УДК 519.6

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ

Литвин О. М., Коваленко Г. В., Денисова О. І.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

У статті розглядається побудова інтерполяційного полінома Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику. Запропонована нами схема побудови інтерполяційного полінома базується на використанні базисних поліномів на «одиничному» трикутнику (з вершинами в точках (0,0), (1,0), (0,1)). Базисні поліноми на довільному трикутнику визначаються як композиція базисних поліномів на «одиничному» трикутнику та лінійних функцій, які задають афінне перетворення площини, що переводить довільний трикутник в «одиничний». Знайдено формули для обчислення коефіцієнтів лінійної комбінації базисних поліномів на довільному трикутнику, при яких вона задає інтерполяційний поліном 5-го степеня на відповідному трикутнику.

Ключові слова: інтерполяційний поліном Зламала-Женішека 5-го степеня, базисні поліноми, довільний трикутник, «одиничний» трикутник, афінне перетворення.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА 5-ОЙ СТЕПЕНИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ПОЛИНОМОВ НА «ЕДИНИЧНОМ» ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Литвин О. Н., Коваленко А. В., Денисова О. И.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

В статье рассматривается построение интерполяционного полинома Зламала-Женишека 5-ой степени на произвольном треугольнике. Предложенная нами схема построения интерполяционного полинома базируется на использовании базисных полиномов на «единичном» треугольнике (с вершинами в точках (0,0), (1,0), (0,1)). Базисные полиномы на произвольном треугольнике определяются как композиция базисных полиномов на «единичном» треугольнике и линейных функций, которые задают аффинное преобразование плоскости, переводящее произвольный треугольник в «единичный». Найдены формулы для вычисления коэффициентов линейной комбинации базисных полиномов на произвольном треугольнике, при которых она задаёт интерполяционный полином 5-ой степени на соответствующем треугольнике.

Ключевые слова: интерполяционный полином Зламала-Женишека 5-ой степени, базисные полиномы, произвольный треугольник, «единичный» треугольник, аффинное преобразование.

CONSTRUCTION OF INTERPOLATING POLYNOMIAL OF THE 5TH DEGREE ON ARBITRARY TRIANGLE BY USING BASIS POLYNOMIALS ON THE “UNIT” TRIANGLE

Litvin O. M., Kovalenko G. V., Denisova O. I.

Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

In this article, we consider the construction of the interpolating polynomial of Zlamal-Zenisek 5th degree on an arbitrary triangle. The proposed scheme for the construction of the interpolating polynomial is based on the use of the basis polynomials on the “unit” triangle (with vertices (0,0), (1,0), (0,1)). We obtain explicit formulas for all twenty-one basis polynomials. To find these basic polynomials we assume known values of interpolated function and its partial derivatives up to second order in all the vertices of the triangle, and the values of the derivatives in the direction normal to the inner sides of the triangle, calculated in the middle of the sides. Constructed basic polynomials have certain interpolation properties that allows you to record the interpolation polynomial in the form of a linear combination of basis polynomials that their coefficients are exactly equal or function values, or the values of its partial derivatives up to second order in the vertices of a triangle, or the value of the

derivative in the direction of the inward normal to the sides of the triangle, calculated in the middle of the sides.
Basic polynomials on an arbitrary triangle is defined as the composite function of the basis polynomials on “unit” triangle, and linear functions, which define an affine transformation that maps an arbitrary triangle into the “unit” triangle. But coefficients in the expression for the interpolating polynomial will not be exactly equal to the values of the interpolated function and certain of its derivatives. We introduce into consideration an auxiliary operator of interpolation $Sf(x,y)$ for calculating part of these coefficients. This operator is defined as a linear combination of basis polynomials obtained on the basis of 18 basis polynomials for “unit” triangle, which stand at the values of the interpolated function and its partial derivatives. We have obtained expressions for the coefficients of the operator $Sf(x,y)$ at which it satisfies the interpolation conditions: its value and value of its partial derivatives (up to the second order) at the vertices triangle are equal to the corresponding values of the interpolated function and its derivatives. Our main result is the construction of the operator of interpolation $Of(x,y)$, which equal to the sum of operator $Sf(x,y)$ and a linear combination of 3 basis polynomials obtained using basis polynomials for the “unit” triangle. These basis polynomials arranged at the values of the normal derivative of the interpolated function. It is shown that the operator $Of(x,y)$ has all the interpolation properties of the operator $Sf(x,y)$ regardless of the coefficients at the basis polynomials in the difference $Of(x,y)-Sf(x,y)$. We have obtained expressions for these coefficients, at which operator has the interpolation property: value of its derivatives with respect to the direction normal to the inner sides of the triangle, calculated in the middle of the sides are equal to the corresponding derivatives of the interpolated function.
Key words: interpolating polynomial of Zlamal-Zenisek 5th degree, basis polynomials, arbitrary triangle, “unit” triangle, affine transformation.

ВСТУП

Останнім часом постійно збільшується кількість праць, присвячених побудові та дослідженню апроксимаційних властивостей інтерполяційних поліномів ермітового типу для функцій двох змінних на трикутнику. Таке підвищення інтересу до цих об’єктів зумовлено їх зручністю та ефективністю при розв’язуванні прикладних задач, пов’язаних з наближенням функцій. Важливим фактором при цьому є бурхливий розвиток обчислювальної техніки та пакетів прикладних програм, що дозволяє суттєво зменшити час на виконання обчислень при реалізації алгоритмів побудови інтерполяційних поліномів.

Одними з перших ґрунтовних праць, у яких розвивалася теорія побудови інтерполяційних многочленів на трикутнику, є роботи Зламала і Женішека [1-4]. Ідеї, викладені в цих працях, дістали подальшого розвитку та поглиблення в роботах [5-8].

Зокрема, у роботі [6] запропоновано метод побудови інтерполяційного многочлена 5-го степеня на довільному трикутнику $\bar{T}_{ijk}$ з вершинами A_1, A_2, A_3. Одним з основних результатів цієї роботи є наступна теорема.

Теорема [6]. Для кожної функції $f(x,y)\in C^2(\bar{T}_{ijk})$ оператор

$$S_5 f(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x,y), \quad w(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} D^{\beta} f(A_i)\, h_{i\beta}(x,y)$$

визначає поліном 5-го степеня з властивостями

$$D^{\alpha} S_5 f\big|_{A_p} = D^{\alpha} f\big|_{A_p},\ p\in\{1,2,3\}, 0\le|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2\le 2,\ \frac{\partial S_5 f}{\partial \nu_{ij}}\bigg|_{M_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}\bigg|_{M_{ij}},\ (i,j)\in Q,$$

де ν_{ij} – одиничний вектор внутрішньої нормалі сторони A_iA_j трикутника; M_{ij} – середина сторони A_iA_j; $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$.

Функції $h_{i\beta}(x,y),\ i=\overline{1,3},\ \beta=(\beta_1,\beta_2),\ 0\le\beta_1+\beta_2\le 2,\ H_{ij}(x,y),(i,j)\in Q=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ – базисні поліноми, які задовольняють інтерполяційні умови:

1) $D^\alpha h_{k\beta}\big|_{A_\ell}=\delta_{k,\ell}\delta_{\alpha,\beta};\ \ell,k\in\{1,2,3\},\ \delta_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha_1,\beta_1}\delta_{\alpha_2,\beta_2}$, де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера;

2) $D^\alpha H_{ij}\big|_{A_k}=0,\ 0\le|\alpha|\le 2,\ k\in\{1,2,3\},\ k\ne i,j$;

3) $\left.\dfrac{\partial H_{ij}}{\partial\nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}=1,\ \left.\dfrac{\partial H_{ij}}{\partial\nu_{ij}}\right|_{M_{mn}}=0,\ (i,j)\ne(m,n);\ (i,j),(m,n)\in Q$.

Також було наведено явні вирази для базисних функцій $h_{i\beta}(x,y)$ та $H_{ij}(x,y)$ для «одиничного» трикутника з вершинами $X_1(0,0),\ X_2(1,0),\ X_3(0,1)$.

У цій роботі було зазначено, що оператор інтерполяції $S_5 f(x,y)$ можна використовувати також в іншій формі

$$S_5 f(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2}D^\beta f(A_k)\left(h_{k\beta}(x,y)-\sum_{(i,j)\in Q}\frac{\partial h_{k\beta}}{\partial\nu_{ij}}(x_{ij},y_{ij})H_{ij}(x,y)\right)+$$
$$+\sum_{(i,j)\in Q}\frac{\partial f}{\partial\nu_{ij}}(x_{ij},y_{ij})H_{ij}(x,y).$$

Перевагою цього представлення оператора є те, що при функціях

$$v_{k\beta}(x,y)=h_{k\beta}(x,y)-\sum_{(i,j)\in Q}\frac{\partial h_{k\beta}}{\partial\nu_{ij}}(x_{ij},y_{ij})H_{ij}(x,y)\quad \text{та}\quad V_{ij}(x,y)=H_{ij}(x,y)\tag{1}$$

знаходяться значення функції, її частинних похідних у вершинах трикутника та похідних за внутрішньою нормаллю до сторін трикутника.

Використовуючи результати роботи [6], можна будувати явні вирази для базисних поліномів 5-го степеня на довільному трикутнику. Проте ці побудови потребують великої кількості обчислень і, як наслідок, значних затрат часу навіть при використанні обчислювальної техніки. З точки зору економії кількості операцій для побудови базисних поліномів на довільному трикутнику ефективними є ідеї роботи [5], у якій запропоновано метод побудови кубічних інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека на довільному трикутнику, заснований на використанні базисних поліномів 3-го степеня на «одиничному» трикутнику. Нам не відома жодна робота, у якій ця ідея була б реалізована для інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня. Отже, актуальною є **проблема** побудови інтерполяційних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику з використанням базисних поліномів на «одиничному» трикутнику.

Метою нашої **роботи** є побудова інтерполяційного многочлена 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1A_2A_3$ з використанням базисних поліномів $v_{k\beta}(x,y)$ та $V_{ij}(x,y)$ на «одиничному» трикутнику.

ВИКЛАД ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Використовуючи формули (1) та результати роботи [6], у якій наведено явні формули для функцій $h_{k\beta}(x,y),\ H_{ij}(x,y)$, можна отримати явні вирази для всіх базисних функцій $v_{k\beta}(x,y)$ та $V_{ij}(x,y)$ для «одиничного» трикутника. Наведемо деякі з них:

$$v_{120}(x,y)=\frac{3}{2}x^2y(x+y-1)^2-\frac{1}{2}x^2(x+y-1)^3,\quad v_{302}(x,y)=\frac{1}{2}y^3(y-1)^2-\frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$V_{12}(x,y)=16x^2y(x+y-1)^2,\quad V_{23}(x,y)=-8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1),\quad V_{31}(x,y)=16xy^2(x+y-1)^2.$$

За допомогою безпосередніх обчислень можна переконатися, що ці функції володіють такими інтерполяційними властивостями: $D^{\beta_1,\beta_2}v_{kpq}(x,y)\big|_{X_l}=\delta_{k,l}\delta_{(\beta_1,\beta_2),(p,q)}$,

$$\left.\frac{\partial V_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}=1,\quad \left.\frac{\partial V_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{mn}}=0,\ (m,n)\neq(i,j)\ (M_{ij}\text{ – середина сторони } X_iX_j),$$

$$D^{\beta_1,\beta_2}V_{ij}(x,y)\big|_{X_l}=0,\ \forall\, l=\overline{1,3},\ 0\le\beta_1+\beta_2\le 2,\ (i,j)\in Q=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$

Метод, запропонований у роботі [5], базується на використанні афінного перетворення, яке відображає довільний заданий трикутник в «одиничний».

Афінне перетворення σ, яке відображає довільний трикутник $\triangle A_1A_2A_3$ в «одиничний» трикутник $\triangle X_1X_2X_3$ (причому $\sigma(A_l)=X_l$, $l=\overline{1,3}$), задається відповідно:

$$\begin{cases} x'=g_1(x,y)=ax+by+c, \\ y'=g_2(x,y)=dx+ey+f, \end{cases}$$

де

$$a=-\frac{y_1-y_3}{\Delta},\quad b=\frac{x_1-x_3}{\Delta},\quad c=-\frac{x_1y_3-x_3y_1}{\Delta},\quad d=\frac{y_1-y_2}{\Delta},$$

$$e=-\frac{x_1-x_2}{\Delta},\quad f=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\Delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Розглянемо функції $w_{kpq}(x,y)=v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))$, $k=\overline{1,3}$, $p,q\in\{0,1,2\}$, $0\le p+q\le 2$.

Теорема 1. Для довільних $k,l\in\overline{1,3}$ функція $w_{kpq}(x,y)$ задовольняє умови:

1)
$$w_{k00}(A_l)=\delta_{k,l}=\begin{cases}1,\ k=l,\\ 0,\ k\neq l.\end{cases}\tag{2}$$

2)
$$D^{1,0}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{(1,0),(p,q)}a+\delta_{k,l}\delta_{(0,1),(p,q)}d=\begin{cases}a,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,0),\\ d,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,1),\\ 0,\ \text{в інших випадках.}\end{cases}\tag{3}$$

3)
$$D^{0,1}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{(1,0),(p,q)}b+\delta_{k,l}\delta_{(0,1),(p,q)}e=\begin{cases}b,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,0),\\ e,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,1),\\ 0,\ \text{в інших випадках.}\end{cases}\tag{4}$$

4)
$$D^{2,0}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}a^2+\delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}2ad+\delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}d^2=\tag{5}$$

$$=\begin{cases} a^2, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(2,0), \\ 2ad, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,1), \\ d^2, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

5) $$D^{1,1}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}ab+\delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}(ae+bd)+\delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}de= \qquad (6)$$

$$=\begin{cases} ab, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(2,0), \\ ae+bd, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,1), \\ de, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

6) $$D^{0,2}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}b^2+\delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}2be+\delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}e^2= \qquad (7)$$

$$=\begin{cases} b^2, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(2,0), \\ 2be, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,1), \\ e^2, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,2), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведення. 1) З означення функцій $w_{kpq}(x,y)$, властивостей афінного перетворення σ та інтерполяційних властивостей базисних функцій $v_{kpq}(x,y)$ випливають рівності:

$$w_{k00}(A_l)=v_{k00}(g_1(A_l),g_2(A_l))=v_{k00}(X_l)=\delta_{k,l}=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

2) За правилами диференціювання складної функції маємо:

$$D^{1,0}w_{kpq}(x,y)=D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))D^{1,0}g_1(x,y)+D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))D^{1,0}g_2(x,y)=$$
$$=D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))a+D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))d.$$

Тоді

$$D^{1,0}w_{kpq}(x,y)\big|_{A_l}=D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))\big|_{A_l}a+D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))\big|_{A_l}d=$$
$$=D^{1,0}v_{kpq}(x,y)\big|_{X_l}a+D^{0,1}v_{kpq}(x,y)\big|_{X_l}d=\delta_{k,l}\delta_{(1,0),(p,q)}a+\delta_{k,l}\delta_{(0,1),(p,q)}d=$$
$$=\begin{cases} a, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,0), \\ d, \text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,1), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Так само доводиться властивість 3.

4) $$D^{2,0}w_{kpq}(x,y)=D^{1,0}\left(D^{1,0}w_{kpq}(x,y)\right)=D^{1,0}\left(D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))D^{1,0}g_1(x,y)+\right.$$
$$\left.+D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))D^{1,0}g_2(x,y)\right)=D^{1,0}\left(D^{1,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))a+\right.$$
$$\left.+D^{0,1}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))d\right)=\left(D^{2,0}v_{kpq}(g_1(x,y),g_2(x,y))D^{1,0}g_1(x,y)+\right.$$

$$+D^{1,1}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)D^{1,0}g_2(x,y)\Big)a+\Big(D^{1,1}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)D^{1,0}g_1(x,y)+$$

$$+D^{0,2}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)D^{1,0}g_2(x,y)\Big)d=D^{2,0}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)a^2+$$

$$+D^{1,1}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)2ad+D^{0,2}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)d^2.$$

Тоді

$$D^{2,0}w_{kpq}(x,y)\Big|_{A_l}=D^{2,0}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l}a^2+D^{1,1}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l}2ad+$$

$$+D^{0,2}v_{kpq}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l}d^2=D^{2,0}v_{kpq}(x,y)\Big|_{X_l}a^2+D^{1,1}v_{kpq}(x,y)\Big|_{X_l}2ad+D^{0,2}v_{kpq}(x,y)\Big|_{X_l}d^2=$$

$$\delta_{k,l}\delta_{(2,0),(p,q)}a^2+\delta_{k,l}\delta_{(1,1),(p,q)}2ad+\delta_{k,l}\delta_{(0,2),(p,q)}d^2=\begin{cases}a^2,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(2,0),\\ 2ad,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(1,1),\\ d^2,\text{ якщо } k=l,\ (p,q)=(0,2),\\ 0,\ \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Властивості 5 та 6 доводяться аналогічно. Теорему 1 доведено.

Розглянемо інтерполяційний оператор

$$Sf(x,y)=\sum_{k=1}^{3}f(A_k)w_{k00}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k10}(f)w_{k10}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k01}(f)w_{k01}(x,y)+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}C_{k20}(f)w_{k20}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k11}(f)w_{k11}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k02}(f)w_{k02}(x,y).$$

Теорема 2. Для того, щоб оператор $Sf(x,y)$ задовольняв умови

$$Sf(x,y)\Big|_{A_l}=f(x,y)\Big|_{A_l},\ D^{1,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=D^{1,0}f(x,y)\Big|_{A_l},\ D^{0,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=D^{0,1}f(x,y)\Big|_{A_l},$$

$$D^{2,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=D^{2,0}f(x,y)\Big|_{A_l},\ D^{1,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=D^{1,1}f(x,y)\Big|_{A_l},\ D^{0,2}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=D^{0,2}f(x,y)\Big|_{A_l},$$

$l=\overline{1,3}$, сталі коефіцієнти $C_{k10}(f)$, $C_{k01}(f)$, $C_{k20}(f)$, $C_{k11}(f)$, $C_{k02}(f)$, $k=\overline{1,3}$ повинні бути розв'язками таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}C_{l10}(f)a+C_{l01}(f)d=D^{1,0}f(x,y)\Big|_{A_l},\\ C_{l10}(f)b+C_{l01}(f)e=D^{0,1}f(x,y)\Big|_{A_l},\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}C_{l20}(f)a^2+C_{l11}(f)2ad+C_{l02}(f)d^2=D^{2,0}f(x,y)\Big|_{A_l},\\ C_{l20}(f)ab+C_{l11}(f)(ae+bd)+C_{l02}(f)de=D^{1,1}f(x,y)\Big|_{A_l}, \quad l=\overline{1,3}.\\ C_{l20}(f)b^2+C_{l11}(f)2be+C_{l02}(f)e^2=D^{0,2}f(x,y)\Big|_{A_l},\end{cases}\tag{9}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1, функції $w_{kpq}(x,y)$ задовольняють умову (3). Тоді

$$D^{1,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l}=\sum_{k=1}^{3}f(A_k)D^{1,0}w_{k00}(x,y)\Big|_{A_l}+\sum_{k=1}^{3}C_{k10}(f)D^{1,0}w_{k10}(x,y)\Big|_{A_l}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k01}(f) D^{1,0} w_{k01}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k20}(f) D^{1,0} w_{k20}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k11}(f) D^{1,0} w_{k11}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k02}(f) D^{1,0} w_{k02}(x,y)\Big|_{A_l} = C_{l10}(f)a + C_{l01}(f)d.$$

Аналогічно, враховуючи умову (4), маємо:

$$D^{0,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k=1}^{3} f(A_k) D^{0,1} w_{k00}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k10}(f) D^{0,1} w_{k10}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k01}(f) D^{0,1} w_{k01}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k20}(f) D^{0,1} w_{k20}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k11}(f) D^{0,1} w_{k11}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k02}(f) D^{0,1} w_{k02}(x,y)\Big|_{A_l} = C_{l10}(f)b + C_{l01}(f)e.$$

Отже, інтерполяційні умови $D^{1,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{1,0} f(x,y)\Big|_{A_l}$, $D^{0,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{0,1} f(x,y)\Big|_{A_l}$ рівносильні системі лінійних алгебраїчних рівнянь (8).

З виконання умов (5)-(7) для функцій $w_{kpq}(x,y)$ маємо рівності:

$$D^{2,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k=1}^{3} f(A_k) D^{2,0} w_{k00}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k10}(f) D^{2,0} w_{k10}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k01}(f) D^{2,0} w_{k01}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k20}(f) D^{2,0} w_{k20}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k11}(f) D^{2,0} w_{k11}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k02}(f) D^{2,0} w_{k02}(x,y)\Big|_{A_l} = C_{l20}(f)a^2 + C_{l11}(f)2ad + C_{l02}(f)d^2.$$

$$D^{1,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k=1}^{3} f(A_k) D^{1,1} w_{k00}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k10}(f) D^{1,1} w_{k10}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k01}(f) D^{1,1} w_{k01}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k20}(f) D^{1,1} w_{k20}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k11}(f) D^{1,1} w_{k11}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k02}(f) D^{1,1} w_{k02}(x,y)\Big|_{A_l} = C_{l20}(f)ab + C_{l11}(f)(ae+bd) + C_{l02}(f)de.$$

$$D^{0,2}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = \sum_{k=1}^{3} f(A_k) D^{0,2} w_{k00}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k10}(f) D^{0,2} w_{k10}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k01}(f) D^{0,2} w_{k01}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k20}(f) D^{0,2} w_{k20}(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{k=1}^{3} C_{k11}(f) D^{0,2} w_{k11}(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} C_{k02}(f) D^{0,2} w_{k02}(x,y)\Big|_{A_l} = C_{l20}(f)b^2 + C_{l11}(f)2be + C_{l02}(f)e^2.$$

Отже, інтерполяційні умови $D^{2,0}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{2,0} f(x,y)\Big|_{A_l}$, $D^{1,1}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{1,1} f(x,y)\Big|_{A_l}$, $D^{0,2}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{0,2} f(x,y)\Big|_{A_l}$ рівносильні системі лінійних алгебраїчних рівнянь (9). Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Інтерполяційний оператор $Sf\left(x,y\right)$ задовольняє інтерполяційним умовам (8)-(9), якщо:

$$C_{l10}\left(f\right)=\frac{\begin{vmatrix} D^{1,0}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & d \\ D^{0,1}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}}, \qquad C_{l01}\left(f\right)=\frac{\begin{vmatrix} a & D^{1,0}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} \\ b & D^{0,1}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}},$$

$$C_{l20}\left(f\right)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} D^{2,0}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & 2ad & d^2 \\ D^{1,1}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & ae+bd & de \\ D^{0,2}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & 2be & e^2 \end{vmatrix}, \quad C_{l11}\left(f\right)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} a^2 & D^{2,0}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & d^2 \\ ab & D^{1,1}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & de \\ b^2 & D^{0,2}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} & e^2 \end{vmatrix},$$

$$C_{l02}\left(f\right)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} a^2 & 2ad & D^{2,0}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} \\ ab & ae+bd & D^{1,1}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} \\ b^2 & 2be & D^{0,2}f\left(x,y\right)\Big|_{A_l} \end{vmatrix}, \quad l=\overline{1,3}, \qquad \text{де } \Delta^*=\begin{vmatrix} a^2 & 2ad & d^2 \\ ab & ae+bd & de \\ b^2 & 2be & e^2 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо функції $W_{ij}\left(x,y\right)=V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)$.

Теорема 3. Для будь-якого $l\in\left\{1,2,3\right\}$ функції $W_{ij}\left(x,y\right),\left(i,j\right)\in Q$ задовольняють умови:

$$D^{\gamma_1,\gamma_2}W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=0,\ 0\le\gamma_1+\gamma_2\le 2.$$

Доведення. Враховуючи означення функцій $W_{ij}\left(x,y\right)$, властивості функцій $V_{ij}\left(x,y\right)$, властивості афінного перетворення σ, маємо:

$$D^{0,0}W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}=V_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{X_l}=0.$$

$$D^{1,0}W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}D^{1,0}g_1\left(x,y\right)\Big|_{A_l}+D^{0,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}\times$$
$$\times D^{1,0}g_2\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}V_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{X_l}a+D^{0,1}V_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{X_l}d=0\cdot a+0\cdot d=0.$$

$$D^{0,1}W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}D^{0,1}g_1\left(x,y\right)\Big|_{A_l}+D^{0,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}\times$$
$$\times D^{0,1}g_2\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}V_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{X_l}b+D^{0,1}V_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{X_l}e=0\cdot b+0\cdot e=0.$$

$$D^{2,0}W_{ij}\left(x,y\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}\left(D^{1,0}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)D^{1,0}g_1\left(x,y\right)+D^{0,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times D^{1,0}g_2\left(x,y\right)\right)\Big|_{A_l}=D^{1,0}\left(D^{1,0}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)a+D^{0,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)d\right)\Big|_{A_l}=$$
$$=\left(\left(D^{2,0}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)D^{1,0}g_1\left(x,y\right)+D^{1,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)D^{1,0}g_2\left(x,y\right)\right)a+\right.$$
$$\left.+\left(D^{1,1}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)D^{1,0}g_1\left(x,y\right)+D^{0,2}V_{ij}\left(g_1\left(x,y\right),g_2\left(x,y\right)\right)D^{1,0}g_2\left(x,y\right)\right)d\right)\Big|_{A_l}=$$

$$= D^{2,0}V_{ij}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l} a^2 + D^{1,1}V_{ij}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l} 2ad + D^{0,2}V_{ij}\left(g_1(x,y),g_2(x,y)\right)\Big|_{A_l} d^2 =$$

$$= D^{2,0}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_l} a^2 + D^{1,1}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_l} 2ad + D^{0,2}V_{ij}(x,y)\Big|_{X_l} d^2 = 0\cdot a^2 + 0\cdot 2ad + 0\cdot d^2 = 0.$$

Аналогічно одержуємо рівності: $D^{1,1}W_{ij}(x,y)\Big|_{A_l} = 0$, $D^{0,2}W_{ij}(x,y)\Big|_{A_l} = 0$. Теорему 3 доведено.

Розглянемо оператор $Of(x,y) = Sf(x,y) + \sum\limits_{(i,j)\in Q} C_{ij}(f)W_{ij}(x,y)$, де $Sf(x,y)-$ оператор, який задовольняє умови теореми 2.

Теорема 4. Оператор $Of(x,y)$ для будь-якого $l\in\{1,2,3\}$ та для будь-яких сталих $C_{ij}(f),(i,j)\in Q$ задовольняє умови:

$$D^{\gamma_1,\gamma_2}Of(x,y)\Big|_{A_l} = D^{\gamma_1,\gamma_2} f(x,y)\Big|_{A_l},\ 0\le\gamma_1+\gamma_2\le 2.$$

Доведення. Згідно з теоремою 3, функції $W_{ij}(x,y),(i,j)\in Q$ дорівнюють нулю (разом з усіма своїми похідними до 2-го порядку включно) у вершинах трикутника $\triangle A_1A_2A_3$, тому

$$D^{\gamma_1,\gamma_2}Of(x,y)\Big|_{A_l} = D^{\gamma_1,\gamma_2}Sf(x,y)\Big|_{A_l} + \sum_{(i,j)\in Q} C_{ij}(f)D^{\gamma_1,\gamma_2}W_{ij}(x,y)\Big|_{A_l} = D^{\gamma_1,\gamma_2}Sf(x,y)\Big|_{A_l} +$$

$$+\sum_{(i,j)\in Q} C_{ij}(f)\cdot 0 = D^{\gamma_1,\gamma_2}Sf(x,y)\Big|_{A_l} = D^{\gamma_1,\gamma_2} f(x,y)\Big|_{A_l}.$$

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Для того, щоб оператор $Of(x,y)$ задовольняв умови $\left.\dfrac{\partial Of(x,y)}{\partial\nu_{ij}}\right|_{P_{ij}} = \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{ij}}\right|_{P_{ij}}$, сталі коефіцієнти $C_{ij}(f),\ (i,j)\in Q$ повинні визначатися формулами:

$$C_{12}(f) = \frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_1A_2|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{12}}\right|_{P_{12}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{12}}\right|_{P_{12}}\right),$$

$$C_{23}(f) = \frac{\Delta\sqrt{2}}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_2A_3|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{23}}\right|_{P_{23}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{23}}\right|_{P_{23}}\right),$$

$$C_{31}(f) = \frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_3A_1|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{31}}\right|_{P_{31}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{31}}\right|_{P_{31}}\right),$$

де $|A_iA_j| = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$ – довжина відрізка A_iA_j, P_{ij} – середина відрізка A_iA_j, ν_{ij} – внутрішня нормаль до сторони A_iA_j трикутника $\triangle A_1A_2A_3$.

Доведення. $\left.\dfrac{\partial Of(x,y)}{\partial\nu_{mn}}\right|_{P_{mn}} = \left.\dfrac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{mn}}\right|_{P_{mn}} + \sum\limits_{(i,j)\in Q} C_{ij}\left.\dfrac{\partial W_{ij}(x,y)}{\partial\nu_{mn}}\right|_{P_{mn}} = \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{mn}}\right|_{P_{mn}},\quad (m,n)\in Q.$

Знайдемо значення $\left.\dfrac{\partial W_{ij}(x,y)}{\partial\nu_{mn}}\right|_{P_{mn}}$ для всіх $(i,j),(m,n)\in Q$.

$$\left.\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} = \frac{\operatorname{sign}(\Delta_{312})}{|A_1A_2|}\left.\left((y_1-y_2)\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial x} - (x_1-x_2)\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial y}\right)\right|_{P_{12}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(\Delta)}{|A_1A_2|}\left((y_1-y_2)\left(\left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_1}\right|_{P_{12}}\left.\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|_{P_{12}} + \left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_2}\right|_{P_{12}}\left.\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|_{P_{12}}\right)+\right.$$

$$\left.+(x_2-x_1)\left(\left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_1}\right|_{P_{12}}\left.\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|_{P_{12}} + \left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_2}\right|_{P_{12}}\left.\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|_{P_{12}}\right)\right)=$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(\Delta)}{|A_1A_2|}\left((y_1-y_2)d+(x_2-x_1)e\right) = \frac{\dfrac{\operatorname{sign}(\Delta)\left((y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)\right)^2}{\Delta}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} = \frac{\operatorname{sign}(\Delta)\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{\Delta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(\Delta)|A_1A_2|}{\Delta}.$$

Ми скористалися тим, що

$$\left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_1}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial V_{12}(x,y)}{\partial x}\right|_{M_{12}} = 0,\ \left.\frac{\partial V_{12}(g_1(x,y),g_2(x,y))}{\partial g_2}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial V_{12}(x,y)}{\partial y}\right|_{M_{12}} = 1,$$

де $M_{12}\left(\frac{1}{2},0\right)$ – образ точки P_{12} при перетворенні σ.

Аналогічно одержуємо:

$$\left.\frac{\partial W_{23}(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} = \frac{\operatorname{sign}(\Delta)|A_2A_3|}{\Delta\sqrt{2}},\quad \left.\frac{\partial W_{31}(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} = \frac{\operatorname{sign}(\Delta)|A_3A_1|}{\Delta},$$

$$\left.\frac{\partial W_{23}(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial W_{31}(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} = \left.\frac{\partial W_{31}(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} = \left.\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} = \left.\frac{\partial W_{23}(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} = 0.$$

Отже, $\left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} + C_{12}(f)\left.\frac{\partial W_{12}(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}}$ і рівність $\left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}}$ буде мати місце при $C_{12}(f) = \frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_1A_2|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{12}}\right|_{P_{12}}\right)$.

Аналогічно

$$\left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} = \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} + C_{23}(f)\left.\frac{\partial W_{23}(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}},\ \left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} = \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} + C_{31}(f)\left.\frac{\partial W_{31}(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}}$$

і рівності $\left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}}$, $\left.\frac{\partial Of(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}}$ будуть мати місце при

$$C_{23}(f) = \frac{\Delta\sqrt{2}}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_2A_3|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{23}}\right|_{P_{23}}\right), C_{31}(f) = \frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_3A_1|}\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}} - \left.\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial \nu_{31}}\right|_{P_{31}}\right).$$

Теорему 5 доведено.

З теорем 2, 4, 5 випливає наступна теорема.

Теорема 6. Оператор $Of(x,y)=Sf(x,y)+\sum_{(i,j)\in Q}C_{ij}(f)W_{ij}(x,y)$, у якому

$$Sf(x,y)=\sum_{k=1}^{3}f(A_k)w_{k00}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k10}(f)w_{k10}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k01}(f)w_{k01}(x,y)+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}C_{k20}(f)w_{k20}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k11}(f)w_{k11}(x,y)+\sum_{k=1}^{3}C_{k02}(f)w_{k02}(x,y),$$

а коефіцієнти $C_{kpq}(f)$ $\left(k=\overline{1,3},\ 0\le p+q\le 2\right)$, $C_{ij}(f)$ $\left((i,j)\in Q\right)$ обчислюються за формулами:

$$C_{l10}(f)=\frac{\begin{vmatrix} D^{1,0}f(x,y)\big|_{A_l} & d \\ D^{0,1}f(x,y)\big|_{A_l} & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}},\qquad C_{l01}(f)=\frac{\begin{vmatrix} a & D^{1,0}f(x,y)\big|_{A_l} \\ b & D^{0,1}f(x,y)\big|_{A_l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}},$$

$$C_{l20}(f)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} D^{2,0}f(x,y)\big|_{A_l} & 2ad & d^2 \\ D^{1,1}f(x,y)\big|_{A_l} & ae+bd & de \\ D^{0,2}f(x,y)\big|_{A_l} & 2be & e^2 \end{vmatrix},\quad C_{l11}(f)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} a^2 & D^{2,0}f(x,y)\big|_{A_l} & d^2 \\ ab & D^{1,1}f(x,y)\big|_{A_l} & de \\ b^2 & D^{0,2}f(x,y)\big|_{A_l} & e^2 \end{vmatrix},$$

$$C_{l02}(f)=\frac{1}{\Delta^*}\begin{vmatrix} a^2 & 2ad & D^{2,0}f(x,y)\big|_{A_l} \\ ab & ae+bd & D^{1,1}f(x,y)\big|_{A_l} \\ b^2 & 2be & D^{0,2}f(x,y)\big|_{A_l} \end{vmatrix},\quad l=\overline{1,3},$$

$$C_{12}(f)=\frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_1A_2|}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{12}}\bigg|_{P_{12}}-\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{12}}\bigg|_{P_{12}}\right),$$

$$C_{23}(f)=\frac{\Delta\sqrt{2}}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_2A_3|}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{23}}\bigg|_{P_{23}}-\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{23}}\bigg|_{P_{23}}\right),$$

$$C_{31}(f)=\frac{\Delta}{\operatorname{sign}(\Delta)|A_3A_1|}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{31}}\bigg|_{P_{31}}-\frac{\partial Sf(x,y)}{\partial\nu_{31}}\bigg|_{P_{31}}\right),$$

володіє властивостями:

1) $D^{\gamma_1,\gamma_2}Of(x,y)\big|_{A_l}=D^{\gamma_1,\gamma_2}f(x,y)\big|_{A_l}$, $0\le\gamma_1+\gamma_2\le 2$;

2) $\dfrac{\partial Of(x,y)}{\partial\nu_{ij}}\bigg|_{P_{ij}}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\nu_{ij}}\bigg|_{P_{ij}}$.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано побудову інтерполяційного полінома Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1A_2A_3$, що базується на використанні базисних поліномів на “одиничному” трикутнику $\triangle X_1X_2X_3$.

Перспективи подальших наукових розвідок вбачаємо в дослідженні похибки наближення для запропонованих формул та побудові інтерполяційно-апроксимаційних сплайнів 5-го степеня на довільній тріангульованій сітці вузлів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283-296.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, no. 211. – P. 929-941.
3. Zlamal M. On the finite element method / M. Zlamal // Numer. Math. – 1968. – Vol. 12. – P. 394-409.
4. Bramble J. H. Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809-820.
5. Литвин О. Н. 2D кубические интерполяционные сплайны на нерегулярной сетке узлов / О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Компьютерная математика. – 2013. – № 1. – С. 100-109.
6. Сергиенко И. В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 25-33.
7. Байдакова Н. В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике / Н. В. Байдакова // Труды Института математики и механики. Теории функций: Сб. науч. трудов. – 2005. – № 2. – С. 47-52.
8. Матвеева Ю. В. Об интерполяции кубическими многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных / Ю. В. Матвеева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 28-32.

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), “Interpolation polynomials on the triangle”, *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), “Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type”, *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Zlamal, M. (1968), “On the finite element method”, *Numer. Math.*, vol. 12, pp. 394-409.
4. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), “Triangular elements in the finite element method”, *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
5. Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2013), “2D cubic interpolation splines on irregular grid of nodes”, *Kompyuternaya matematika*, no. 1, pp. 100-109.
6. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), “Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle”, *Kibernetika i sistemnyiy analiz,* vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
7. Baydakova, N.V. (2005), “A method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle”, *Trudyi Instituta matematiki i mehaniki. Teorii funktsiy: Sb. nauch. trudov*, no. 2, pp. 47-52.
8. Matveeva, Yu.V. (2007), “Interpolation by cubic polynomials of the third degree on a triangle using mixed derivatives”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya matematika. Mehanika. Informatika*, vol. 7, issue 1, pp. 28-32.