

УДК 519.172

**ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ ГРАФА**

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В., Клиценко А. А.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vesdesvet@yandex.ru

В данной работе для формирования базисов подпространства циклов пространства суграфов графа вводится понятие изометрических циклов в отличие от фундаментальных циклов графа. Рассматриваются основные свойства вновь введенной структуры. Представлена теорема о существовании в простом несепарабельном графе базиса подпространства циклов, состоящего из изометрических циклов. А также, рассмотрен вопрос о представлении границ граней в плоском графе изометрическими циклами.

*Ключевые слова: граф, базис циклов, фундаментальные циклы графа, изометрические циклы.*

**ИЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ ГРАФА**

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В., Кліценко Г. А.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vesdesvet@yandex.ru

У роботі для формування базисів підпростору циклів простору суграфів графа вводяться поняття ізометричних циклів на відміну від фундаментальних циклів графа. Розглядаються основні властивості нововведеної структури. Представлена теорема про існування в простому несепарабельному графі базису підпростору циклів, який складається з ізометричних циклів. А також, розглянуто питання про представлення границь граней у плоскому графі ізометричними циклами.

*Ключові слова: граф, базис циклів, фундаментальні цикли графа, ізометричні цикли.*

**ISOMETRIC CYCLES GRAPH**Kurapov S. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor,  
Davydovsky M. V., Klitsenko G. A.*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

vesdesvet@yandex.ru

The article deals with the simple non separable graphs  $G$  without bridges and loops, without multiple lines and cutpoints and without vertices with local degree less or equal to two. In this paper we'll examine the issue of forming the bases of cycles of space of a graph. The example of usage of fundamental system of cycles and cutsets for the determination of basis of subspaces of cycles is examined.

Our research is based on the notions of isometric cycles and central cuts as opposed to the fundamental cycles and cuts of a graph. The basic properties of the newly introduced structures are being studied and prove the theorem on the existence of a cycle subspace basis consisting of isometric cycles in a simple non separable graph is proved. The connection of the isometric cycle of the graph  $G$  with the minimal (s-t) roots of the graph is studied. The algorithm of discerning the set of isometric cycles by the method of search in the width is represented. The examples to this algorithm are given. Additionally, we consider an issue of representing face boundaries in a plane graph by isometric cycles. The connection between the sets of isometric cycles and invariants of graph is analysed. The paper gives a number of examples of usage of properties of isometric graphs for solving various combinatory tasks.

*Key words: graph, cycle basis, fundamental cycles of graph, unit cycle.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Будем рассматривать простые несепарабельные графы  $G = (X, U)$  без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум.

Пусть  $G=(X,U)$  – граф с пронумерованным множеством ребер  $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$  и  $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$  вершин, причем  $\text{card } X=n$  и  $\text{card } U=m$ . Пусть  $L_G$  – множество всех суграфов этого графа. Тогда для двух суграфов существует операция сложения (будем называть ее кольцевой суммой) [1]

$$(X,U_1)\oplus(X,U_2)=(X,(U_1\cup U_2)\setminus(U_1\cap U_2)).$$

И тогда множество  $L_G$  с операцией сложения образует абелеву группу.

Действительно,  $L_G$  заведомо является группоидом; относя каждому суграфу  $G^*=(X,U)$  строку чисел  $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_m)$ , в которой  $i=(1,2,\dots,m)$ , и определяя сложение строк как покомпонентное по модулю 2, мы получим изоморфный  $L_G$  группоид, элементами которого служат всевозможные строки длины  $m$  из нулей и единиц, и который представляет собой абелеву группу.

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in U; \\ 0, & \text{если } u_i \notin U. \end{cases}$$

В дальнейшем группу  $L_G$  удобно рассматривать как линейное пространство над полем коэффициентов  $GF(2)=\{0,1\}$ , называемое пространством суграфов данного графа  $G$ . Размерность этого пространства  $\dim L_G = m$  ибо множество элементов

$$(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1),$$

представляющие односторонние суграфы, образует базис пространства суграфов.

Рассмотрим множество  $L_G$  всех  $m$ -векторов (суграфов) над полем  $GF(2)$ . Если  $\omega_1=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$  и  $\omega_2=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$  – элементы  $L_G$ , то

$$\omega_1 \oplus \omega_2 = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m).$$

Если  $\lambda$  принадлежит  $GF(2)$ , то

$$\lambda\omega = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_m).$$

Нетрудно установить, что  $L_G$  – абелева группа относительно операции  $\oplus$ , в которой нулевым элементом считается  $m$ -вектор  $(0,0,\dots,0)$ . Таким образом, множество  $L_G$  удовлетворяет первой аксиоме в определении векторного пространства. Легко убедиться в том, что элементы множеств  $L_G$  и  $GF(2)$  удовлетворяют и другим аксиомам векторного пространства.

Таким образом,  $L_G$  является векторным пространством над полем  $GF(2)$ . Если  $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ , то подмножества  $\{u_1\},\{u_2\},\dots,\{u_m\}$  образуют базис для  $L_G$ . Из того, что каждый реберно-порожденный суграф графа  $G$  соответствует единственному подмножеству множества  $U$  и что кольцевой сумме любых 2-реберно-порожденных суграфов можно поставить в соответствие кольцевую сумму двух соответствующих множеств ребер, следует, что множество всех реберно-порожденных суграфов графа  $G$  является векторным пространством. Заметим, что  $L_G$  включает в себя нуль-граф  $\emptyset$ .

### 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗЫ ГРАФА

Как известно, в пространстве суграфов можно выделить два подпространства, называемых подпространством разрезов  $S$  и подпространством циклов  $C$  [1].

Для определения базиса подпространства циклов в теории графов применяется фундаментальная система циклов и разрезов.

Данная система образуется в результате выделения случайного дерева графа (ациклический суграф), тем самым, разделяя ребра графа на ветви дерева и хорды. Ребра, принадлежащие дереву, называются ветвями, а не принадлежащие дереву – хордами. Каждый фундаментальный цикл образуется как объединение одной хорды и ветвей дерева. Рассматривая все хорды для выделенного дерева графа, строим матрицу фундаментальных циклов. Например, для графа  $G$  (см. рис.1) относительно дерева  $T = \{u_1, u_3, u_7, u_{10}, u_{11}\}$  матрица фундаментальных циклов представлена в таблице 1.

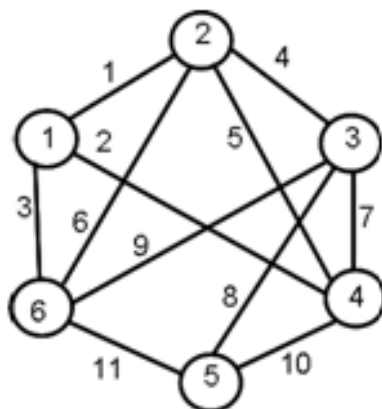


Рис. 1. Граф  $G$

Таблица 1

	$u_2$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_8$	$u_9$	$u_1$	$u_3$	$u_7$	$u_{10}$	$u_{11}$
$u_2$	1							1		1	1
$u_4$		1					1	1	1	1	1
$u_5$			1				1	1		1	1
$u_6$				1			1	1			
$u_8$					1				1	1	
$u_9$						1			1	1	1

Единичная блочная подматрица
 Блочная подматрица  $\pi$

Количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом графа  $\nu(G) = m - n + 1$  [2].

Рассмотрим фундаментальные циклы для выбранного дерева графа  $G$  (см. рис.1):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}; & c_2 &= \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\}; \\
 c_3 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{10}, u_{11}\}; & c_4 &= \{u_1, u_3, u_6\}; \\
 c_5 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; & c_6 &= \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\}.
 \end{aligned}$$

Фундаментальные циклы относительно дерева  $T = \{u_1, u_3, u_7, u_{10}, u_{11}\}$  имеют суммарную длину  $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 4 + 6 + 5 + 3 + 3 + 4 = 25$ .

А следующие базисные циклы графа  $G$ , полученные путем линейной комбинации фундаментальных циклов [3]:

$$c_7 = c_1 = \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}; \quad c_8 = c_4 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_9 = c_5 = \{u_7, u_8, u_{10}\};$$

$$c_{10} = c_5 \oplus c_6 = \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\} = \{u_8, u_9, u_{11}\};$$

$$c_{11} = c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_7, u_9, u_{10}, u_{11}\} = \{u_4, u_6, u_9\};$$

$$c_{12} = c_2 \oplus c_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{10}, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_3, u_5, u_{10}, u_{11}\} = \{u_4, u_5, u_7\},$$

имеют меньшую суммарную длину  $l = l_7 + l_8 + l_9 + l_{10} + l_{11} + l_{12} = 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 19$ .

Будем рассматривать такие базисные циклы, суммарная длина которых минимальна.

## 2. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ ГРАФА

**Определение 1.** Изометрический подграф – подграф  $G'$  графа  $G$ , у которого все расстояния внутри  $G'$  те же самые, что и в  $G$ .

**Определение 2.** Изометрическим циклом в графе называется простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из ребер этого цикла.

Изометрический цикл – частный случай изометрического подграфа.

В таком цикле между любыми двумя его несмежными вершинами в соответствующем графе не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу.

Любой суграф, принадлежащий подпространству циклов  $C$  графа  $G$ , в общем случае является квазициклом. Простые циклы – это квазициклы, у которых локальная степень вершин в точности равна двум [4].

Мощность подмножества простых циклов в графе меньше мощности множества квазициклов. Подмножество простых циклов обозначим  $C_R$ . Тогда

$$\text{card } C_R \leq \text{card } C.$$

Однако существует подмножество с мощностью еще меньшей, чем подмножество простых циклов, это подмножество изометрических циклов [5].

Подмножество, состоящее из изометрических циклов, будем называть подмножеством изометрических циклов, и обозначать  $C_\tau$ . Сказанное поясним на примерах. Рассмотрим суграф, состоящий из ребер  $\{u_1, u_3, u_{13}, u_{15}\}$  графа  $G_a$ , представленного на рис. 2. Как видно, это простой цикл. Но в то же время, это не изометрический цикл, так как между вершинами  $x_7$  и  $x_8$  (несмежными для цикла) в соответствующем графе (т.е. в графе, которому принадлежит выбранный цикл) существует маршрут меньшей длины, проходящий по ребру  $u_{14}$ .

Рассмотрим граф  $G_b$ , представленный на рис. 3.

Пусть цикл состоит из ребер  $\{u_1, u_2, u_3, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}\}$ . Данный суграф есть простой цикл. Однако этот суграф не может быть изометрическим циклом, так как в соответствующем графе между вершинами  $x_2$  и  $x_8$  имеется маршрут меньшей длины (а именно, маршрут, проходящий по ребрам  $u_4$  и  $u_{10}$ ), чем маршруты, принадлежащие этому суграфу (например, маршрут, проходящий по ребрам  $\{u_1, u_3, u_8, u_9\}$  или  $\{u_2, u_6, u_{11}, u_{12}\}$ ).

Для графа, представленного на рис. 1, множество изометрических циклов  $C_\tau = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}$ , где:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_1, u_3, u_6\}, & c_4 &= \{u_1, u_2, u_5\}, & c_7 &= \{u_5, u_6, u_{10}, u_{11}\}, \\ c_2 &= \{u_1, u_2, u_4, u_7\}, & c_5 &= \{u_4, u_5, u_7\}, & c_8 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}, \\ c_3 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}\}, & c_6 &= \{u_4, u_6, u_9\}, & c_9 &= \{u_8, u_9, u_{11}\}. \end{aligned}$$

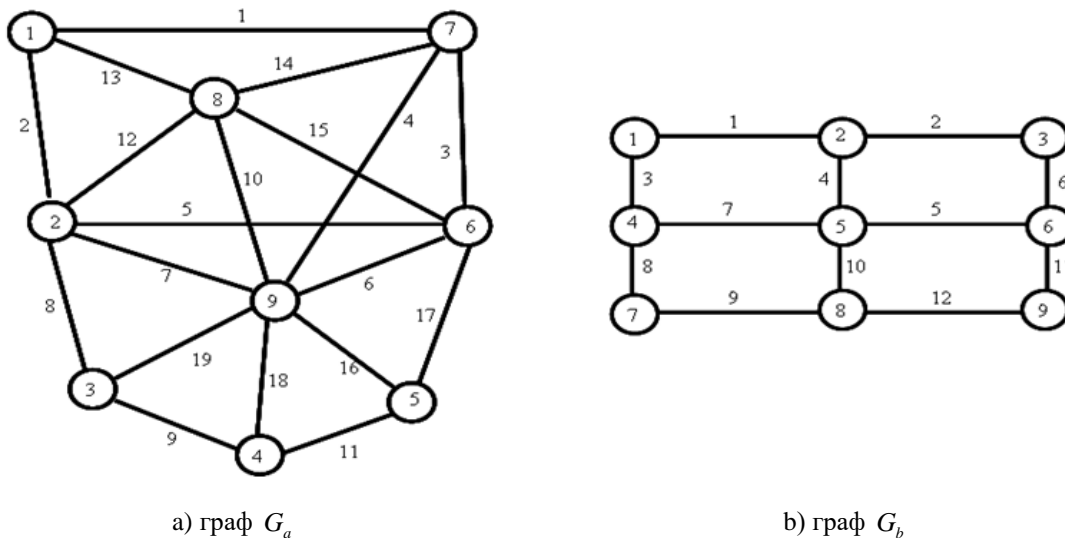


Рис. 2. Графы  $G_a$  и  $G_b$

Следует заметить, что в полных графах множество изометрических циклов совпадает с множеством циклов минимальной длины [6].

Для изучения свойств изометрического цикла нам понадобится следующая теорема.

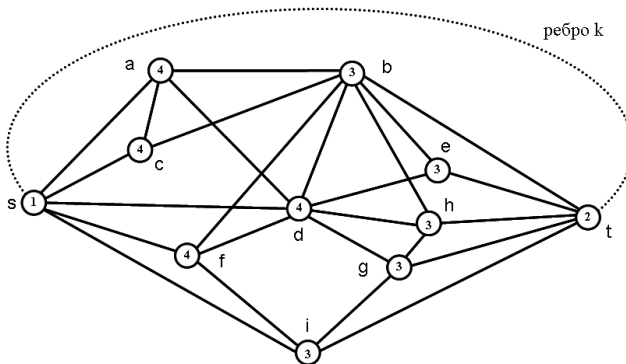
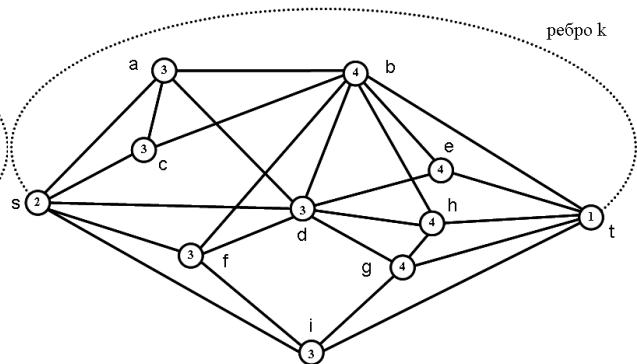
**Теорема 1.** Для любого связного простого несепарабельного графа без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум, линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.

*Доказательство.* Будем рассматривать систему фундаментальных циклов, порожденных деревом  $T$ . Пусть вершины  $A_1, A_2, \dots, A_p$  образуют фундаментальный цикл, содержащий хорду  $(A_p, A_1)$ . Если между несмежными вершинами этого цикла в графе не существует путей меньшей или равной длины, чем пути принадлежащие циклу, то это есть изометрический цикл. Если в цикле существуют две несмежные вершины графа  $A_i$  и  $A_j$  ( $i < j$ ), путь между которыми минимален и включает хорду, такую что путь  $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$  содержит меньшее либо равное количество ребер, чем пути между  $A_i$  и  $A_j$  нашего цикла. Так образуются два цикла, кольцевая сумма которых есть исходный цикл. Отметим, что каждый новый цикл имеет не более, чем  $p - 1$  вершин. Оставляем цикл, содержащий хорду, это и есть изометрический цикл. Так как количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом, то количество изометрических циклов, полученных описанным выше способом, также равно цикломатическому числу графа. Множество изометрических циклов включает все хорды и линейно независимо. Теорема доказана.

Понятие изометрического цикла графа  $G$  тесно связано с минимальными  $(s - t)$  маршрутами графа.

С целью определения множества изометрических циклов графа рассмотрим изометрические циклы, проходящие по  $k$ -му ребру, соединяющему вершины  $s$  и  $t$  графа  $G$  (см. рис. 3). Удалим из графа ребро  $k$ , получим граф  $G-k$ , где вершины  $s$  и  $t$  теперь несмежны. Вершине  $s$  поставим в соответствие фронт волны 1. А вершине  $t$  поставим в соответствие фронт волны 2. Тогда вершины, смежные с вершиной 2 и еще не помеченные, пометим цифрой 3 и так далее. Другими словами, применим алгоритм поиска в ширину относительно вершины  $s$ . Выделим все простые цепи минимальной длины, образованные алгоритмом поиска в ширину, осуществляя проход от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером. Сформируем множество  $C_{st}$  циклов, где элементами множеств есть вершины

$$C_{st} = \left\{ \begin{array}{l} \{s, a, b, t\}, \{s, c, b, t\}, \{s, f, b, t\}, \{s, d, b, t\}, \{s, d, e, t\}, \{s, d, h, t\}, \{s, d, g, t\}, \{s, f, b, t\}, \\ \{s, f, i, t\}, \{s, i, t\} \end{array} \right\}.$$

Рис. 3. Прямая разметка вершин для ребра  $k$ Рис. 4. Обратная разметка вершин для ребра  $k$ 

Рассмотрим построение фронта волны с другой стороны. Вершине  $t$  поставим в соответствие фронт волны 1. А вершине  $s$  поставим в соответствие фронт волны 2. Тогда вершины, смежные с вершиной 2 и еще не помеченные, пометим цифрой 3, и так далее. Другими словами, применим алгоритм поиска в ширину относительно вершины  $t$ . Выделим все простые цепи минимальной длины, образованные алгоритмом поиска в ширину, осуществляя проход от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером (см. рис. 4). Сформируем множество  $C_{ts}$  циклов

$$C_{ts} = \left\{ \begin{array}{l} \{s, a, b, t\}, \{s, c, b, t\}, \{s, f, b, t\}, \{s, d, b, t\}, \{s, d, e, t\}, \{s, d, h, t\}, \{s, d, g, t\}, \{s, f, b, t\}, \\ \{s, i, g, t\}, \{s, i, t\} \end{array} \right\}.$$

Циклы  $\{s, a, b, t\}$ ,  $\{s, c, b, t\}$ ,  $\{s, f, b, t\}$ ,  $\{s, d, b, t\}$ ,  $\{s, d, e, t\}$ ,  $\{s, d, h, t\}$ ,  $\{s, d, g, t\}$ ,  $\{s, f, b, t\}$ ,  $\{s, i, t\}$ , принадлежащие и множеству  $C_{st}$  и множеству  $C_{ts}$ , есть изометрические циклы. Циклы  $\{s, f, i, t\}$  и  $\{s, i, g, t\}$  принадлежат только одному из множеств и поэтому не являются изометрическими.

Данные рассуждения можно применить ко всем ребрам графа  $G$  и сформировать множество изометрических циклов графа.

Ввиду важности вопроса выделения конечного множества изометрических циклов из множества квазициклов, предлагается алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе.

Построение алгоритма начинается с выделения всех ребер в графе  $G$ . Выбираем очередное ребро графа. Одну из вершин такого выбранного ребра пометим индексом 1, другую – индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 2, и ещё не

помеченные, пометим индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 3 и ещё не помеченные, пометим индексом 4 и т. д. Число, выражающее индекс последней помеченной вершины (вершин) графа, называется глубиной проникновения волны, относительно выбранного ребра. Данный процесс представляет собой разметку вершин графа, относительно выбранного ребра волновым алгоритмом (алгоритмом поиска в ширину).

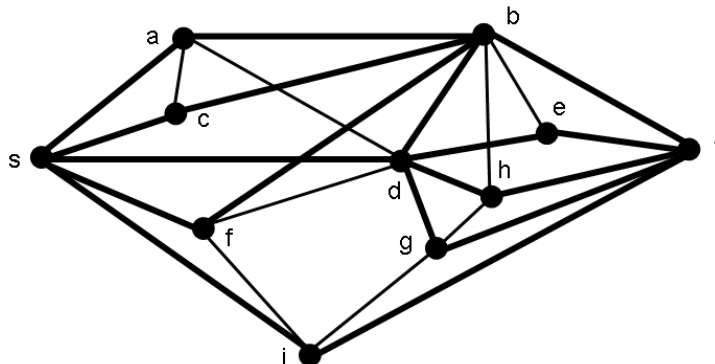


Рис. 5. Минимальные  $s-t$  цепи

Построим простые циклы, проходящие по выбранному ребру, относительно первоначальной ориентации. С этой целью, выберем все вершины графа  $G$ , смежные с вершиной, помеченной индексом 1. Будем идти от любой выбранной вершины, имеющей глубину проникновения  $d$ , к вершинам, имеющим глубину проникновения  $(d-1)$ , проходя при этом по ребрам графа, затем от вершины  $(d-1)$  к вершинам  $(d-2)$  и т.д. Остановим этот процесс тогда, когда подойдем к вершине, имеющей индекс 2. Пройдя по всем таким образом построенным маршрутам, построим систему циклов, проходящих по выбранному ребру  $j$ . Обозначим такое множество циклов через  $S_j^i$ . Переориентируем направление разметки, т.е. вершина, имеющая индекс 1, будет иметь индекс 2, а вершина, имеющая индекс 2, будет иметь индекс 1. И вновь построим разметку вершин. Описанным выше методом выделим систему циклов. Изометрические циклы, проходящие по выбранному ребру  $j$ , будут образованы как:

$$C_j = C_j^1 \cap C_j^2. \tag{1}$$

Множество изометрических циклов графа  $G$  будет образовано как объединение всех циклов, проходящих по всем ребрам графа:

$$C_\tau = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2}$$

**Алгоритм 2.1. [Выделение множества изометрических циклов методом поиска в ширину]**

**Шаг 1.** [Выбор ребра]. Выбираем ребро, идем на шаг 2. Если количество ребер исчерпано, то конец работы алгоритма.

**Шаг 2.** [Прямая разметка вершин относительно вершины  $s$  ребра]. Алгоритмом поиска в ширину производим прямую разметку вершин относительно вершины  $s$  выбранного ребра. Идем на шаг 3.

**Шаг 3.** [Формирование множества циклов  $C_s$  при прямой разметке вершин]. Производим формирование множества циклов при прямой разметке вершин. Идем на шаг 4.

**Шаг 4.** [Обратная разметка вершин относительно вершины  $t$  ребра]. Алгоритмом поиска в ширину производим обратную разметку вершин относительно вершины  $t$  выбранного ребра. Идем на шаг 5.

**Шаг 5.** [Формирование множества циклов  $C_t$  при обратной разметке вершин]. Производим формирование множества циклов при обратной разметке вершин. Идем на шаг 6.

**Шаг 6.** [Проверка циклов  $C_s$  и  $C_t$  на совпадение]. Проверяем циклы  $C_s$  и  $C_t$  для выбранного ребра на совпадение. Несовпадающие циклы исключаем из рассмотрения. Идем на шаг 7.

**Шаг 7.** [Запись циклов во множество изометрических циклов]. Проверяем сформированные на предыдущем шаге циклы с ранее записанными циклами во множестве изометрических циклов, и в случае их отсутствия добавляем их во множество изометрических циклов. Идем на шаг 1.

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим граф  $G$  (рис.6).

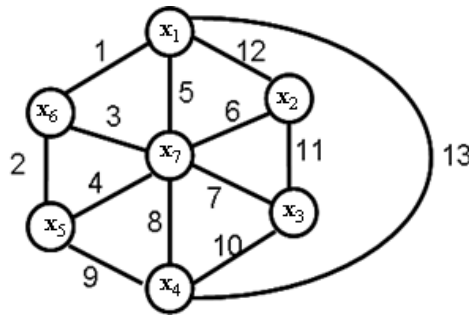


Рис. 6. Граф  $G$

Если в качестве выбранного ребра взять ребро  $u_{13}$ , то процесс разметки вершин имеет вид, представленный на рис. 7. Система циклов, проходящих по ребру  $u_{13}$ , для разметки, показанной на рис. 7,а:

$$C_{13}^1 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_3, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_6, u_8, u_{12}, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.$$

Система циклов, проходящих по ребру  $u_{13}$ , для разметки, представленной на рис. 7,б:

$$C_{13}^2 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_4, u_5, u_9, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}, \{u_5, u_7, u_{10}, u_{13}\}\}.$$

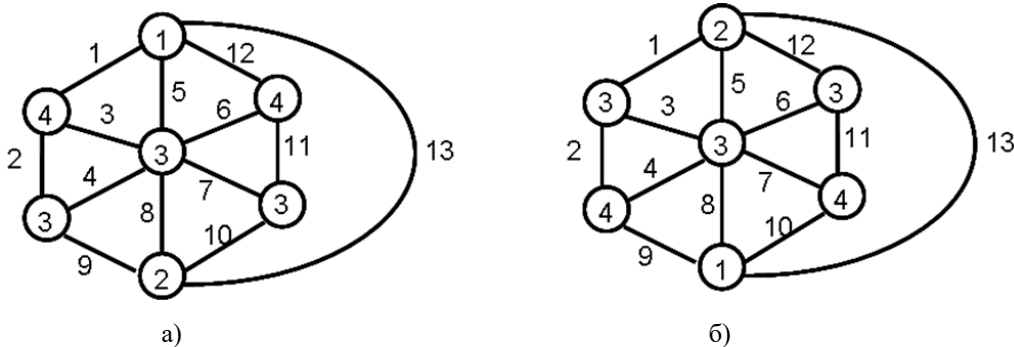


Рис. 7. Прямой и обратный процесс разметки вершин

Пересечение множеств  $C_{13}^1$  и  $C_{13}^2$ :

$$C_{13} = C_{13}^1 \cap C_{13}^2 = \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.$$

Каждому ребру принадлежат следующие изометрические циклы:



$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; & C_2 &= \{\{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; \\
 C_3 &= \{\{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}\}; & C_4 &= \{\{u_4, u_8, u_9\}, \{u_2, u_3, u_4\}\}; \\
 C_5 &= \{\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}\}; & C_6 &= \{\{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}\}; \\
 C_7 &= \{\{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}\}; & C_8 &= \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_3, u_8, u_9\}\}; \\
 C_9 &= \{\{u_4, u_8, u_9\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}\}; & C_{10} &= \{\{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; \\
 C_{11} &= \{\{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; & C_{12} &= \{\{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}; \\
 C_{13} &= \{\{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}\}.
 \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов получим как объединение:

$$\begin{aligned}
 C_\tau &= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} \cup C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} = \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\{u_1, u_3, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_3, u_8, u_9\}, \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}, \\ &\{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, множество изометрических циклов состоит из девяти элементов. Цикломатическое число графа  $G$  равно 7. Следовательно, для построения базиса нужно удалить два изометрических цикла. Очевидно, что для любого трехсвязного и более графа  $G$ , множество изометрических циклов имеет мощность меньшую, чем мощность множества простых циклов, но большую или равную цикломатическому числу графа:

$$\nu(G) \leq \text{card}C_\tau \leq \text{card}C_R \leq \text{card}C. \tag{3}$$

Теперь покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа.

**Пример 2.** Следующий пример демонстрирует невозможность получения полного множества изометрических циклов, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа. Рассмотрим граф, представленный на рис. 8.

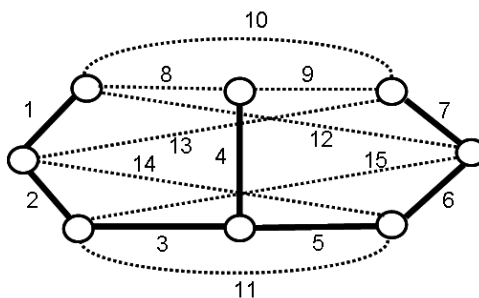


Рис. 8. Граф  $G$  и его дерево

Если производить построение только относительно хорд для выбранного дерева графа, то множество изометрических циклов будет не полно. В данном примере, во множество изометрических циклов не вошли изометрические циклы, проходящие по четвертому ребру.

Изометрические циклы относительно четвертого ребра:

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_8\}; & c_{13} &= \{u_3, u_4, u_8, u_{12}, u_{15}\}; & c_{14} &= \{u_4, u_5, u_6, u_8, u_{12}\}; \\
 c_{15} &= \{u_4, u_5, u_6, u_7, u_9\}; & c_{16} &= \{u_2, u_3, u_4, u_9, u_{13}\}; & c_{17} &= \{u_4, u_5, u_9, u_{13}, u_{14}\}.
 \end{aligned}$$

Изометрические циклы относительно восьмой хорды:  $c = \{u_8, u_9, u_{10}\}$ . Изометрические циклы относительно девятой хорды:  $c = \{u_8, u_9, u_{10}\}$ . Изометрические циклы относительно десятой

хорды:  $\{u_8, u_9, u_{10}\}$ ,  $\{u_1, u_{10}, u_{13}\}$ ,  $\{u_7, u_{10}, u_{12}\}$ . Изометрические циклы относительно одиннадцатой хорды:  $\{u_3, u_5, u_{11}\}$ ,  $\{u_2, u_{11}, u_{14}\}$ ,  $\{u_6, u_{11}, u_{15}\}$ . Изометрические циклы относительно двенадцатой хорды:  $\{u_7, u_{10}, u_{12}\}$ ,  $\{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}$ ,  $\{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}$ . Изометрические циклы относительно тринадцатой хорды:  $\{u_1, u_{10}, u_{13}\}$ ,  $\{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}$ ,  $\{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}$ . Изометрические циклы относительно четырнадцатой хорды:  $\{u_2, u_{11}, u_{14}\}$ ,  $\{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}$ ,  $\{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}$ . Изометрические циклы относительно пятнадцатой хорды:  $\{u_6, u_{11}, u_{15}\}$ ,  $\{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}$ ,  $\{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}$ .

Изометрические циклы относительно хорд:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_8, u_9, u_{10}\}; & c_2 &= \{u_1, u_{10}, u_{13}\}; & c_3 &= \{u_7, u_{10}, u_{12}\}; & c_4 &= \{u_3, u_5, u_{11}\}; \\ c_5 &= \{u_2, u_{11}, u_{14}\}; & c_6 &= \{u_6, u_{11}, u_{15}\}; & c_7 &= \{u_1, u_2, u_{12}, u_{15}\}; & c_8 &= \{u_1, u_6, u_{12}, u_{14}\}; \\ c_9 &= \{u_6, u_7, u_{13}, u_{14}\}; & c_{10} &= \{u_2, u_7, u_{13}, u_{15}\}; & c_{11} &= \{u_2, u_{11}, u_{14}\}. \end{aligned}$$

Вычислительная сложность такого алгоритма определится громоздкостью операции сравнения циклов выделенных прямой и обратной разметкой вершин. Здесь количество изометрических циклов при любой разметке относительно ребра полного графа определится как  $(n-2)$  с каждого прохода алгоритма, а количество сравнений в таком случае будет  $(n-2)^2$ . Полученное выражение нужно умножить на количество ребер:  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Таким образом, получим вычислительную сложность:

$$O(n^4) = \frac{n(n-1)(n-2)^2}{2}. \quad (4)$$

Количество изометрических циклов в полном графе определяется по формуле

$$\text{card}(C_e) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (5)$$

Рассмотрим другой способ построения изометрических циклов. Выделим в полном графе множество циклов длиной три. Это очевидно будет множество изометрических циклов для полного графа.

Будем последовательно удалять ребра из полного графа  $K_n$ . Естественно, что тогда будут удалены и изометрические циклы, содержащие данное ребро, или два удаляемые цикла образуют новый изометрический цикл, равный их кольцевой сумме, в случае, если вновь образованный цикл не содержит в себе части оставшихся изометрических циклов. Таким образом, процесс удаления ребер из полного графа приводит к уменьшению количества изометрических циклов в графе, и естественно, что их количество в произвольном графе не может превышать величины определенной формулой (5).

Сказанное рассмотрим на примере графа  $K_5$ . Множество изометрических циклов  $C_\tau$  для графа  $K_5$  (см. рис. 9):

$$\begin{aligned} c_1 &= \{u_1, u_2, u_5\}; & c_2 &= \{u_1, u_3, u_6\}; & c_3 &= \{u_1, u_4, u_7\}; & c_4 &= \{u_2, u_3, u_8\}; & c_5 &= \{u_2, u_4, u_9\}; \\ c_6 &= \{u_3, u_4, u_{10}\}; & c_7 &= \{u_5, u_6, u_8\}; & c_8 &= \{u_5, u_7, u_9\}; & c_9 &= \{u_6, u_7, u_{10}\}; & c_{10} &= \{u_8, u_9, u_{10}\}. \end{aligned}$$

Удалим из графа ребро  $u_{10}$ . Тогда из множества изометрических циклов  $C_\tau$  удаляются все циклы, включающие десятое ребро:

$$c_6 = \{u_3, u_4, u_{10}\}; \quad c_9 = \{u_6, u_7, u_{10}\}; \quad c_{10} = \{u_8, u_9, u_{10}\}.$$

Остаются изометрические циклы:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_5\}; \quad c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\};$$

$$c_4 = \{u_2, u_3, u_8\}; \quad c_5 = \{u_2, u_4, u_9\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}.$$

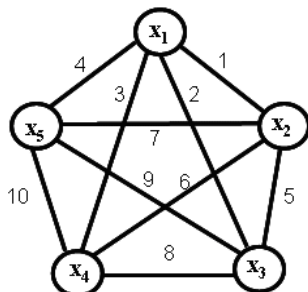


Рис. 9. Граф  $K_5$  с пронумерованными ребрами

Но в перспективе могут образоваться новые изометрические циклы длиной четыре, образованные из удаленных циклов:

$$c_6 \oplus c_9 = \{u_3, u_4, u_{10}\} \oplus \{u_6, u_7, u_{10}\} = \{u_3, u_4, u_6, u_7\};$$

$$c_6 \oplus c_{10} = \{u_3, u_4, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\};$$

$$c_9 \oplus c_{10} = \{u_6, u_7, u_{10}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}\} = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}.$$

Однако их включение во множество оставшихся изометрических циклов невозможно, так как они могут быть образованы как результат кольцевого суммирования из оставшихся изометрических циклов:

$$c_2 \oplus c_3 = \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_1, u_4, u_7\} = \{u_3, u_4, u_6, u_7\};$$

$$c_4 \oplus c_5 = \{u_2, u_3, u_8\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\};$$

$$c_7 \oplus c_8 = \{u_5, u_6, u_8\} \oplus \{u_5, u_7, u_9\} = \{u_6, u_7, u_8, u_9\}.$$

Если мы продолжим удаление ребра  $u_2$  из графа, то из множества оставшихся изометрических циклов  $C_\tau = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$  удаляются все циклы, включающие второе ребро:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_5\}; \quad c_4 = \{u_2, u_3, u_8\}; \quad c_5 = \{u_2, u_4, u_9\}.$$

Остаются изометрические циклы:

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}.$$

В перспективе могут образоваться новые изометрические циклы длиной четыре:

$$c_1 \oplus c_4 = \{u_1, u_2, u_5\} \oplus \{u_2, u_3, u_8\} = \{u_1, u_3, u_5, u_8\};$$

$$c_1 \oplus c_5 = \{u_1, u_2, u_5\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_1, u_4, u_5, u_9\};$$

$$c_4 \oplus c_5 = \{u_2, u_3, u_8\} \oplus \{u_2, u_4, u_9\} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}.$$

Однако включение во множество оставшихся изометрических циклов двух первых циклов невозможно, так как они могут быть образованы как результат кольцевого суммирования из оставшихся изометрических циклов:

$$c_2 \oplus c_7 = \{u_1, u_3, u_6\} \oplus \{u_5, u_6, u_8\} = \{u_1, u_3, u_5, u_8\};$$

$$c_3 \oplus c_8 = \{u_1, u_4, u_7\} \oplus \{u_5, u_7, u_9\} = \{u_1, u_4, u_5, u_9\}.$$

Вновь образованный изометрический цикл  $c_{4,5}$  включается во множество оставшихся изометрических циклов:  $c_{4,5} = c_4 \oplus c_5 = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}$ .

Таким образом, множество изометрических циклов  $C_\tau$  для графа, полученного путем удаления десятого и второго ребер из графа  $K_5$ , состоит из следующих изометрических циклов:

$$c_2 = \{u_1, u_3, u_6\}; \quad c_3 = \{u_1, u_4, u_7\}; \quad c_7 = \{u_5, u_6, u_8\}; \quad c_8 = \{u_5, u_7, u_9\}; \quad c_{4,5} = \{u_3, u_4, u_8, u_9\}.$$

Особая роль изометрических циклов в теории графов определяется тем, что в плоских графах они являются границами граней [4].

### 3. МНОЖЕСТВО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ИНВАРИАНТЫ ГРАФА

Инвариант графа – это число (функция) графа  $G$ , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном  $G$  [4]. Пусть  $f$  – функция, относящая каждому графу  $G$  некоторый элемент  $f(G)$  из множества  $M$  произвольной природы (элементами множества  $M$  чаще всего служат числа и системы чисел, векторы, многочлены, матрицы). Эту функцию будем называть инвариантом, если на изоморфных графах её значения совпадают, т.е. для любых  $G$  и  $G'$

$$G \cong G' \Rightarrow f(G) = f(G').$$

Подпространство циклов является нормированными пространствами, так как любому элементу подпространства можно поставить в соответствие неотрицательное вещественное число  $\|l\|$ , называемое нормой. То есть подпространства циклов – это длина цикла. Причем введенное понятие удовлетворяет следующим условиям:

- $\|l\| > 0$  при  $l \neq 0$ ,  $\|0\| = 0$ ;
- $\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$  для любых  $l_1 \in R, l_2 \in R$ ;
- $\|\alpha l\| = |\alpha| \|l\|$  для любого  $l \in R$  и вещественного числа  $\alpha$ .

Множеству изометрических циклов можно поставить в соответствие так называемый вектор изометрических циклов. Данный вектор записывается в измененном виде:

$$V_c(G) = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots),$$

где  $p_i$  – количество изометрических циклов во множестве  $C_\tau$  длиной  $l_i$ , причем  $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$ , т.е. длина циклов расставлена в порядке неубывания чисел.

Множеству изометрических циклов можно также поставить в соответствие вектор  $V_u(G)$ , характеризующий количество изометрических циклов, проходящих по ребрам, и вектор  $V_x(G)$ , характеризующий количество изометрических циклов, проходящих по вершинам. Данные вектора также можно рассматривать как некоторые инварианты графа.

### 4. РОЛЬ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Роль изометрических циклов графа неопределима при решении многих комбинаторных задач теории графов. К таким задачам можно отнести задачу проверки планарности для несепарабельных графов [8].

**Пример 3.** Определить, является ли граф  $G$ , представленный на рис. 10, планарным.

Множество единичных циклов графа  $C_i$  :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}; & c_7 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{14}, u_{16}\}; & c_{13} &= \{u_1, u_4, u_5, u_{12}, u_{14}\}; \\
 c_2 &= \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\}; & c_8 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\}; & c_{14} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}\}; \\
 c_3 &= \{u_2, u_3, u_7, u_9\}; & c_9 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; & c_{15} &= \{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\}; \\
 c_4 &= \{u_2, u_3, u_8, u_{13}\}; & c_{10} &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; & c_{16} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\}; & c_{11} &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; & c_{17} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}. \\
 c_6 &= \{u_3, u_4, u_{13}, u_{14}\}; & c_{12} &= \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_{12}\}; & &
 \end{aligned}$$

После удаления изометрических циклов  $c_{13}, c_7, c_4, c_{12}, c_{14}, c_6, c_{15}$  цикломатическое число графа  $\nu(G) = 17 - 7 = 10$  и мы получаем базис изометрических циклов, характеризующий планарный граф (см. рис. 11):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}; & c_9 &= \{u_7, u_8, u_{10}\}; \\
 c_2 &= \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\}; & c_{10} &= \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; \\
 c_3 &= \{u_2, u_3, u_7, u_9\}; & c_{11} &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}; \\
 c_5 &= \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\}; & c_{16} &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
 c_8 &= \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\}; & c_{17} &= \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}.
 \end{aligned}$$

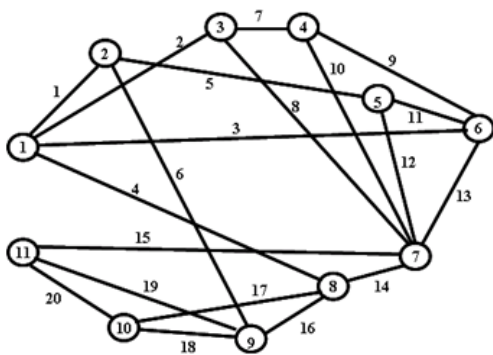


Рис. 10. Граф  $G$

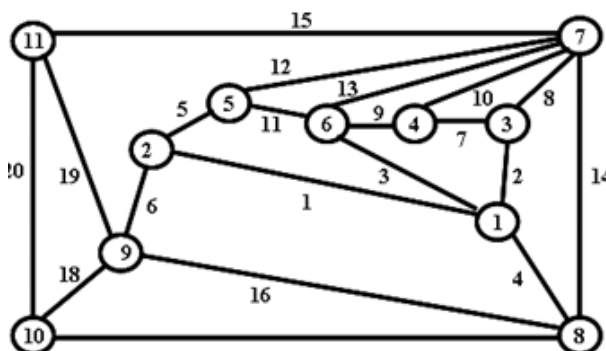


Рис. 11. Планарный граф  $G$

Выразим удаленные изометрические циклы как линейную комбинацию базисных циклов:

$$c_{13} = \{u_1, u_4, u_5, u_{12}, u_{14}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$c_7 = \{u_5, u_6, u_{12}, u_{14}, u_{16}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$c_4 = \{u_2, u_3, u_8, u_{13}\} = c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\};$$

$$c_{12} = \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_{12}\} = c_1 \oplus c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$c_{14} = \{u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$$

$$c_6 = \{u_3, u_4, u_{13}, u_{14}\} = c_3 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\};$$

$$c_{15} = \{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\} = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{16} \oplus c_{17} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \oplus \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\}.$$

**Пример 4.** Построить топологический рисунок для данного плоского графа.

После получения базиса изометрических циклов, характеризующих плоский граф, согласно теореме Мак-Лейна [7], можно охарактеризовать рисунок графа, введя понятие вращения вершин графа, согласно методу Г. Рингеля [9]. Здесь вращение вершин можно получить, рассматривая выделенный базис изометрических циклов и обода как систему циклов, индуцированную вращением вершин. Тогда вращение вершин можно записать как совокупность циклических подмножеств:

$$\begin{aligned} \hbar_1 &= \{x_2, x_6, x_3, x_8\}; & \hbar_5 &= \{x_2, x_7, x_6\}; & \hbar_9 &= \{x_{11}, x_2, x_8, x_{10}\}; \\ \hbar_2 &= \{x_1, x_9, x_5\}; & \hbar_6 &= \{x_5, x_7, x_4, x_1\}; & \hbar_{10} &= \{x_{11}, x_9, x_8\}; \\ \hbar_3 &= \{x_1, x_4, x_7\}; & \hbar_7 &= \{x_3, x_4, x_6, x_5, x_{11}, x_8\}; & \hbar_{11} &= \{x_7, x_9, x_{10}\}. \\ \hbar_4 &= \{x_6, x_7, x_3\}; & \hbar_8 &= \{x_{10}, x_9, x_1, x_7\}; \end{aligned}$$

Топологическим рисунком графа будем называть теоретико-множественную структуру, состоящую из самого графа  $G$  и вращения всех его вершин, и записывать его как  $(G, \hbar)$ .

Топологический рисунок графа позволяет осуществлять операции с рисунком графа, не производя никаких геометрических построений на плоскости, чисто алгебраическими методами.

На основании вышесказанного на рис. 12 приведен пример топологического рисунка.

Следующей задачей, при решении которой целесообразно применять множество изометрических циклов, является задача выделения максимально плоского суграфа для непланарного графа.

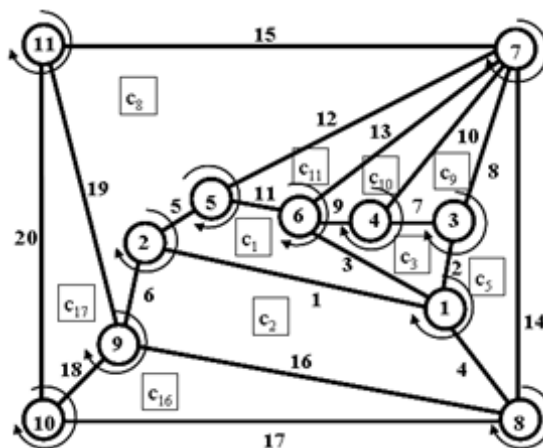


Рис. 12. Топологический рисунок графа

**Пример 5.** Построить максимально плоский суграф для графа  $G$  (см. рис. 13).

Максимально плоским суграфом для данного простого несепарабельного графа будем называть суграф, принадлежащий подпространству циклов и полученный путем удаления минимального количества ребер из графа.

Множество изометрических циклов  $C_\tau$  для нашего графа  $G$ , будем записывать двумя способами: в виде множества ребер принадлежащих данному циклу, и в виде множества вершин, принадлежащих данному циклу:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{u_1, u_2, u_5, u_{14}, u_{15}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_7, x_8, x_9\}; \\
 C_2 &= \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{20}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}\}; \\
 C_3 &= \{u_2, u_3, u_{12}, u_{13}, u_{19}\} \rightarrow \{x_1, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}\}; \\
 C_4 &= \{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{17}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}\}; \\
 C_5 &= \{u_6, u_7, u_8, u_{11}, u_{21}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_6 &= \{u_8, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{18}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_6, x_{10}, x_{11}\}; \\
 C_7 &= \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{16}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_{14}\}; \\
 C_8 &= \{u_8, u_9, u_{11}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{14}\}; \\
 C_9 &= \{u_4, u_5, u_7, u_{15}, u_{16}, u_{21}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_8, x_9, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_{10} &= \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{18}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}; \\
 C_{11} &= \{u_1, u_3, u_5, u_{17}, u_{18}, u_{19}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}; \\
 C_{12} &= \{u_6, u_7, u_9, u_{18}, u_{19}, u_{20}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}; \\
 C_{13} &= \{u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{19}, u_{20}, u_{21}\} \rightarrow \{x_5, x_6, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}; \\
 C_{14} &= \{u_2, u_3, u_{14}, u_{16}, u_{20}, u_{21}\} \rightarrow \{x_1, x_7, x_8, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}.
 \end{aligned}$$

В результате мы получим максимально плоский суграф (см. рис. 14). Шесть циклов  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_8$  и обод образуют плоский суграф из непланарного графа при исключении минимального количества ребер  $u_{18}, u_{10}$ .

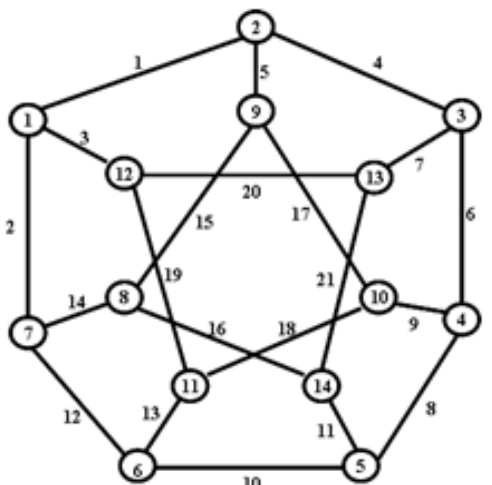


Рис. 13. Граф  $G$

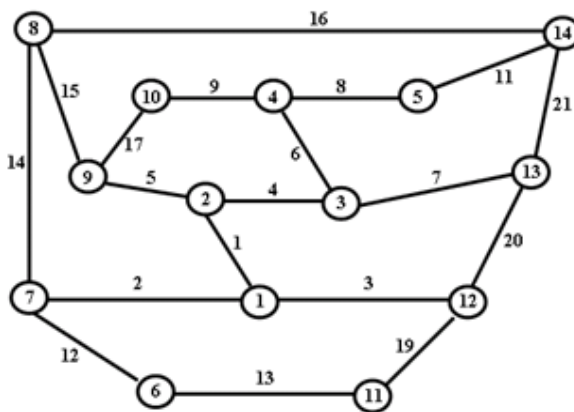


Рис. 14. Максимально плоский суграф графа

Следующее применение изометрические циклы находят при решении задачи построения гамильтонового цикла графа.

**Пример 6.** Построить гамильтонов цикл в следующем графе  $G = (X, U)$  (см. рис.15).

Запишем множество изометрических циклов графа:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; & c_6 &= \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{25}, u_{26}\} \rightarrow \{x_6, x_7, x_{15}, x_{16}, x_{17}\}; \\
 c_1 &= \{u_1, u_3, u_5, u_{15}, u_{16}\} \rightarrow \{x_1, x_2, x_8, x_9, x_{10}\}; & c_7 &= \{u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, u_{27}\} \rightarrow \{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{20}\}; \\
 c_2 &= \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{13}\} \rightarrow \{x_1, x_5, x_6, x_7, x_8\}; & c_8 &= \{u_{19}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{30}\} \rightarrow \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{19}, x_{20}\}; \\
 c_3 &= \{u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{24}\} \rightarrow \{x_4, x_5, x_6, x_{14}, x_{15}\}; & c_9 &= \{u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{20}, u_{29}\} \rightarrow \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{18}, x_{19}\}; \\
 c_4 &= \{u_6, u_7, u_9, u_{21}, u_{22}\} \rightarrow \{x_3, x_4, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}; & c_{10} &= \{u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{28}\} \rightarrow \{x_7, x_8, x_9, x_{17}, x_{18}\}; \\
 c_5 &= \{u_4, u_5, u_7, u_{18}, u_{19}\} \rightarrow \{x_2, x_3, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}; & c_{11} &= \{u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29}, u_{30}\} \rightarrow \{x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}.
 \end{aligned}$$

Здесь гамильтонов цикл характеризуется следующей кольцевая сумма изометрических циклов:

$$\begin{aligned}
 c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 \oplus c_8 \oplus c_{11} &= \{u_1, u_3, u_5, u_{15}, u_{16}\} \oplus \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{13}\} \oplus \{u_6, u_7, u_9, u_{21}, u_{22}\} \oplus \\
 &\oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{25}, u_{26}\} \oplus \{u_{19}, u_{20}, u_{21}, u_{23}, u_{30}\} \oplus \{u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29}, u_{30}\} = \\
 &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{28}, u_{29}\} = \\
 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}.
 \end{aligned}$$

Полученная кольцевая сумма изометрических циклов показана на рис. 16.

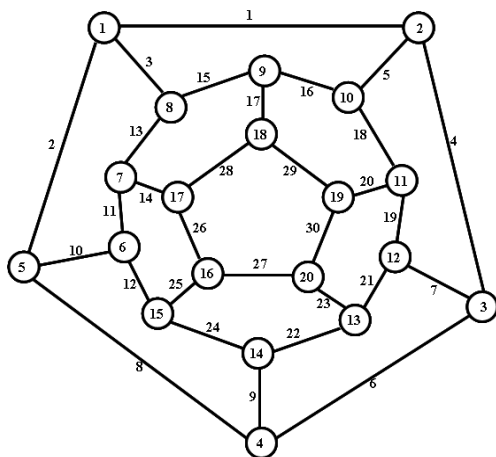


Рис. 15. Граф G

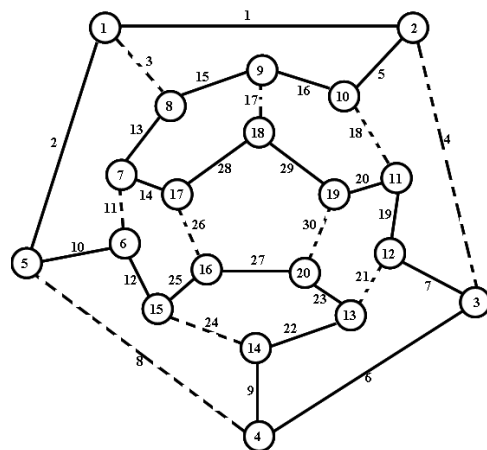


Рис. 16. Гамильтонов цикл

Для заданного графа можно выделить и другие кольцевые суммы, характеризующие гамильтонов цикл, например  $c_2 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_7 \oplus c_4 \oplus c_5$  или  $c_2 \oplus c_3 \oplus c_7 \oplus c_{11} \oplus c_9 \oplus c_5$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос о свойствах множества изометрических циклов графа. Показана природная сущность изометрических циклов и описаны методы получения такого множества. На основании свойств изометрических циклов исследован вопрос формирования базисов подпространства циклов и графа. Приведена теорема про существование в простом несепарабельном графе базиса подпространства циклов, состоящего из изометрических циклов, а также, рассмотрен вопрос о представлении границ граней в плоском графе изометрическими циклами. Также в работе приведен ряд примеров использования свойств изометрических циклов графа для решения различных комбинаторных задач.

В заключении следует отметить, что список комбинаторных задач, решаемых с помощью методов теории изометрических циклов не ограничивается приведенными примерами, а распространяется на довольно обширные области применения вычислительной математики.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов / С. Мак-Лейн // В кн. : Кибернетический сборник. Новая серия. – 1970. – Вып. 7. – С. 68-77.
2. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.
3. Kolasinska E. On a Minimum Cycle Bases of a Graph / E. Kolasinska // *Zastosowania Matematyki*. – 1980. – P. 631-639.
4. Зыков А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. – М. : Наука, 1987. – 384 с.
5. Kavitha T. Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications / T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, R. Rizzi, T. Ueckerdt, K. Zweig // *Comput. Sci. Rev.* 3. – 2009. – P. 199-243.
6. Харари Ф. Теория графов / [Пер. с англ. Козырева В.П. под ред. Гаврилова В.Г.]. – М. : Мир, 1973. – 300 с.
7. Курапов С. В. Методы построения топологического рисунка графа / С. В. Курапов, А. В. Толок // *Автоматика и телемеханика*. – 2013. – № 9. – С. 78-97.
8. Хопкрофт Дж. Е. Изоморфизм планарных графов / Дж. Е. Хопкрофт, Р. Е. Тарьян // В кн. : Кибернетический сборник. Новая серия. – 1975. – Вып. 12. – С. 39-61.
9. Свами М. Графы, сети и алгоритмы : Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 455 с.

## REFERENCES

1. Mak-Lejn, S. (1970), "A combinatorial condition for planar graphs", *v kn.: Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija*, issue 7, pp. 68-77.
2. Emelichev, V.A., Mel'nikov, O.I., Sarvanov, V.I. and Tyshkevich, R.I. (1990), *Lekcii po teorii grafov* [Lectures in graph theory], Nauka, Moscow.
3. Kolasinska, E. (1980), "On a Minimum Cycle Bases of a Graph", *Zastosowania Matematyki*, pp. 631-639.
4. Zykov, A.A. (1987), *Osnovy teorii grafov* [Fundamentals of graph theory], Nauka, Moscow.
5. Kavitha, T., Liebchen, C., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. and Zweig, K. (2009), "Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications", *Comput. Sci. Rev.* 3, pp. 199-243.
6. Harari, F. (1973), *Teorija grafov* [Graphs theory], Translated Kozyreva, V.P. edited by Gavrilova, V.G., Mir, Moscow.
7. Kurapov, S.V. and Tolok, A.V. (2013), "Methods of construction of the topological figure of the graph", *Avtomatika i telemehanika*, no. 9, pp. 78-97.
8. Hopcroft, Dzh.E. and Tar'jan, R.E. (1975), "The isomorphism of planar graphs", *v kn.: Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija*, issue 12, pp. 39-61.
9. Svami, M. and Thulasiraman, K. (1984), *Grafy, seti i algoritmy* [Graphs, Networks and Algorithms], Mir, Moscow.