

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Агаев Р. Н., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены системы уравнений движения подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Неоднородность материала оболочки по толщине учтено, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки является функциями нормальной координаты. При исследовании свободных колебаний подкрепленной перекрестными системами ребер, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью, рассмотрены две случаи: а) жидкость внутри оболочки находится в покое; б) жидкость внутри оболочки движется с постоянной скоростью. В обоих случаях построены частотные уравнения и реализованы численно. В процессе вычислений для функции неоднородности приняты линейные и параболические законы. Построены характерные кривые зависимости.

*Ключевые слова: подкрепленная оболочка, вариационный принцип, жидкость, свободное колебание.*

## КОЛИВАННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЕРЕХРЕСНИМИ РЕБРАМИ НЕОДНОРІДНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РУХОМОЮ РІДИНОЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Агаев Р. Н., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-будівельний університет,  
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз.1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

У пропонованій статті досліджено вільне коливання підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з рухомою рідиною. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, побудовані системи рівнянь руху підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідною за товщиною циліндричною оболонкою, що контактує з рухомою рідиною. Неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною враховано, приймаючи, що модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки є функціями нормальної координати. При дослідженні вільних коливань підкріпленої перехресними системами ребер, неоднорідною за товщиною циліндричною оболонкою, що контактує з рухомою рідиною, розглянуті два випадки: а) рідина всередині оболонки перебуває у спокої; б) рідина всередині оболонки рухається з постійною швидкістю. В обох випадках побудовані частотні рівняння і реалізовані чисельно. У процесі обчислень для функції неоднорідності прийняті лінійні і параболическі закони. Побудовано характерні криві залежності.

*Ключові слова: підкріплена оболонка, варіаційний принцип, рідина, вільне коливання.*

## FLUCTUATIONS OF THE NONUNIFORM CYLINDRICAL ENVELOPE SUPPORTED WITH CROSS EDGES FROM MOVING LIQUID

Latifov F. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Agayev R. N., doctoral candidate

*Azerbaijani Architectural and Structural University,  
A. Sultanov str. 5, Baku, Az. 1073/1*

flatifov@mail.ru, rufat.83@mail.ru

In the offered article the free fluctuation supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving liquid is investigated. Using the variation principle of Hamilton-Ostrogradsky are constructed the set of equations of driving supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving

liquid. Inhomogeneity of material of an envelope on thickness it is considered, accepting that the elastic modulus and density of material of an envelope is functions of normal coordinate. At research of the free fluctuations supported with cross systems of edges, the nonuniform on thickness of the cylindrical envelope contacting from moving liquid considered two cases: a) liquid in an envelope dwells; b) liquid in an envelope moves with constant speed. In both cases the frequenciest equations are constructed and realized numerically. In the course of calculations for function of inhomogeneity the linear and parabolic laws are adopted. The reference graphs are constructed.

*Key words: the supported envelope, the variation principle, liquid, the free fluctuation.*

## ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость, колебания и расчеты на прочность тонкостенных элементов конструкций оболочечного типа, контактирующие со средой, играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются различными ребрами. Такие конструкции могут находиться в контакте с жидкостью и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Однако, поведение неоднородных тонкостенных элементов конструкций, имеющих ребра, учет их дискретного расположения, влияние жидкости исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных неоднородных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей с жидкостью, являются актуальными задачами.

Отметим, что исследованию свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек, заполненных протекающей жидкостью, посвящены работы [2, 3]. Изучены влияния числа ребер, их жесткости, скорости течения жидкости, различных механических, физических и геометрических размеров оболочки на частоты собственных колебаний и оптимизационного параметра круговой ребристой цилиндрической оболочки. Работы [4-6] посвящены исследованию параметрического колебания нелинейного и неоднородного по толщине прямолинейного стержня в вязкоупругой среде с применением контактной модели Пастернака. Изучено влияние основных факторов – упругости основания, повреждаемости материала стержня и оболочки, зависимости коэффициента сдвига от частоты колебания на характеристики продольных колебаний точек стержня в вязкоупругой среде. Во всех исследуемых случаях построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний стержня в вязкоупругой среде от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота. В работе [7] приведены результаты экспериментального исследования влияния подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек. В работах [8, 9] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы, исследованы вынужденные колебания подкрепленной оболочки, заполненной жидкостью, и определены амплитудно-частотные характеристики рассмотренных колебательных процессов. Вводя параметр определяющего оптимальность подкрепления, придем к оптимизации параметров оболочек, усиленных перекрестной системой ребер и заполненной жидкостью, исследованы влияние степени сжимаемости жидкости на частоты свободных осесимметричных колебаний ребристых цилиндрических оболочек заполненной жидкостью.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат

выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости. Кроме того, предполагается, что все ребра образуют регулярную систему. Под регулярной системой продольных и кольцевых ребер понимается такая система, в которой жесткости всех ребер, их взаимные расстояния равны, а расстояния от края оболочки до ближайшего к нему ребра равно расстоянию между ребрами.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности  $u$ ,  $\vartheta$  и  $w$ . При этом углы поворота нормальных элементов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  относительно координатных линий  $y$  и  $x$  выражаются через  $w$  и  $\vartheta$  с помощью зависимостей  $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right)$ , где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений ( $u_j$ ,  $v_j$ ,  $w_j$   $j$ -го поперечного стержня  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$   $i$ -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания  $\varphi_{kpi}$  и  $\varphi_{kpj}$ .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам, имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad v_i(x) = v(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \quad u_j(y) = u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y);$$

$$v_j(y) = v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \quad w_j(y) = w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpj}(y) = \varphi_1(x_j, y).$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ,  $h_j = 0,5h + H_j^1$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $H_i^1$  и  $H_j^1$  – расстояния от осей  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня до поверхности оболочки,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{kpi}$  и  $\varphi_j$ ,  $\varphi_{kpj}$  – углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости, могут быть сведены к составляющим  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерного функционала. В этом случае функционал полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy} + \rho(z) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz. \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma_x = \frac{T_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_y = \frac{T_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3} z; \quad \tau_{xy} = \frac{S}{h} + \frac{12H}{h^3} z. \quad (2)$$

Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из них заключается в том, что модуль Юнга и плотность материала оболочки принимаются

функциями нормальной координаты  $z$ :  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ . Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае соотношение деформации-напряжения имеет вид:

$$e_x = \frac{1}{E(z)}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad e_y = \frac{1}{E(z)}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad e_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E(z)}\sigma_{xy}. \quad (3)$$

Учитывая (2)-(3) и

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \int \left( \rho(z) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz = \int \int \left( \rho_0 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - 2\rho_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) + \rho_2 \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right) dx dy \end{aligned}$$

в (1), можно написать:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{h} \int \int \left\{ T_1 \left[ \frac{1}{E_0} (2T_2 - \nu T_1) + \frac{12}{E_1 h^3} (M_2 - \nu M_1) \right] + \right. \\ \left. + T_2 \left[ -\frac{\nu T_2}{E_0} + \frac{12}{E_1 h^3} (M_1 - \nu M_2) \right] + 2(1 + \nu) S \left( \frac{S}{E_0} + \frac{12H}{E_1 h^3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{72}{E_2 h^6} (2M_1 M_2 - \nu M_1^2 - \nu M_2^2 + 2(1 + \nu) H^2) \right\} dx dy + \int \int \left( \rho_0 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - 2\rho_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) + \rho_2 \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right) dx dy. \quad (4) \end{aligned}$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного ребер таковы [10]:

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \\ \Pi_j = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \tilde{E}_j F_j \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Кинетические энергии ребер записываются в виде [10]:

$$\begin{aligned} K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \\ K_j = \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (6) \end{aligned}$$

В выражениях (4) и (6)  $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного стержня соответственно относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и

проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{xpj}$  – аналогичные величины для  $j$ -го поперечного стержня;  $\tilde{E}_i, \tilde{G}_i$  и  $\tilde{E}_j, \tilde{G}_j$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня соответственно, и  $\rho_i = \int_{-h}^h \rho(z) z^i dz, \frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i dz}{E(z)}$ ;  $t$  – временная координата,  $\rho_i, \rho_j$  – соответственно плотности материалов, из которых изготовлены  $i$ -й продольный и  $j$ -й поперечный стержни.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^L \int_0^{2\pi} q_z w dx dy. \quad (7)$$

Полная энергия системы равна сумме энергий упругих деформаций оболочки и поперечных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны идеальной жидкости:

$$J = V + \sum_{j=1}^{k_2} (\Pi_j + K_j) + \sum_{i=1}^{k_1} (\Pi_i + K_i) + A_0. \quad (8)$$

Здесь  $k_1$  – количество продольных,  $k_2$  – количество поперечных ребер.

Предполагая, что основная скорость потока равна  $U$  и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi$  по [11]:

$$\Delta \tilde{\varphi} - \frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Выражение полной энергии системы (8), уравнения движение жидкости (9) дополняются контактными условиями. На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки среды имеет вид [11]:

$$\vartheta_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right). \quad (10)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку:

$$q_z = -p|_{r=R}. \quad (11)$$

Частотное уравнение ребристой неоднородной оболочки с протекающей жидкостью получено на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\partial W = 0, \quad (12)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} J dt$  – действие по Гамильтону,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

Дополняя контактными условиями полной энергии системы (8) уравнения движения жидкости (9), приходим к задаче о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер неоднородной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер неоднородной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью сводится к совместному интегрированию выражений для полной энергии системы (8), уравнение движение жидкости (9) при выполнении условий (9) и (10) на поверхности их контакта.

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ**

Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi$  ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\vartheta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1. \tag{13}$$

Используя (10) из условия (7), (8), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= -\Phi_{\alpha n} \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \\ p &= \Phi_{\alpha n} \rho_m \left( \omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta r)/I'_n(\beta r), & M_1 < 1; \\ J_n(\beta_1 r)/J'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь  $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$ ,  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $J_n$  – функции Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_0}{(1-v^2)\rho_0 R^2}}$ ,  $\omega_1 = \omega/\omega_0$ .

В выражении (8) варьируемыми величинами являются  $u, \vartheta, w, T_1, T_2, M_1, M_2, S, H$ . Эти неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t); \quad \vartheta = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (\vartheta_0 \cos \omega t + \vartheta_1 \sin \omega t); \\ w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t); \end{aligned} \tag{16}$$

$$T_1 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (T_{10} \cos \omega t + T_{11} \sin \omega t); \quad T_2 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (T_{20} \cos \omega t + T_{21} \sin \omega t);$$

$$S = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (S_{10} \cos \omega t + S_{11} \sin \omega t); \quad M_1 = \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{10} \cos \omega t + M_{11} \sin \omega t);$$

$$M_2 = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{20} \cos \omega t + M_{21} \sin \omega t); \quad H = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (H_{10} \cos \omega t + H_{11} \sin \omega t).$$

Подставляя (16) в (8), после интегрирования получим функцию от переменных  $u_0, u_1, \vartheta_0, \vartheta_1, w_0, w_1, T_{10}, T_{11}, T_{20}, T_{21}, S_{10}, S_{11}, M_{10}, M_{11}, M_{20}, M_{21}, H_{10}, H_{11}$ . Стационарное значение полученной функции определяется следующей системой:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial J}{\partial u_0} &= 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; \\ 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} &= 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial T_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial T_{11}} = 0; \quad 9) \frac{\partial J}{\partial T_{20}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial T_{21}} = 0; \\ 11) \frac{\partial J}{\partial S_{10}} &= 0; \quad 12) \frac{\partial J}{\partial S_{11}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial M_{10}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial M_{11}} = 0; \quad 15) \frac{\partial J}{\partial M_{20}} = 0; \\ 16) \frac{\partial J}{\partial M_{21}} &= 0; \quad 17) \frac{\partial J}{\partial H_{10}} = 0; \quad 18) \frac{\partial J}{\partial H_{11}} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (17) восемнадцатого порядка возможно лишь в случае, когда  $\omega_1$  – корень ее определителя. Определение  $\omega_1$  сводится к трансцендентному уравнению, так как  $\omega_1$  входит в аргументы функции Бесселя:

$$\det \|a_{ij}\| = 0, i, j = 1, 18. \quad (18)$$

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Частотное уравнение (18) решено численно при следующих исходных данных:  $R = 160$  мм;  $E_0 = \tilde{E}_j = \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ;  $h = 0,45$  мм;  $L = 800$  мм;  $\rho_0 = \rho_j = \rho_i = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $F_j = 5,75$  мм<sup>2</sup>;  $I_{xj} = 19,9$  мм<sup>4</sup>;  $a_0 = 1430$  м/сек;  $I_{kp,j} = 0,48$  мм<sup>4</sup>;  $\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}$ ;  $\frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}$ ;  $\frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}$ ;  $\nu = 0,3$ .

Рассмотрены два вида законов изменений неоднородности: линейный –  $E(z) = E_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)\right]$   $\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)\right]$  и параболический –  $E(z) = E_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$   $\rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$ . Здесь  $E_0$  – модуль Юнга,  $\alpha$  – параметр неоднородности. Отметим, что при линейном законе изменение  $|\alpha| < 1$ , при параболическом изменение  $\alpha$  – произвольная.

Результаты счета представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты  $\omega_1$  от относительной скорости потока  $U^*$  для различных законов изменений неоднородности по толщине оболочки. Видно, что увеличение скорости приводит к снижению частоты.

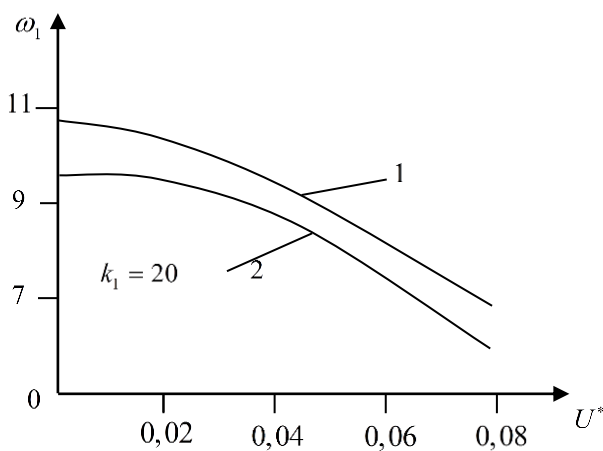


Рис. 1. Зависимость параметра частот колебаний от скорости жидкости: 1 – линейный закон, 2 – параболический закон

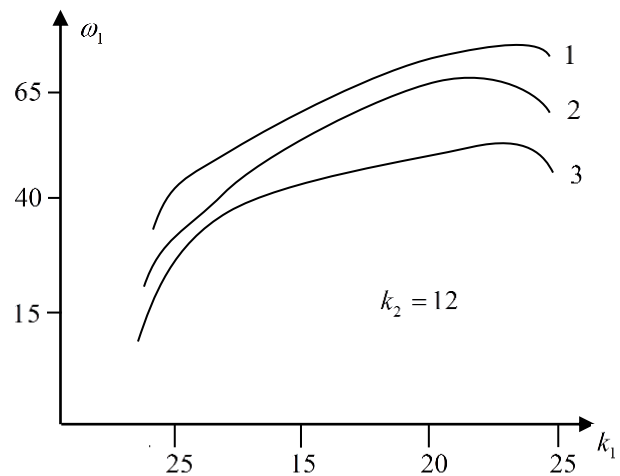


Рис. 2. Зависимость параметра частот от количества продольных ребер: 1 – однородная оболочка, 2 – линейный закон, 3 – параболический закон

Отметим, что  $U^* = 0$  соответствует покоящейся жидкости. На рис. 2 иллюстрирует влияние количества продольных ребер  $k_1$  на параметры частоты  $\omega_1$  колебаний рассмотренной системы. Видно, что с увеличением  $k_1$  параметры частоты  $\omega_1$  колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенном значении  $k_1$  начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что с увеличением  $k_1$  вес стержней увеличивается и это приводит к существенному влиянию их инерционных свойств на процесс колебаний. Сравнения приведенных графиков показывают, что учет неоднородности приводит к снижению значений собственных частот колебаний рассмотренной системы по сравнению собственных частот колебаний этой же системы, когда оболочка однородная.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Теория неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 355 с.
2. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / Ф. Ф. Алиев // Министерство Образования Азербайджанской Республики. Механика и машиностроение. – 2007. – № 2. – С. 10-12.
3. Мустафаев Дж. М. Свободные колебания поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки в бесконечной упругой среде с протекающей жидкостью / Дж. М. Мустафаев, Ф. Ф. Алиев // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2006. – № 3. – С. 88-94.
4. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии со средой с учетом трения / И. Т. Пирмамедов // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2005. – №1. – С. 82-89.
5. Пирмамедов И. Т. Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с наполнителем с применением модели Пастернака / И. Т. Пирмамедов // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук. – 2005. – №2. – С. 93-99.
6. Пирмамедов И. Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте / И. Т. Пирмамедов // Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси. – 2009. – № 3(8). – С. 52-56.
7. Каиров А. С. Экспериментальное исследование свободных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек с присоединенными твердыми телами / А. С. Каиров, Л. А. Латанская, В. А. Каиров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2009. – Вип. 13. – С. 107-113.
8. Латифов Ф. С. Асимптотический анализ задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в бесконечной упругой среде цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью / Ф. С. Латифов // ДАН Аз. Республики. – 1999. – Т. LV, № 5-6. – С. 8-15.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : «Элм», 1999. – 164 с.
10. Амиро И. Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 368 с.
11. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1980. – 320 с.

## REFERENCES

1. Lomakin, V.A. (1975), *Teoriya neodnorodnykh tel* [The theory of inhomogeneous bodies], Izd-vo MGU, Moscow.
2. Aliev, F.F. (2007), “Natural oscillations in an infinite elastic medium reinforced cross-system edges of a cylindrical shell with a flowing liquid”, *Ministerstvo Obrazovaniya Azerbaydzhanskooy Respubliki, Mekhanika i mashinostroenie*, no. 2, pp. 10-12.
3. Mustafaev, Dzh.M. and Aliev, F.F. (2006), “Free oscillations transversely stiffened cylindrical shell in an infinite elastic medium with a flowing liquid”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 3, pp. 88-94.
4. Pirmamedov, I.T. (2005), “Parametric oscillations of nonlinear and non-uniform thickness of viscoelastic cylindrical shell under dynamic interaction with the environment, taking into account the friction”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 1, pp. 82-89.
5. Pirmamedov, I.T. (2005), “Research parametric nonlinear vibrations and nonuniform thickness viscoelastic cylindrical shell with a filler with Pasternak model”, *Vestnik Bakinskogo Universiteta, seriya fiziko-matematicheskikh nauk*, no. 2, pp. 93-99.



6. Pirmamedov, I.T. (2009), "Calculation of parametric oscillations of a homogeneous thickness viscoelastic rod in visco elastic ground", *Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal, Ob"edinennyi institut mashinostroeniya NAN Belorusi*, no. 3(8), pp. 52-56.
7. Kairov, A.S., Latanskaya, L.A. and Kairov, V.A. (2009), "Experimental study of free oscillations of cylindrical shells reinforced with attached solids", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosty konstruksiy*, issue 13, pp. 107-113.
8. Latifov, F.S. (1999), "The asymptotic analysis of the problem of not axisymmetric free vibrations in an infinite elastic medium cylindrical shell filled with an ideal fluid", *DAN Az. Respubliki*, vol. LV, no. 5-6, pp. 8-15.
9. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
10. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Teoriya rebristykh obolochek. Metody rascheta obolochek* [The theory of ribbed shells. Methods of calculating shells], Naukova dumka, Kiev.
11. Vol'mir, A.S. (1980), *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Skins in the liquid flow and gas. Tasks hydroelasticity], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,  
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

tigr\_lev@ukr.net

Опираясь на соотношения, связывающие производные перемещений, как обобщенные функции, с обычными производными, получена система линейных дифференциальных уравнений. В правых частях уравнений содержатся обобщенные функции, зависящие от скачков перемещений и напряжений. Решение системы получено в виде свертки матрицы фундаментальных решений со столбцом правых частей системы.

*Ключевые слова: перемещения, напряжение, плоская задача, анизотропия, дефекты, разрывное решение, обобщенная функция, краевая задача.*

## ИНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКА ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,  
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

tigr\_lev@ukr.net

Опираючись на співвідношення, що зв'язують похідні переміщень, як узагальнені функції, зі звичайними похідними, отримана система лінійних диференціальних рівнянь. У правих частинах рівнянь містяться узагальнені функції, що залежать від стрибків переміщень і напружень. Розв'язок системи отримано у вигляді згортки матриці фундаментальних рішень зі стовпцем правих частин системи.

*Ключові слова: переміщення, напруга, плоска задача, анизотропія, дефекти, розривний розв'язок, узагальнена функція, крайова задача.*