УДК 519.83

ОБ ОЦЕНКАХ МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Козин И. В., д. ф.-м. н., профессор, Зиновеева М. И., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Рассматривается биматричная игра, не имеющая точек равновесия по Нэшу. Предложен способ определения меры близости между биматричной игрой без равновесной точки и биматричной игрой с точкой равновесия. Предложен механизм, который по заданной матрице игры позволяет построить ближайшую к ней, в смысле манхеттенской метрики, игру с точкой равновесия. Найдены оценки для меры неопределенности биматричной игры.

Ключевые слова: биматричная игра, точка равновесия, мера неопределенности, равновесие Нэша, манхеттенская метрика.

ПРО ОЦІНКИ МІРИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ БІМАТРИЧНОЇ ГРИ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Зіновєєва М. І., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Розглядається біматричних гра, яка не має точок рівноваги Неша. Запропоновано спосіб визначення міри близькості між біматричною грою без рівноважної точки і біматричною грою з точкою рівноваги. Запропоновано механізм, який по заданій матриці гри дозволяє побудувати найближчу до неї, у сенсі манхеттенської метрики, гру з точкою рівноваги. Знайдено оцінки для міри невизначеності біматричної гри.

Ключові слова: біматрична гра, точка рівноваги, міра невизначеності, рівновага Неша, манхеттенська метрика.

ABOUT UNCERTAINTY MEASURE'S ASSESMENT OF BIMATRIX GAME

Kozin I. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Zinovieieva M. I., Graduate Student

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

ainc00@gmail.com, zinoveeva92@mail.ru

Game theory is a powerful tool for modeling strategic interactions in a system where different parties need to act and react at the same time , anticipating the appropriate response to each other. Using models of game theory can be described by a wide range of problems in life and human activities. For example, the unregulated market can be studied by the theory of Nash equilibrium [1, 2, 4]. The main disadvantage of the concept of equilibrium is that there is seldom enough. Matrix games can be solved on the basis of the algorithm, which follows from an algebraic proof of the theorem minimax given in [3]. Class bimatrix games much wider class of matrix (a variety of new simulated conflict situations is very noticeable), and thus inevitably increases and difficulties encountered by their successful resolution. Every bimatrix game has at least one equilibrium situation (the balance point) in mixed strategies.

The problem of finding equilibria in games bimatrix considered by all researchers in two aspects: the search for a balance of the situation and search for all equilibrium situations in order to highlight the best of a variety of situations, those that satisfy the additional conditions (strong equilibrium, perfect balance, and others.). The question arises: how different arbitrary bimatrix play the game to the point of equilibrium? We consider bimatrix game has no Nash equilibrium points. A method for determining the measure of proximity between bimatrix games. A mechanism that, given the matrix of the game allows you to build the closest to it , in the sense of the Manhattan metric , the game with a point of equilibrium.

Key words: bimatrix game, equilibrium point, a measure of uncertainty, the Nash equilibrium, the manhattan metric.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из самых важных сторон человеческой деятельности является проблема принятия решений. В большинстве случаев выбор приходиться принимать в условиях конфликта. Именно изучением различных видов конфликтных ситуаций и занимается математическая теория игр. Каждый из участников конфликта стремится повлиять на ход ситуации в своих собственных целях, т.е. целью каждого участника любой матричной игры является нахождение наиболее выгодной стратегии, обеспечивающей одному игроку максимальный выигрыш, а другому игроку минимальный проигрыш [3]. Используя модели математической теории игр, можно описать большое количество ситуаций, которые возникают в деятельности и жизни человека. Это является одним из основных подтверждений актуальности этого исследовательского направления. Теория игр – это один из основных способов моделирования стратегий в различных системах, в которых участники должны принимать решения, опережая соответствующие действия друг друга.

Для большинства типов игр предложены различные типы оптимальности и выделены их свойства [5-12]. Но классическими понятиями оптимальности являются равновесия Нэша, в случае которого ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша. Известно множество уточнений равновесия по Нэшу: изолированное равновесие, регулярное равновесие, строго собственное равновесие и ряд других. Теорема Нэша обеспечивает существование равновесных ситуаций, но не метод их нахождения. Математически довольно сложно их отыскать, но для довольно простых видов игр, таких как биматричные например, решения есть.

Именно поэтому в статье рассматривается биматричная игра с конечным числом стратегий. Данный вид задач является первым по сложности обобщением матричных игр. Под понятием равновесие будет подразумеваться равновесие по Нэшу без дополнительных условий. В статье предлагается механизм, позволяющий от задачи, которая не имеет решения в чистых стратегиях перейти к новой задаче, которая имеет решение в чистых стратегиях. При этом платежная матрица новой задачи «наиболее близка» к платежной матрице исходной задачи по некоторому критерию.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории игр наиболее простой моделью является матричная игра двух лиц [13]. Кооперативную игру двух лиц будем задавать матрицей вида:

$$A=\left(\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right)_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=m}.$$

Здесь n – число стратегий 1-го игрока и m – число стратегий 2-го игрока, a_{ij}, b_{ij} – соответственно выигрыши первого и второго игроков при выборе первым игроком стратегии i, а вторым – стратегии j.

Определим расстояние между играми, заданными соответственно матрицами $A=\left(\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right)_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=m}$ и $A'=\left(\left(a'_{ij},b'_{ij}\right)\right)_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=m}$, следующим образом:

$$\rho\left(A,A'\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}-a'_{ij}\right|.$$

В соответствии с [15] будем называть мерой неопределенности матричной игры двух лиц расстояние между этой игрой и множеством игр с седловой точкой, то есть множеством игр, заданных матрицами вида $A=\left(\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right)_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=m}$, для которых найдется пара индексов i_0, j_0 таких, что

$$a_{i_0 j_0}=\max_i \min_j a_{ij}, \quad b_{i_0 j_0}=\max_i \min_j b_{ij}\,.$$

Задача настоящей статьи состоит в отыскании верхней оценки меры неопределенности матричных игр двух лиц.

Рассмотрим сначала игру двух лиц размерности $n\times 1$, в которой у первого игрока n стратегий, а у второго игрока стратегия единственная. Такая игра задается n-мерным вектором, каждая координата которого представляет собой пару $\left(a_i,b_i\right)$, где координаты векторов $a=\left(a_i\right)$, $b=\left(b_i\right)$ – соответственно выигрыши 1-го и 2-го игроков при выборе первым игроком стратегии с номером i. Наличие седловой точки в этой игре означает, что $\max\limits_i a_i$ и $\max\limits_i b_i$ достигаются при одном и том же номере $i=i_0$. Пусть седловая точка в игре отсутствует, то есть $\max\limits_i a_i=a_{i_0}$, $\max\limits_i b_i=b_{j_0}$ и $i_0\neq j_0$.

Обозначим через r_0 меру неопределенности рассматриваемой игры.

Теорема 1. Имеет место неравенство

$$r_0\le \min\left\{a_{i_0}-a_{i_1},b_{i_1}-b_{i_0}\right\}.$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что для того, чтобы рассматриваемая игра стала игрой с седловой точкой достаточно поменять местами координаты i_0, i_1 в векторе выигрышей a или в векторе выигрышей b.

Покажем, что эту оценку можно улучшить. Для этого рассмотрим отдельно вектор $c=\left(c_i\right)_{i=1}^{i=n}$, для которого $\max\limits_i c_i=c_{i_0}$. Задача состоит в следующем: изменить координаты вектора c таким образом, чтобы максимальная координата заняла место с номером j_0.

Упорядочим координаты вектора c по возрастанию координат. Получим

$$c_{i_1}\le c_{i_2}\le\ldots\le c_{i_k}=c_{j_0}\le\ldots c_{i_n}=c_{i_0}\,.$$

Очевидно, чтобы координата с номером j_0 стала максимальной, достаточно изменить координаты с номерами $i_k,i_{k+1},\ldots,i_n$. При этом можно либо увеличить все координаты $c_{i_k},c_{i_{k+1}},\ldots,c_{i_n}$ до величины c_{i_0}, либо уменьшить эти координаты до величины c_{j_0}, либо увеличить первые s из них и уменьшить оставшиеся до некоторой величины $z\in\left[c_{i_s},c_{i_{s+1}}\right]$. Величина минимальных изменений координат определяется как

$$\sigma\left(c,j_0\right)=\min_{z\in\left[c_{i_s},c_{i_{s+1}}\right]}\left\{\left(\sum_{q=s+1}^{n}c_{i_q}-\sum_{q=k}^{s}c_{i_q}\right)+\left(2s-k-n+1\right)z\right\}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n\times 1$ справедливо неравенство $r_0\le\min\left\{\sigma\left(a,j_0\right),\sigma\left(b,i_0\right)\right\}$.

Перейдем теперь к общему случаю игры двух лиц с матрицей $A=\left(\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right)_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=m}$. Как и прежде, обозначим меру неопределенности этой игры r_0, определим два вектора

$$p=\left(p_i\right)_{i=1}^{n},\quad p_i=\min_{1\le j\le m}a_{ij}\quad \text{и}\quad q=\left(q_i\right)_{i=1}^{n},\quad q_i=\min_{1\le j\le m}b_{ij}.$$

Пусть $p_0=\max\limits_{1\le i\le n}p_i=\max\limits_{1\le i\le n}\min\limits_{1\le j\le m}a_{ij}=a_{i_0j_0}$ и $q_0=\max\limits_{1\le i\le n}q_i=\max\limits_{1\le i\le n}\min\limits_{1\le j\le m}b_{ij}=q_{k_0l_0}$. Рассмотрим случай, когда $i_0=k_0,\ \ j_0\ne l_0$. То есть максимин для двух игроков достигается в одной и той же строке, но в разных столбцах соответствующих матриц. Упорядочим элементы строки i_0 в матрице $a=\left(a_{ij}\right)$ по возрастанию. Пусть $p_0=a_{i_0j_0}=a_{i_0j_1}\le a_{i_0j_2}\le\ldots\le a_{i_0j_k}=a_{i_0l_0}\le\ldots a_{i_0j_m}$.

Для достижения седловой точки в игре достаточно уменьшить все элементы $a_{i_0j_0}=a_{i_0j_1},a_{i_0j_2},\ldots,a_{i_0j_k}=a_{i_0l_0}$ до величины $a_{i_0j_0}$. Положим $\tau\left(a,i_0\right)=\sum\limits_{s=1}^{k}a_{i_0j_s}-ka_{i_0j_0}$. Аналогично определим величину $\tau\left(b,i_0\right)$ для матрицы $b=\left(b_{ij}\right)$.

Таким образом, приходим к следующей оценке меры неопределенности в рассматриваемом случае:

Теорема 3. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n\times m$, в которой строки максимина двух игроков совпадают, справедливо неравенство $r_0\le\min\left\{\tau\left(a,i_0\right),\tau\left(b,i_0\right)\right\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $i_0\ne k_0,\ \ j_0\ne l_0$. Сначала увеличим элементы строки с номером k_0 в матрице $a=\left(a_{ij}\right)$ так, чтобы минимальный элемент в этой строке сравнялся с числом p_0. Величина такого изменения определяется числом

$$\omega\left(a,k_0\right)=\sum_{j=1}^{m}\max\left(a_{k_0j}-a_{i_0j_0},0\right).\tag{1}$$

Обозначим преобразованную матрицу a'. Минимакс в матрицах a' и b достигается в одной и той же строке с номером k_0. Воспользовавшись утверждением теоремы 3, приходим к следующей теореме.

Теорема 4. Для меры неопределенности матричной игры двух лиц размерности $n\times m$, в которой строки максимина двух игроков совпадают, справедливо неравенство $r_0\le\min\left\{\tau\left(a',k_0\right)+\omega\left(a,k_0\right),\ \tau\left(b',i_0\right)+\omega\left(b,i_0\right)\right\}$.

АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ИГРЕ С ТОЧКОЙ РАВНОВЕСИЯ

В отличие от игр с нулевой суммой, игры с ненулевой суммой уже не подразумевают обязательность выигрыша одного из участников и проигрыша другого; скорее наоборот – возможен вариант одновременного выигрыша или проигрыша. А так как интересы игроков уже не полностью противоположны, то их поведение становится более разнообразным. Если же в игре с нулевой суммой игрокам было невыгодно информировать друг друга о своей стратегии, поскольку это могло значительно уменьшить собственный выигрыш, то в игре с ненулевой суммой ситуация меняется и становится полезным координировать свои действия с партнером или каким-либо способом влиять на его действия.

Пусть i_0 – оптимальная стратегия для первого игрока, j_1 – оптимальная стратегия для второго игрока. Если значение выигрыша первого игрока находится в точке $a_{i_0 j_1}$, а второго игрока – $b_{i_1 j_1}$, то игра уже имеет точку равновесия. В противном случае положим, что функцией выигрыша первого игрока является $a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij}$, а для второго $b_{i_1 j_1} = \max_i \min_j b_{ij}$. Таким образом, седловые точки для игроков находятся в разных строках и столбцах. Рассмотрим вначале выигрыш первого игрока. Наложим на элементы a_{ij} строки i_0 штраф, величина которого равна (1), таким образом, чтобы элемент $a_{i_0 j_0}$ совпадал с элементом $a_{i_0 j_1}$. После данных преобразований седловые точке первого и второго игроком находятся в разных строках, но в одном столбце. Аналогичным образом накладываем штраф на элементы b_{ij} столбца j_1, величина которого равна

$$\psi\left(l_0, b\right) = \sum_{i=1}^{n} \max\left(0, b_{i_1 l_0} - b_{i_1 j_1}\right).$$

В результате преобразований седловые точки двух игроков совпадут на пересечение строки i_1 и столбца j_1.

ВЫВОДЫ

Актуальность данной статьи обусловлена тем, что теория игр в настоящее время активно применяется ко многим направлениям нашей жизни, но еще недостаточно разработана. Методы в теории игр дают возможность просчитывать возможный вариант получения прибыли, определения наиболее лучших шагов, а также определение поведения и действий оппонентов. В статье рассмотрено понятие меры неопределенности для биматричной игры, предложен алгоритм перехода от игры с отсутствующей точкой равновесия к самой ближайшей к ней новой биматричной игре с равновесной точкой. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании экономических ситуаций, связанных с поведением экономических агентов в конфликтных и безконфликтных ситуациях, при создании систем с адаптивным управлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
2. Handbook of Game Theory / Ed. by R. J. Aumann and S. Hart. – 2002. – Vol. 3.
3. Данилов В. И. Лекции по теории игр / В. И. Данилов. – М. : Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.
4. Lemke C. E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming / C. E. Lemke // Management science. – 1965. – Vol. 11, №7. – P. 681-689.
5. Безруков А. Б. Прикладная теория игр : учебное пособие / А. Б. Безруков, С. С. Саитгараев. – Челябинск : Изд-во Челябинского Госуниверситета, 2001. – 128 с.
6. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов и кибернетиков / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1985. – 272 с.
7. Петросян Л. А. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость / Л. А. Петросян, Д. В. Кузютин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2000. – 292 с.
8. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций / И. Д. Протасов. – М. : Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

9. Стрекаловский А. С. Введение в теорию игр : учебное пособие / А. С. Стрекаловский. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2003. – 124 с.
10. Mangasarian O. L. Two-person nonzero games and quadratic programming / O. L. Mangasarian, H. Stone // Journal of mathematical analisis and applications. – 1964. – № 9. – P. 348-355.
11. Raghavan T. E. S. Non zero-sum two person games / T. E. S. Raghavan. Ed.by R. J. Aumann and S. Hart // Handbook of Game Theory. – 2002. — Vol. 3.
12. Vermeulen A. J. On the set of perfect equilibria of bimatrix games / A. J. Vermeulen, M. J. M. Jansen // Naval research logistics quarterly. – 1994. – Vol. 41. – P. 295-302.
13. Сурмин Ю. П. Теория систем и системный анализ : учебное пособие / Ю. П. Сурмин. – К. : МАУП, 2003. – 368 с.
14. Таха Х. Введение в исследование операций (Книга 2) / Х. Таха. – М. : Мир, 1985. – 496 с.
15. Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. / редкол. О. М. Кісельова (відп. ред.) та ін. – Д. : Вид-во «Ліра», 2014. – С. 105-111.

REFERENCES

1. Karmanov, V.G. (1986), *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming], Nauka, Moskow, Russia.
2. Aumann, R.J. and Hart, S. (2002), “Handbook of Game Theory”, North-Holland, Amsterdam, Netherlands.
3. Danilov, V.I. (2002), *Lektsii po teorii igr* [Lectures on Game Theory], Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola, Moskow, Russia.
4. Lemke, C.E. (1965), “Bimatrix equilibrium points and mathematical programming”, *Management science*, vol. 11, no. 7, pp. 681-689.
5. Bezrukov, A.B. and Saitgaraev, S.S. (2001), *Prikladnaya teoriya igr. Uchebnoe posobie* [Applied game theory. Training manual], Izd-vo Chelyabinskogo Gosuniversiteta, Chelyabinsk, Russia.
6. Vorobev, N.N. (1985) *Teoriya igr dlya ekonomistov i kibernetikov* [Game theory for economists and cybernetics], Nauka, Moskow, Russia.
7. Petrosyan, L.A. and Kuzyutin, D.V. (2000) *Igry v razvernutoi forme: optimalnost i ustoichivost* [Games in extensive form: optimality and stability], Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, Sankt-Peterburg, Russia.
8. Protasov, I.D. (2003), *Teoriya igr i issledovanie operatsiy* [Game theory and operations research], Gelios ARV, Moskow, Russia.
9. Strekalovskiy, A.S. (2003), *Vvedenie v teoriyu igr. Uchebnoe posobie* [Introduction to the theory of games. Training manual], Izd-vo IGU, Irkutsk, Russia.
10. Mangasarian, O.L. and Stone, H. (1964), “Two-person nonzero games and quadratic programming”, *Journal of mathematical analisis and applications*, vol. 9, pp. 348-355.
11. Raghavan, T.E.S. (2002), “Non zero-sum two person gams”, North-Holland, Amsterdam, Netherlands.
12. Vermeulen, A.J. and Jansen, M.J.M. (1994), “On the set of perfect equilibria of bimatrix games”, *Naval research logistics quarterly*, vol. 41, pp. 295-302.
13. Surmin, Yu.P. (2003), *Teoriya sistem i sistemnyiy analiz: Ucheb. posobie* [heory and system analysis: Textbook. allowance], MAUP, Kiev, Ukraina.
14. Taha, H. (1985), *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction to operations research], Mir, Moskow, Russia.
15. Zinoveeva, M.I. (2014), “Pitannya prikladnoYi matematiki I matematichnogo modelyuvannya”, *zb. Nauk. pr.*, pp. 105-111.