

УДК 533.6.013.42

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ КОЛЬЦЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, Джуха Ю. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Выведено частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний упругих оснований в виде кольцевых пластин и тяжелой идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные случаи закрепления контуров кольцевых пластин, различные предельные случаи вырождения кольцевых пластин в круговые, в мембраны, в абсолютно жесткие пластины, а также случай отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы проведены и проанализированы численные исследования.

Ключевые слова: гидроупругость, кольцевые упругие пластины, идеальная жидкость, осесимметричные колебания.

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОСНОВ ТА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ КІЛЬЦЕВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, Джуха Ю. О., аспірант

*Донецький національний університет,
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Виведене частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ у вигляді кільцевих пластин і важкої ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі. Розглянуті різні випадки закріплення контурів кільцевих пластин, різні межові випадки виродження кільцевих пластин у кругові, у мембрани, в абсолютно жорсткі пластины, а також випадок відсутності верхньої пластини (випадок рідини з вільною поверхнею). Для широкого кола параметрів механічної системи, що розглядається, проведені та проаналізовані чисельні дослідження.

Ключові слова: гідропружність, кільцеві пружні пластины, ідеальна рідина, осесиметричні коливання.

AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC BASES AND IDEAL LIQUID IN A RIGID ANNULAR CYLINDRICAL TANK

Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Dzhukha Yu. O., postgraduate

*Donetsk National University,
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com, yu.djukha@donnu.edu.ua

Interest in axisymmetric vibrations of elastic bases and liquid in an annular cylindrical tank is connected with the need to take into account vibrations of a liquid column between elastic bases. This is not necessary in the case of asymmetric vibrations of liquid in axisymmetric tank.

Right annular cylindrical tank with elastic bases contains a heavy liquid. The bases are modeled by isotropic thin annular plates. It is considered three types of fixing of outer and inner contours: clamped, simply supported and free edge. The plates are under an action of tensile forces acting on a middle surface. It is assumed that the liquid is ideal, homogeneous and incompressible. The movement of the liquid is potential. The problem is considered in the linear formulation. Plates' bending problem is represented as a sum of static and dynamic bending. Spectral problem is represented as a system of two inhomogeneous biharmonic equations. These equations govern coupled vibrations of plates and liquid. The general solution to each equation is the sum of the general solution of the related homogeneous equation and the particular solution. Mechanical parameters of the plate and the density of the liquid define the general solution of the homogeneous equation which contains an unknown frequency.

Particular solution of the inhomogeneous equation takes the form of a series expansion in the eigenfunctions of ideal liquid vibrations in the annular cylindrical tank.

From the condition of fixing of outer and inner contours of the plates, compatibility condition and condition of incompressibility of the liquid follows the frequency equation of natural joint axisymmetric vibrations of the elastic bases and the ideal liquid. In general this transcendental equation takes the form of a determinant of the ninth order. In general terms, the frequency spectrum of equation consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of upper and lower elastic bases. In the absence of gravity frequency equation is symmetrical referred to the upper and lower bases. On the basis of analytical and numerical investigations it may be concluded that:

1. The frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of upper and lower elastic bases;
2. Under zero gravity axisymmetric vibrations are absent if the plates are massless or if one plate is absolutely rigid and another one is massless;
3. If the liquid has a free surface, then the frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to vibrations of the free surface and the elastic bottom. In a wide variation range of parameters of the mechanical system takes place a weak change of the first set of frequencies and a significant change of the second set of frequencies as well:
 - 3.1. In most cases the first frequency of the second set depends on the dimensionless rigidity almost linearly;
 - 3.2. The frequencies of the first set decrease slightly, and the frequencies of the second set decrease significantly when the depth of filling increase;
 - 3.3. The frequencies of the second set in the case of the fixed outer and free inner contours and sufficiently small inner radius are closely equal to the corresponding frequencies in the case of a circular cylinder;
 - 3.4. The series of the frequency equation converge fast enough. The time of finding solution of the frequency equation greatly goes up with an allowance for mass characteristics of the plates.

Key words: hydroelasticity, annular elastic plates, ideal liquid, axisymmetric vibrations.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья обобщает результаты работы [1], в которой рассматривалась задача о совместных осесимметричных колебаниях упругих круговых оснований прямого кругового цилиндра и идеальной жидкости, на случай кольцевого цилиндра, кольцевых оснований и различных способов закрепления внешних и внутренних контуров.

Наиболее полный обзор литературы приведен в [1]. Отметим только последние основные публикации. В статье [2] рассмотрены осесимметричные колебания заземленного упругого кольцевого основания жесткого прямого кольцевого цилиндра и идеальной жидкости со свободной поверхностью. В линейной постановке динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью исследована в [3]. Наиболее полная постановка задачи о колебаниях упругих оснований и идеальной жидкости дана в работе [4], а в статье [5] она обобщена на случай двухсвязного цилиндрического сосуда и двухслойной жидкости. В указанных выше статьях [3-5] осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости не были рассмотрены. С позиции функционального анализа задача о колебаниях жидкости между упругими основаниями в жестком круговом цилиндрическом резервуаре была рассмотрена в [6]. Из последних зарубежных работ, близких по тематике, следует отметить статьи [7-9], в которых рассматриваются осесимметричные колебания двухслойной жидкости применительно к проблеме капиллярных фазоразделителей. В данной статье выведено и исследовано частотное уравнение собственных осесимметричных колебаний кольцевых пластин и идеальной жидкости для трех различных способов закрепления внешнего и внутреннего контуров оснований. Рассмотрен ряд частных случаев вырождения кольцевых пластин в круговые, в абсолютно жесткие, в мембраны, а также случай отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Проведены и проанализированы численные исследования для случая жидкости со свободной поверхностью и случая невесомости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим совместные колебания упругих оснований и тяжелой идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , находящейся в прямом кольцевом цилиндре внешнего радиуса a и

внутреннего $a\varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon < 1$). Основания цилиндра представляют собой кольцевые изотропные пластины с изгибной жесткостью D_i , подверженные растягивающим усилиям T_i в срединной плоскости ($i = 1, 2$). Будут рассмотрены три наиболее часто используемые условия закрепления внешнего и внутреннего контуров пластин: защемленный, опертый и свободный край. Индекс $i = 1$ соответствует верхнему основанию, а $i = 2$ – нижнему. Цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ расположим так, чтобы плоскость $Or\theta$ находилась на одинаковом расстоянии от оснований, а ось Oz была направлена по оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания пластин и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [1, 4]

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=h/2} - g \frac{h}{2} \right), \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-h/2} + g \frac{h}{2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS, \quad (4)$$

$$\left(\mathcal{L}_{i1} [W_i] \right) \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0, \quad \left(\mathcal{L}_{i2} [W_i] \right) \Big|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Здесь $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$; W_i , ρ_{0i} и δ_{0i} – соответственно прогиб, плотность и толщина i -ой пластинки; Φ – потенциал скоростей жидкости; h – глубина заполнения; Q – произвольная функция времени; $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ и $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая; S – кольцевая область; \mathcal{L}_{i1} и \mathcal{L}_{i2} – два оператора условий закрепления i -ой пластинки.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Вследствие осевой симметрии функции Φ и W_i представим в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(r)$ следующим образом [1, 4]:

$$\Phi(r, z, t) = a_0(t) + a_1(t)z + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t)e^{k_n z} + B_n(t)e^{-k_n z}] \psi_n(r), \quad (6)$$

$$W_i(r, t) = W_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(t) \psi_n(r), \quad (7)$$

где

$$W_{i0} = \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \quad W_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS.$$

Собственные функции $\psi_n(r)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения краевой задачи

$$\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{на} \quad [a\varepsilon, a], \quad \left. \frac{d\psi_n}{dr} \right|_{r=a, r=a\varepsilon} = 0$$

и вместе с произвольной константой образуют на отрезке $[a\varepsilon, a]$ полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид $\psi_n(r) = J_0(k_n r) + \gamma_n Y_0(k_n r)$. ($\gamma_n = -J_1(\xi_n)/Y_1(\xi_n)$, $k_n = \xi_n/a$; ξ_n - корни уравнения $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n \varepsilon) - J_1(\xi_n \varepsilon)Y_1(\xi_n) = 0$, J_0, J_1 и Y_0, Y_1 - функции Бесселя первого и второго рода). Подставив выражения (6)-(7) функций Φ и W_i в граничные условия (3)-(4), получим

$$A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{-\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad (\kappa_n = k_n h),$$

и уравнения (1)-(2) примут вид

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{1n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (8)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \dot{a}_0 + (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{2n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (9)$$

ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о собственных совместных колебаниях упругих пластин и жидкости. Для этого положим $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$, $\rho(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q}e^{i\omega t}$, $\rho \dot{a}_1 \frac{h}{2} = \tilde{w}e^{i\omega t}$. Здесь W_i^{st} - статический прогиб пластин. В этом случае уравнения (8)-(9) примут вид

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g] w_i = (-1)^{i+1} \tilde{Q} - \tilde{w} + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n \quad (i=1, 2), \quad (10)$$

где

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n} \cosh \kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n} \cosh \kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho \omega^2 \frac{h}{2} w, \quad (11)$$

$$w_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_i \psi_n dS, \quad w = \frac{1}{S} \int_S w_1 dS = \frac{1}{S} \int_S w_2 dS. \quad (12)$$

Решение каждого уравнения (10) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$w_i = \sum_{k=1}^4 w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{d_{in}} \psi_n + \tilde{k}_{0i} \left[\tilde{Q} + (-1)^i \tilde{w} \right] \quad (i=1, 2). \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2}, \quad d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 - [k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g],$$

A_{ik}^0 ($i=1,2; k=\overline{1,4}$), w_{in} , \tilde{Q} и \tilde{w} – неизвестные константы.

Исключим неизвестную константу \tilde{w} . Для этого подставим (13) во второе условие (12) и воспользуемся условием ортогональности собственных функций ψ_n константе

$$\tilde{w} = \frac{1}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}} \left(\sum_{k=1}^4 (\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0) + \tilde{Q}(\tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}) \right),$$

где $\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{S} \int_S w_{ik}^0 dS$.

Из второго условия (12) также следует уравнение

$$\sum_{k=1}^4 (\tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0) + \tilde{k} \tilde{Q} = 0. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{k}_2 = \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2$, $\tilde{k}_1 = \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2$, $\tilde{k} = 2(\rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02})$.

Подставив (13) в первое условие (12) и разрешив систему двух линейных уравнений относительно w_{1n} и w_{2n} , окончательно получим

$$w_i = \sum_{k=1}^4 (w_{i1k} A_{1k}^0 + w_{i2k} A_{2k}^0) + k^* \tilde{Q}. \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{11k} &= w_{1k}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{12k} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ w_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{22k} &= w_{2k}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ a_{11n} &= D_{1n} D_{2n}^*, & a_{12n} &= -d_{1n}^*, & a_{21n} &= -d_{2n}^*, & a_{22n} &= D_{2n} D_{1n}^*, \\ k_1 &= \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k_2 &= \frac{\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k^* &= \frac{2\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & \tilde{d}_{in} &= \frac{\rho \omega^2}{d_{in} k_n \sinh \kappa_n}, & d_{in}^* &= \frac{\tilde{d}_{in}}{\Delta_n}, \\ D_{in} &= \tilde{d}_{in} \sinh \kappa_n, & D_{in}^* &= \frac{\coth \kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}, & \Delta_n &= 1 - (D_{1n} + D_{2n}) \coth \kappa_n + D_{1n} D_{2n}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ik}^0 \psi_n dS.$$

Из условий закрепления пластин (5), соотношений (15) и уравнения (14) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих оснований и жидкости

$$\left\| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^9 \right\| = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} C_{i+j-1,k} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, & C_{i+j-1,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, & C_{i+j-1,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\ C_{i+j,k} &= \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, & C_{i+j,k+4} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i+j,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=1, j=1, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j,k} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+1,k} &= \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+1,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+1,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=1, j=2, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j+2,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \\
C_{i+j+2,k+4} &= \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+2,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+3,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+3,k+4} = \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+3,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=2, j=1, k=\overline{1,4}). \\
C_{i+j+3,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+3,k+4} = \mathcal{L}_{ijk1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn1}, \quad C_{i+j+3,9} = k^* \mathcal{L}_{ij1}^0, \\
C_{i+j+4,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \quad C_{i+j+4,k+4} = \mathcal{L}_{ijk2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{ij2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{ijn2}, \\
C_{i+j+4,9} &= k^* \mathcal{L}_{ij2}^0 \quad (i=2, j=2, k=\overline{1,4}). \\
C_{9,k} &= \tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{9,k+4} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k} \quad (k=\overline{1,4}). \\
\mathcal{L}_{ijkp}^0 &= \left(\mathcal{L}_{ip} [w_{ik}^0] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{ijnp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [w_n] \right) \Big|_{\gamma_j}, \quad \mathcal{L}_{ijp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [1] \right) \Big|_{\gamma_j}.
\end{aligned}
\tag{18}$$

Здесь для удобства записи введены дополнительные индексы j и p , а также обозначения контуров. Индекс $j=1$ соответствует внешнему контуру γ_1 , а $j=2$ – внутреннему γ_2 . Индекс $p=1$ относится к первому условию закрепления, а $p=2$ – ко второму.

Таким образом, уравнение (17) описывает собственные совместные колебания упругих кольцевых оснований и идеальной жидкости в кольцевом цилиндре при различных закреплениях внешнего и внутреннего контуров оснований.

Запишем операторы \mathcal{L}_{ip} и значения функций \mathcal{L}_{ijnp}^0 , \mathcal{L}_{ijp}^0 для защемленного, опертого и свободного края:

защемленный край –

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i1} &\equiv 1, \quad \mathcal{L}_{i2} = \frac{d}{dr}, \quad \mathcal{L}_{i1n1} = B_{1n}^* = \frac{\xi_n Z_0(1)}{a}, \quad \mathcal{L}_{i2n1} = B_{2n}^* = \frac{\xi_n Z_0(\varepsilon)}{a}, \\
\mathcal{L}_{i1n2} &= \mathcal{L}_{i2n2} = 0, \quad \mathcal{L}_{ij1}^0 = 1, \quad \mathcal{L}_{ij2}^0 = 0;
\end{aligned}
\tag{19}$$

опертый край –

$$\mathcal{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathcal{L}_{i2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{v_i}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathcal{L}_{i1n1} = B_{1n}^*, \quad \mathcal{L}_{i2n1} = B_{2n}^*,$$

$$\mathfrak{L}_{i1n2} = M_{1n}^* = -\frac{\xi_n^2 Z_0(1)}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{i2n2} = M_{2n}^* = -\frac{\xi_n^2 Z_0(1)}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{ij1}^0 = 1, \quad \mathfrak{L}_{ij2}^0 = 0; \quad (20)$$

свободный край –

$$\mathfrak{L}_{i1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{v_i}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{i1n1} = M_{1n}^*, \quad \mathfrak{L}_{i2n1} = M_{2n}^*,$$

$$\mathfrak{L}_{i1n2} = L_{1n}^* = 0, \quad \mathfrak{L}_{i2n2} = L_{2n}^* = 0, \quad \mathfrak{L}_{ij1}^0 = 0, \quad \mathfrak{L}_{ij2}^0 = 0, \quad (21)$$

где $Z_m(x) = J_m(\xi_n x) + \gamma_n Y_m(\xi_n x)$.

Частотный спектр уравнения (17) состоит из двух наборов частот, характеризующих колебания верхнего и нижнего упругих оснований и следует ожидать, что при достаточно малых глубинах заполнения будет наблюдаться довольно сильное взаимовлияние этих колебаний.

Следует отметить, что частотное уравнение (17) имеет особенности при $\Delta_n = 0$, $d_{in} = 0$,

$\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0 \left(\omega^2 = \frac{2\rho g}{k_{01} - k_{02}} \right)$ и $\rho g - \omega^2 k_{01} = 0 \left(\omega^2 = \frac{\rho g}{k_{01}} \right)$, которые необходимо учитывать при проведении численных расчетов.

Наибольший интерес будет представлять случай заземленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай, а остальные два случая закрепления нами будут использоваться при численных расчетах для проведения сравнения. В этой связи выпишем элементы определителя частотного уравнения (17) для заземленных контуров

$$C_{i+j-1,k} = \dot{B}_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j-1,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j-1,9} = k^*,$$

$$C_{i+j,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j,k+4} = 0, \quad C_{i+j,9} = 0 \quad (i=1, j=1, k=\overline{1,4}).$$

$$C_{i+j,k} = B_{ijk} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j,k+4} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+1,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+1,k+4} = 0, \quad C_{i+j+1,9} = 0 \quad (i=1, j=2, k=\overline{1,4}). \quad (22)$$

$$C_{i+j+2,k} = k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+2,k+4} = B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+2,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+3,k} = 0, \quad C_{i+j+3,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+3,9} = 0 \quad (i=2, j=1, k=\overline{1,4}).$$

$$C_{i+j+3,k} = k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+3,k+4} = B_{ijk} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+3,9} = k^*,$$

$$C_{i+j+4,k} = 0, \quad C_{i+j+4,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+4,9} = 0 \quad (i=2, j=2, k=\overline{1,4}).$$

Здесь

$$B_{ijk} = w_{ik}^0 \Big|_{\gamma_j}, \quad C_{ijk} = \frac{dw_{ik}^0}{dr} \Big|_{\gamma_j}, \quad B_{jn}^* = Z_0 \left(\frac{r}{a} \right) \Big|_{\gamma_j}.$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ЖИДКОСТИ

Полученное уравнение (17) является довольно общим и включает в себя ряд частных случаев, которые представляют самостоятельный интерес.

Случай невесомости. В этом случае $g = 0$ и частотное уравнение (17) будет симметрично относительно индексов 1 и 2, что имеет физическое обоснование и подтверждает правильность выведенного уравнения. Если $k_{01} = k_{02}$, то $\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0$ и, как было отмечено выше, уравнение (17) имеет особенность. При $k_{01} = 0$ и $k_{02} \neq 0$ будем иметь $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, а девятый столбец определителя уравнения (17) перепишем следующим образом: $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, k_{02}(\rho h + k_{02}))^T$. Если $k_{02} = 0$ и $k_{01} \neq 0$, то $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, а пятый столбец определителя уравнения (17) запишется так: $(-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, k_{01}(\rho h + k_{01}))^T$.

Верхняя пластина вырождается в мембрану. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую и четвертую строки и второй и четвертый столбцы, а в соотношениях (16) положить $D_1 = 0$.

Нижняя пластина вырождается в мембрану. Как и в предыдущем случае, в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть шестую и восьмую строки и шестой и восьмой столбцы, а в соотношениях (16) считать $D_2 = 0$.

Нижняя и верхняя пластины вырождаются в мембраны. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую, четвертую, шестую, восьмую строки и второй, четвертый, шестой и восьмой столбцы, а в соотношениях (16) положить $D_1 = D_2 = 0$.

Случай наличия свободной поверхности у жидкости. Этот случай реализуется при отсутствии верхней пластины. В определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть первую, вторую, третью, четвертую строки и первый, второй, третий, четвертый столбцы, а в соотношениях (16) считать $k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$.

При вырождении нижней пластины в мембрану ($D_2 = 0$) уравнение (17) запишется следующим образом:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=579}^{579} \right| = 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} C_{5,5} &= \mathcal{L}_{2111}^0 - k_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathcal{L}_{211}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathcal{L}_{21n1}, \quad C_{5,7} = \mathcal{L}_{2121}^0 - k_2 \tilde{w}_{22}^0 \mathcal{L}_{211}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 \mathcal{L}_{21n1}, \\ C_{5,9} &= k^* \mathcal{L}_{211}^0, \quad C_{7,5} = \mathcal{L}_{2211}^0 - k_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathcal{L}_{221}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathcal{L}_{22n1}, \quad C_{7,7} = \mathcal{L}_{2221}^0 - k_2 \tilde{w}_{22}^0 \mathcal{L}_{221}^0 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 \mathcal{L}_{22n1}, \quad C_{7,9} = k^* \mathcal{L}_{221}^0, \quad C_{9,5} = \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0, \quad C_{9,7} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k}. \end{aligned}$$

Нижняя или верхняя пластина абсолютно жесткая. Если верхняя или нижняя пластина становится абсолютно жесткой, то в этом случае $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$) или $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$). Переходя к пределу в уравнении (17) при $T_1 \rightarrow \infty$ ($a_{11n} \rightarrow 0$, $a_{12n} \rightarrow 0$) или при $T_2 \rightarrow \infty$ ($a_{21n} \rightarrow 0$, $a_{22n} \rightarrow 0$), получим следующие частотные уравнения:

в первом случае ($T_1 \rightarrow \infty$)

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=5}^8 \right| = 0, \tag{24}$$

а во втором –

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^4 \right| = 0. \tag{25}$$

Коэффициенты C_{qr} вычисляются по формулам (18).

Вырождение кольцевого цилиндра в круговой ($\varepsilon = 0$). В этом случае частотное уравнение (17) примет вид

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^5 \right| = 0. \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{i,k} &= \mathcal{L}_{ik1}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i,k+2} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i,5} = k^* \mathcal{L}_{i1}^0, \\ C_{i+1,k} &= \mathcal{L}_{ik2}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+1,k+2} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+1,5} = k^* \mathcal{L}_{i2}^0 \\ &\quad (i = 1, \quad k = \overline{1,2}). \\ C_{i+1,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i+1,k+2} = \mathcal{L}_{ik1}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in1}, \quad C_{i+1,5} = k^* \mathcal{L}_{i1}^0, \\ C_{i+2,k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+2,k+2} = \mathcal{L}_{ik2}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 \mathcal{L}_{i2}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 \mathcal{L}_{in2}, \quad C_{i+2,5} = k^* \mathcal{L}_{i2}^0 \\ &\quad (i = 2, \quad k = \overline{1,2}). \end{aligned}$$

$$C_{5,k} = \tilde{k}_2 \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{5,k+2} = \tilde{k}_1 \tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{5,5} = \tilde{k} \quad (k = \overline{1,2}).$$

$$\mathcal{L}_{ikp}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [w_{ik}^0] \right) \Big|_{\gamma}, \quad \mathcal{L}_{inp} = \left(\mathcal{L}_{ip} [\psi_n] \right) \Big|_{\gamma}, \quad \mathcal{L}_{ip}^0 = \left(\mathcal{L}_{ip} [1] \right) \Big|_{\gamma}.$$

Для заземленных контуров этот случай был подробно рассмотрен в статье [1]. Следует отметить различия между уравнением (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и уравнением (26). Эти уравнения будут совпадать для опертого и свободного внутреннего контуров, а для закрепленных внутренних контуров уравнение (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывает колебания рассматриваемой механической системы при неподвижных (закрепленных) центрах. Это новая задача об осесимметричных колебаниях жидкости и упругих круговых оснований с неподвижными центрами, которая следует из рассмотренной.

Пусть верхнее и нижнее основания являются абсолютно упругими ($T_1 = T_2 = 0$). В этом случае

$$\begin{aligned} w_{i1}^0 &= J_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i2}^0 = Y_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i3}^0 = I_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \quad w_{i4}^0 = K_0 \left(\mu_i \frac{r}{a} \right), \\ \tilde{w}_{i1}^0 &= \frac{2 [J_1(\mu_i) - \varepsilon J_1(\varepsilon \mu_i)]}{\mu_i (1 - \varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2 [Y_1(\mu_i) - \varepsilon Y_1(\varepsilon \mu_i)]}{\mu_i (1 - \varepsilon^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{i3}^0 &= \frac{2[I_1(\mu_i) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_i)]}{\mu_i(1 - \varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i4}^0 = -\frac{2[K_1(\mu_i) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_i)]}{\mu_i(1 - \varepsilon^2)}, \\ E_{i1n}^0 &= \frac{2\mu_i(J_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \quad E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i(Y_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{i3n}^0 &= \frac{2\mu_i(I_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \quad E_{i4n}^0 = -\frac{2\mu_i(K_1(\mu_i)Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_i)Z_0(\varepsilon))}{(\mu_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2},\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$\mu_1^4 = \frac{k_{01}\omega^2 - \rho g}{D_1}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}\omega^2 + \rho g}{D_2}, \quad \tilde{N}_n^2 = Z_0^2(1) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon),$$

J_p, Y_p, I_p, K_p – функции Бесселя первого и второго рода от действительного и мнимого аргументов.

Введем безразмерные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D}_i = \frac{D_i}{\rho g a^4}, \quad \tilde{T}_i = \frac{T_i}{\rho g a^2}, \quad k_{0i}^* = \frac{k_{0i}}{\rho a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}.$$

Основные переменные в безразмерном виде примут вид

$$\tilde{k}_{01} = \frac{1}{1 - k_{01}^* \Omega^2}, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + k_{02}^* \Omega^2}, \quad \tilde{k}_2 = \tilde{h}\tilde{k}_{02}\Omega^2 + 2, \quad \tilde{k}_1 = \tilde{h}\tilde{k}_{01}\Omega^2 - 2, \quad \tilde{k} = 2(\tilde{h}\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}\Omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}),$$

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_1 \xi_n^2 + \tilde{T}_1) \xi_n^2 + 1 - k_{01}^* \Omega^2 \right]}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_{02}^* \Omega^2 \right]}.$$

Если верхнее и нижнее основания являются абсолютно упругими ($T_1 = T_2 = 0$), то

$$\mu_1^4 = \frac{k_{01}^* \Omega^2 - 1}{\tilde{D}_1}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}^* \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2}.$$

При $\varepsilon = 0$ выражения (27) будут иметь вид [1]

$$\begin{aligned}w_{i1}^0 &= J_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right), \quad w_{i2}^0 = I_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right), \quad \tilde{w}_{i1}^0 = \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i}, \quad \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2I_1(\mu_i)}{\mu_i}, \\ E_{i1n}^0 &= \frac{2\mu_i J_1(\mu_i)}{(\mu_i^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i I_1(\mu_i)}{(\mu_i^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}.\end{aligned}$$

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Ввиду сложности рассматриваемой задачи, проведем численные исследования для двух наиболее интересных случаев: случая наличия у жидкости свободной поверхности при закрепленном нижнем основании и случай невесомости ($g = 0$). Несмотря на достаточное количество публикаций, эти случаи до конца не исследованы.

При отсутствии верхнего основания ($k_{01} = 0, T_1 = 0, D_1 = 0$) для абсолютно упругого дна ($T_2 = 0$) в ранее введенных безразмерных переменных будем иметь:

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_{02}^* \Omega^2 \right]}, \quad \tilde{k}_{01} = 1, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + \tilde{k}_2 \Omega^2}, \quad \mu_2^4 = \frac{k_{02}^* \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2}.$$

Функции w_{2k}^0 и выражения \tilde{w}_{2k}^0 , E_{2kn}^0 вычисляются по формулам (27).

В случае невесомости ($g = 0$) нужно перейти к другим безразмерным переменным:

$$\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho a^5}{D_2}, \quad D_{12} = \frac{D_1}{D_2}, \quad \mu_1^4 = k_1 \Omega^2, \quad \mu_2^4 = k_2 D_{12} \Omega^2, \quad b_1^* = \frac{1}{\tilde{h} + k_1}, \quad b_2^* = \frac{1}{k_2}.$$

При $T_i \neq 0$ и $k_{01} = k_{02} = 0$, т.е. в случае безынерционных пластин, будем иметь:

$$w_{i1}^0 = 1, \quad w_{i2}^0 = I_0 \left(\gamma_{0i} \frac{r}{a} \right), \quad \gamma_{01} = \frac{T_1 a^2}{D_2}, \quad \gamma_{02} = \frac{T_2 a^2}{D_2}, \quad E_{i1}^0 = 0, \quad E_{i2}^0 = \frac{2\gamma_{0i} I_1(\gamma_{0i})}{(\gamma_{0i}^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad (28)$$

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(D_{12} \xi_n^2 + \gamma_{01}^2) \xi_n^2 - k_1 \Omega^2 \right]}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\xi_n^2 + \gamma_{02}^2) \xi_n^2 - k_2 \Omega^2 \right]}.$$

Из соотношений (16), (18), (28) и уравнения (17) и проведенных численных исследований следует, что для безынерционных пластин, а также в случае, если одна пластина является абсолютно жесткой ($T_i \rightarrow \infty$), а другая – безынерционной, то частотное уравнение не имеет действительных корней. Дальнейшие численные исследования показали, что действительные корни также будут отсутствовать и для инерционных пластин и мембран. Следовательно, в невесомости осесимметричные колебания будут отсутствовать, если одна из пластин или мембран является абсолютно жесткой.

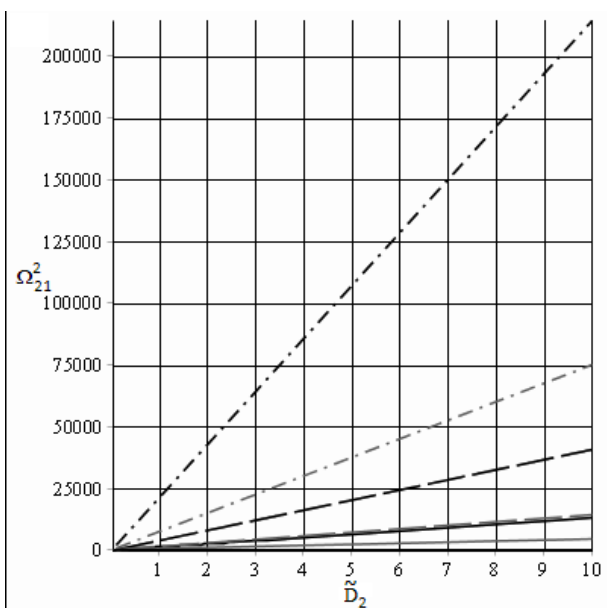


Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} и ε в случае закрепленных внешнего и внутреннего контуров

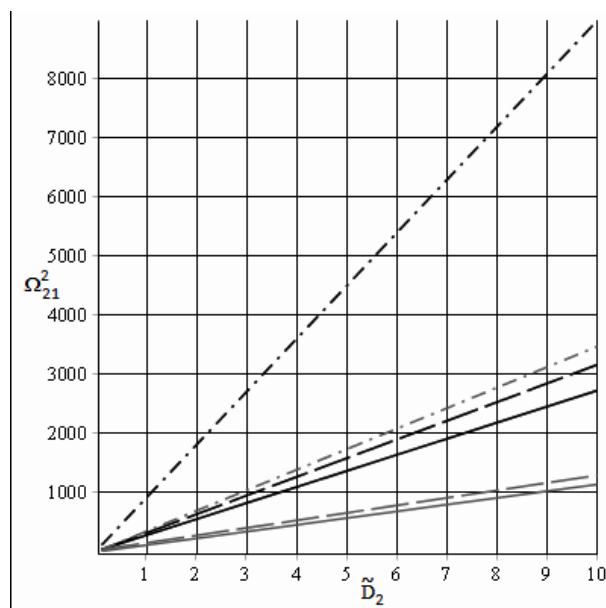


Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} и ε в случае закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров

Численные исследования частотного уравнения (23) были проведены для следующих значений безразмерных параметров: $\varepsilon = 0.001..0.5$, $\tilde{h} = 0.5..1.5$, $\tilde{k}_i = 0$, $\tilde{D}_2 = 0.1..10$. На рис. 1 с учетом двух членов в рядах уравнения (23) ($n = \overline{1, 2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для безынерционного основания ($k_{02} = 0$) и различных глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.5$. На рис. 2 рассмотрен случай жестко закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров при тех же значениях параметров. Серым цветом изображены графики частоты при

$\tilde{h} = 1.5$, а черным – при $\tilde{h} = 0.5$. Сплошными линиями изображены графики частоты при $\varepsilon = 0.001$, пунктирными – при $\varepsilon = 0.25$, а штрихпунктирными – при $\varepsilon = 0.5$.

На основании проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Частотный спектр состоит из двух наборов частот, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего упругих оснований.
2. В невесомости осесимметричные колебания будут отсутствовать в случае, если одна из пластин или мембран является абсолютно жесткой.
3. При наличии свободной поверхности у жидкости частотный спектр будет состоять из двух наборов частот, отвечающих колебаниям свободной поверхности и упругого дна. Показано, что в широком диапазоне изменения параметров механической системы наблюдается слабое изменение частот первого набора и существенное изменение частот второго набора, а также:
 - 3.1. Зависимость первой частоты второго набора от безразмерной жесткости в большинстве случаев почти линейная.
 - 3.2. С увеличением глубины заполнения происходит незначительное уменьшение частот первого набора и существенное - второго набора.
 - 3.3. Частоты второго набора для закрепленного внешнего и свободного внутреннего контуров при достаточно малом внутреннем радиусе практически совпадают с соответствующими значениями частот для кругового цилиндра.
 - 3.4. Частоты второго набора в случае защемленного внутреннего контура более чем в 4 раза выше соответствующих частот для свободного внутреннего контура.
4. Ряды в частотных уравнениях сходятся достаточно быстро. Как правило, достаточно двух-трех членов в этих рядах для достижения приемлемой для практики точности. При учете массовых характеристик пластин сильно возрастает время счета частотных уравнений.

Следует отметить, что в статье [1] есть несколько небольших неточностей. На с. 111 предложение «На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ($n = \overline{1,2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для различных глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 1) и массовой характеристики пластины $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует $\tilde{h} = 0.5$, средний – $\tilde{h} = 1.0$, а верхний – $\tilde{h} = 1.5$. На рис. 2 аналогично $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ » следует заменить на «На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ($n = \overline{1,2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D}_2 для различных значений массовой характеристики пластины $\tilde{k}_2 = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 1) и глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует $\tilde{k}_2 = 2.0$, средний – $\tilde{h} = 1.0$, а верхний – $\tilde{h} = 0.5$. На рис. 2 аналогично $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$.» Кроме того, на с. 112 предложение «Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} » нужно заменить на «Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{k}_2 », а предложение «Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{k}_2 » - на «Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от \tilde{D}_2 для различных \tilde{h} ». Наконец, в выводах статьи [1] на с. 112 в пункте 3 «С увеличением глубины заполнения \tilde{h} происходит незначительное увеличение частот первого набора и существенное второго набора» есть небольшая неточность, связанная с тем, что с увеличением глубины заполнения происходит уменьшение частот двух наборов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кононов Ю. Н. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре / Ю. Н. Кононов, В. Ф. Русаков, Ю. А. Джуха // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. – 2015. – №. 2. – С. 105-114.
2. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А. Ю. Карнаух // Вісн. Донецького національного ун-ту. Сер. А. – 2008. – Вип. 1. – С. 202-206.
3. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – № 5. – С. 30-34.
4. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102-108.
5. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями / А. Ю. Карнаух // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 33-36.
6. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. – М. : Наука, 1989. – 416 с.
7. Гончаров Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Электронное научно-техническое издание : Наука и образование. – 2012. – № 4. – Режим доступа : <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения : 19.02.2014).
8. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Электронное научно-техническое издание : Наука и образование. – 2013. – № 11. – Режим доступа : <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения : 19.02.2014).
9. Пожалостин А. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А. А. Пожалостин, Д. А. Гончаров // Инженерный журнал: Наука и инновации. – 2013. – Вип. 12. – Режим доступа : <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения : 19.02.2014).

REFERENCES

1. Kononov, Yu.N., Rusakov, V.F., & Dzhukha, Yu.A. (2015), "Axial-symmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid cylindrical tank", *Visn. Zaporizkogo natsionalnoho un-tu, Ser. Fiz.-mat.*, no. 2, pp. 105-114.
2. Karnaukh, A.Yu. (2008), "Natural vibrations of flat elastic bottom of coaxial cylindrical vessel and ideal liquid with a free surface", *Visn. Donetskogo natsionalnoho un-tu, Ser. A*, issue 1, pp. 202-206.
3. Didok, N.K. (2013), "Dynamics and stability of vibrations of a cylindrical tank with elastic bottom and liquid with a free surface", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki*, no. 5, pp. 30-34.
4. Didok, N.K. (2013), "Dynamics and stability of vibration of a cylindrical tank with perfect liquid and elastic foundation", *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, vol. 27, pp. 102-108.
5. Karnaukh, A.Yu. (2013), "Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 33-36.
6. Kopechevskiy, N.D. (1989), *Operatornyie metodyi v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnyie i spektralnyie zadachi* [Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems], Nauka, Moscow.
7. Goncharov, D.A. (2012), "Axisymmetric vibrations of two-density liquid in a cylindrical tank", Electronic scientific-technical edition: Science&Education, no. 4, available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (access February 19, 2014).
8. Goncharov, D.A. (2013), "Dynamics of a two-layer liquid divided with elastic baffle with allowance for surface tension", Electronic scientific-technical edition: Science&Education, no. 11, available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (access February 19, 2014).
9. Pozhalostin, A.A. (2013), "Free axisymmetrical vibrations of a two-layer liquid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension", *Engineering Journal: Science&Innovation*, issue 12, available at: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (access February 19, 2014).