похідними [9]. Найчастіше як вагові функції використовуються гаусіан та кубічні або квадратичні сплайни [8].

Відмінністю між методами зважених та рухливих найменших квадратів є те, що в першому випадку коефіцієнти a_i є константами, а у другому – функціями. Відповідно апроксимація МРНК є неперервною в усій області, що є важливим при використанні глобального формулювання, а апроксимація методом зважених найменших квадратів – кусково-неперервною, та є частковим випадком МРНК [9].

Перевагою точкової інтерполяції можна назвати відсутність вагової функції. У процесі інтерполяції коефіцієнти відрізняються тим, що в методі точкової інтерполяції вони є числовими, тоді як МРНК – це функції. Також за даними досліджень метод радіальної точкової інтерполяції призводить до більш точних результатів, ніж МРНК або поліноміальної точкової інтерполяції [9]. Найчастіше МРНК застосовується в поєднанні зі слабким формулюванням (така комбінація є основою методу вільних елементів Гальоркіна – EFG), тоді як метод точкової інтерполяції застосовується у поєднанні як зі слабким, так і з сильним формулюванням. Детальне порівняння характеристик функцій форми (фінітність, неперервність, можливість відтворювати базисні функції тощо), отриманих цими методами інтерполяції, повністю наведені у [1, 9], але всі вони відповідають вимогам безсіткового підходу.

Зауважимо, що для інших областей фізики використовуються й інші методи, такі, як метод згладжених гідродинамічних часток (smoothed particle hydrodynamics, SPH), метод hp-хмар та розбиття одиниці. Наприклад, у механіці рідин та газів найчастіше використовується метод SPH та його варіації [13]. Застосування вдосконаленого методу SPH до еліптичних рівнянь з частинними похідними (зокрема задач еластостатики) можна знайти у [14], але таких підхід не є дуже розповсюдженим.

МЕТОДИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ГОЛОВНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

У загальному вигляді рівняння з частинними похідними в області Ω, що обмежена границею Γ, має вигляд

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Для дискретизації цього рівняння найчастіше використовуються сильне формулювання (метод коллокацій) або метод Гальоркіна (будується на слабкому формулюванні або варіаційному принципі) [3].

Сильне формулювання використовує РБФ для розв’язання рівнянь з частинними похідними шляхом застосування відповідного диференційного оператора до РБФ та методу коллокацій до певного набору вузлів області розв’язання та її границі. У несиметричному варіанті застосування диференційного оператора відбувається на множині вузлових точок області та її границі, а в симетричному – до послідовного застосування до кожної пари «точка коллокації – центр РБФ» [10]. Сильне формулювання є ефективним та дуже легким у програмуванні, але часто призводить до недостатньо обумовлених матриць, що потребує додаткових інструментів виправлення [9]. Використання РБФ для розв’язання рівнянь з частинними похідними в сильному формулюванні досліджено у роботах [15], а у [10] наведені приклади застосування цього підходу до лінійних та нелінійних задач механіки, а саме для аналізу балок на пружній основі, аналізу пружних нестабільних навантажень, аналізу пошкоджень залізобетонної балки та вигину тонкої пластини на пружній основі.

Актуальними також є роботи українських вчених в області дослідження безсіткових підходів. У роботі [12] детально описаний безсітковий алгоритм розв’язання крайової задачі для рівняння Лапласа з використанням атомарних РБФ, основою якого є сильне формулювання. Використання цього підходу до розв’язання задач механіки потребує додаткових досліджень і є досить перспективним.

Використання **слабкого формулювання** дуже схоже на МСЕ – у варіаційну постановку задачі підставляються обрані функції форми, та отримуємо загальне слабке формулювання.

Обчислення інтегралу може проводитись різними способами, а саме вузлове інтегрування (локальне слабке формулювання), інтегрування в межах фонової комірки (глобальне слабке формулювання) або з використанням фонової скінчено-елементної сітки [3]. Глобальне слабке формулювання використовує інтегрування в межах всієї області та її границі, тоді як локальне базується на розбитті проблемної області на локальні підобласті, що перетинаються і в межах яких відбувається інтегрування [5].

Детальний опис різних модифікацій БМ з прикладами програм представлений у роботі [9]. Серед розглянутих задач є статичні та динамічні задачі пружності. Для дискретизації використовується як слабке формулювання (і глобальне, і локальне), так і сильне формулювання та їх поєднання. Досліджується поведінка базисних функцій залежно від обраних параметрів, а також збіжність методів залежно від розміру області підтримки.

Багатогранною є робота [1], що висвітлює різні безсіткові підходи. Основну увагу автор приділяє статичним та динамічним задачам пружності у слабкому та ослаблено-слабкому (weakened-weak) формулюванні, яке поєднує в одному процесі ключові підходи безсіткових методів та методу скінченних елементів. Подальшим розвитком такого підходу є метод згладжених скінчених елементів, що описаний у [16]. Для апроксимації базисних функцій застосовується метод рухливих найменших квадратів та метод точкової інтерполяції з його різновидами, що використовують різні схеми вибору вузлів. Окремо розглянуті особливості застосування БМ до балок, пластин та оболонок. У цій роботі проведені дослідження впливу параметрів базисних функцій на результат.

У роботі [8] автори приділяють увагу використанню БМ для аналізу статичних та динамічних задач пружності, задач пластичності (високошвидкісне зіткнення, контактні задачі та розповсюдження тріщин). У чисельних прикладах використовується слабке формулювання та апроксимація методом найменших рухливих квадратів.

Підходи, що використовують глобальне слабке формулювання в задачах лінійної пружності, наведені у роботі [2]. Основну увагу автори приділяють проблемам реалізації згаданих підходів. Також, автори дійшли висновку, що для задач з малими деформаціями більш точним способом отримання дискретних рівнянь є інтегрування з використанням фонової комірки. У цій роботі наведені також техніки врахування розривів різного типу.

Використання слабкого формулювання в моделюванні великих деформацій тонких оболонок наведені у роботі [17]. Великі деформації в задачах обробки металу тиском розглянуті в [18]; автори використовують локальне слабке формулювання та РБФ як базисні функції.

Наведені вище методи дискретизації головного рівняння є основними, але чимало дослідників у пошуках найбільш вдалого безсіткового алгоритму поєднують обидва підходи. Прикладом такого підходу є техніка, описана у роботі [19], що займає окреме місце та має назву Meshlees Local Petrov-Galerkin (MLPG). Перевагою такого підходу є відсутність необхідності будь-яких фонових комірок. Авторами цього методу запропонований ефективний спосіб для розв’язання задач пружності, який незалежно апроксимує переміщення та напругу із застосуванням однакових функцій форм, подібно до методу скінчених об’ємів. Слабке формулювання використовується у вузлах, а метод коллокацій – для напруг. У процесі апроксимації використовується метод найменших рухливих квадратів, наприклад, до задач моделювання оболонок [20].

У роботі [21] наведені чисельні результати тестових задач механіки деформівного тіла, які отримані із застосуванням цікавого підходу, що поєднує безсітковий підхід та скінченно-різницевий. РБФ використовуються для апроксимації просторових похідних, визначених на локальних шаблонах.

Безсітковий підхід також вдало використовується для розрахунків напружено-деформівного стану в контактних задачах. Російські автори (М.В. Попков та ін.) у серії своїх робіт використовували енергетичне формулювання задачі. Як базисні функції використовувалась звичайна експоненціальна залежність [22].

Досліджені роботи підтверджують більшу розповсюдженість слабкого формулювання у розв’язанні задач механіки, що обумовлено достатньою точністю результатів та більшою гнучкістю у розробці специфічних підходів. На противагу цьому, сильне формулювання є простішим у програмуванні та для деяких задач дає набагато кращі результати, але за дослідженнями призводить іноді до погано обумовлених систем, тому вимагає більш ретельного етапу підготовки.

ВИСНОВКИ

У статті подається стислий огляд робіт, які застосовують безсіткові підходи до розв’язання задач механіки. Розповсюдженими методами апроксимації базисних функцій є метод радіальної точкової інтерполяції та МРНК. Обидва методи досить прості в реалізації, але МРНК передбачає вибір вагової функції та зазвичай застосовується разом зі слабким формулюванням. Метод радіальної точкової інтерполяції вдало використовується як і з сильним формулюванням, так і разом зі слабким. Перевагою сильного формулювання є простота реалізації, але слабке формулювання є більш гнучким у розробці різних модифікацій та поєднанні зі скінченно-елементним підходом. Точність результатів в обох підходах певною мірою залежить від обраного методу та параметрів базисних функцій. Перспективним напрямком розвитку БМ у задачах механіки є застосування специфічних базисних функцій та оптимізація алгоритму чисельного розв’язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Liu G. R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – 2nd ed. – CRC PressTaylor & Francis Group, 2010. – 792 p.

2. Nguyen V. P. Meshless methods: A review and computer implementation aspects / V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot // Mathematics and Computers in Simulation. – 2008. – N 79. – P. 763-813.

3. Belytschko T. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments / T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – Vol. 139. – P. 3-47.

4. Li Sh. Meshfree and particle methods and their applications. // Sh. Li, W. K. Liu // Applied Mechanics Reviews. – 2002. – Vol. 55(1). – P. 1-34.

5. Fries Th. P. Classification and Overview of Meshfree Methods / Th.-P. Fries, H. G. Matthies. – Technical University Braunschweig, 2004. – 122 p.

6. Колодяжный В. М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В. М. Колодяжный, О. Ю. Лисина // Пробл. машиностроения. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 67-74.

7. Daxini S. D. A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications. [Electronic resource] / S. D. Daxini, J. M. Prajapati // The Scientific World Journal. – 2014. – Mode of access: http://dx.doi.org/10.1155/2014/247172.

8. Chen Y. Meshless Methods in Solid Mechanics / Y. Chen, J. D. Lee, A. Eskandarian. – Verlag New York : Springer, 2006. – 210 p.

9. Liu G. R. Anintroduction to meshfree methods and their programming / G. R. Liu, Y. T. Gu. – Springer, 2005. – 496 p.

10. Tiago C. M. Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems / C. M. Tiago, V. M. A. Leit˜ao // Computers and Mathematics with Applications. – 2006. – Vol. 51. – P. 1311-1334.

11. Nakata S. An Efficient Scheme for Meshless Analysis Based on Radial Basis Functions / S. Nakata // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM). – 2009. – Vol. 4, no. 3-4. – P. 193-201.

12. Колодяжный В. М. Атомарные радиально базисные функции в численных алгоритмах решения краевых задач для уравнения Лапласа / В. М. Колодяжный, В. А. Рвачев // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 4. – С. 165-178.

13. Liu M. B. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments / M. B. Liu, G. R. Liu // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2010. – Vol. 17. – Iss. 1. – P. 25-76.

14. Batra R. C. SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations / R. C. Batra, G. M. Zang // Computational Mechanics. – 2008. – No. 41. – P. 527-545.

15. Sarra S. A. Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations / S. A. Sarra, E. J. Kansa // Advances in Computational Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – 220 p.

16. Liu G. R. A smoothed finite element method for mechanics problems / G. R. Liu, K. Y. Dai, T. T. Nguyen // Computational Mechanics. – 2007. – No. 39. – P. 859-877.
17. Li S. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods / S. Li, W. Hao, W. K. Liu // Computational Mechanics. – 2000. – No. 25. – P. 102-116.
18. Gu Y. T. An advanced meshless technique for large deformation analysis of metal forming / Y. T. Gu, C. Yan, P. K. D. V. Yarlagadda // 9th Global Congress on Manufacturing and Management, 12-14th November, 2008, Gold Coast, Australia.
19. Alturi S. N. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems / S. N. Alturi, H. T. Liu, Z. D. Han // CMES. – 2006. – Vol. 14, no. 3. – P. 141-152.
20. Jarak T. Meshless numerical formulation for analasys of shell-like structures / T. Jarak // Doctoral thesis. – University of Zagreb, 2010. – 232 p.
21. Толстых А. И. Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций / А. И. Толстых, Д. А. Широбоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 8. – С. 1498-1505.
22. Попков М. В. Бессеточный метод и его применение для расчета напряженно-деформированного состояния упругой матрицы при штамповке элестичными средами / М. В. Попков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 4. – С. 3-14.

REFERENCES

1. Liu, G.R. (2010), “Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method”, *2nd ed. CRC PressTaylor & Francis Group*.
2. Nguyen, V.P., Rabczuk, T., Bordas, S. and Duflot, M. (2008), “Meshless methods: A review and computer implementation aspects”, *Mathematics and Computers in Simulation*, no. 79, pp. 763-813.
3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. (1996), “Meshless Methods: An Overview and Recent Developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47.
4. Li, Sh. and Liu, W.K. (2002), “Meshfree and particle methods and their applications”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55(1), pp. 1-34.
5. Fries, Th.-P. and Matthies, H.-G. (2004), “Classification and Overview of Meshfree Methods”, *Technical University Braunschweig*, 122 p.
6. Kolodiazhnyi, V.M. and Lysyna, O.Iu. (2010), “Meshless methods in physical processes modeling problems”, *Probl. Mashinostroeniya*, vol. 13, no. 3, pp. 67-74.
7. Daxini, S.D. and Prajapati, J.M. (2014), “A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications”, *The Scientific World Journal*, available at: http://dx.doi.org/10.1155/2014/247172 (access March 1, 2016).
8. Chen, Y., Lee, J.D. and Eskandarian, A. (2006), “Meshless Methods in Solid Mechanics”, Springer, Verlag New York.
9. Liu, G.R. and Gu, Y.T. (2005), “An introduction to meshfree methods and their programming”, Springer.
10. Tiago, C.M. and Leit˜ao, V.M.A. (2006), “Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems”, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 51, pp. 1311-1334.
11. Nakata, S. (2009), “An Efficient Scheme for Meshless Analysis Based on Radial Basis Functions”, *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*, vol. 4, no. 3-4, pp. 193-201.
12. Kolodiazhnyi, V.M. and Rvachov, V.A. (2008), “Atomic radial basis functions in numerical algorithms for boundary value problems with the Laplace equation”, *Kibernetika i sistemnyiy analiz*, no. 4, pp. 165-178.
13. Liu, M.B. and Liu, G.R. (2010), “Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, issue 1, pp. 25-76.

14. Batra, R.C. and Zang, G.M. (2008), "SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations", *Computational Mechanics*, no. 41, pp. 527-545.

15. Sarra, S.A. and Kansa, E.I. (2009), "Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations", *Advances in Computational Mechanics*, vol. 2, 220 p.

16. Liu, G.R., Dai, K.Y. and Nguyen, T.T. (2007), "A smoothed finite element method for mechanics problems", *Computational Mechanics*, no. 39, pp. 859-877.

17. Li, S., Hao, W. and Liu, W.K. (2000), "Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods", *Computational Mechanics*, no. 25, pp. 102-116.

18. Gu, YuanTong, Yan, Cheng and Yarlagadda, Prasad K. (2008), *"An advanced meshless technique for large deformation analysis of metal forming"*, 9th Global Congress on Manufacturing and Management, 12-14th November, 2008, Gold Coast, Australia.

19. Alturi, S.N., Liu, H.T. and Han, Z.D. (2006), "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems", *CMES*, vol. 14, no. 3, pp. 141-152.

20. Jarak, T. (2010), "Meshless numerical formulation for analasys of shell-like structures", *Doctoral thesis*, University of Zagreb.

21. Tolstyih, A.I. and Shirobokov, D.A. (2005), "Meshfree method based on radial basis functions", *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 45, no. 8, pp. 1498-1505.

22. Popkov, M.V. (2013), "Meshfree method and its application for determining stress-strain state of elastic matrix for stamping by elastic medium", *Izvestiya vyisshih uchebnyih zavedeniy. Mashinostroenie*, no. 4, pp. 3-14.

УДК 539.3

ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З АРМУВАННЯМ ДВОМА СОРТАМИ ОДНОСПРЯМОВАНИХ ВОЛОКОН

Гребенюк С. М., к. т. н., доцент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

gsm1212@ukr.net

Запропоновано підхід до визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композита, армованого періодичною системою двох волокон. У матеріалі виокремлюються області гексагональної форми, що містять матеріал одного з сортів волокон та оточуючу його матрицю, так щоб ці області покривали увесь композит. Отримуємо два типи областей, що містять відповідно перший сорт волокна і другий сорт волокна. Для кожної з цих областей проводимо процедуру гомогенізації волокнистого композиту. В результаті неоднорідний матеріал, що містить матрицю та волокно, представляємо однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом, пружні властивості якого визначаються п'ятьма сталими. За такої гомогенізації матеріал представляється сукупністю двох типів областей з трансверсально-ізотропними властивостями. Для цього матеріалу також проводимо процедуру гомогенізації. У результаті отримуємо однорідний трансверсально-ізотропний матеріал, який описує механічну поведінку композита, армованого двома сортами односпрямованих волокон. Розроблений підхід застосовано до визначення ефективних пружних сталих волокнистого композита, армованого одним сортом волокна, але представленого як трикомпонентний – матриця та два сорти волокна. Порівняння з чисельними результатами, отриманими за співвідношеннями інших авторів, дають добру збіжність. Для повздовжніх характеристик цей збіг повний, а для поперечних – якісна картина однакова, а значення мають незначні відмінності.

Ключові слова: волокнистий композит, ефективні пружні сталі, матриця, трансверсально-ізотропний матеріал.