

REFERENCES

1. Zinchuk, M.O. and Novyts'kyu, V.V. (2007), "Stability and stabilization linear parametric dynamic systems", *Zb. prats' In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
2. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), [Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition], Clarendon press, Oxford.
3. Novyts'kyu, V.V. (2004), *Rivnyannya Lyapunova dlya mayzhe konservatyvnykh system* [Lyapunov equations for almost conservative systems], Prepr. In-t matematyky NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
4. Prasolov, V.V. (1996), *Zadachy u teoremy lyneynoy alheby* [Problems and theorems of linear algebra], Nauka, Moscow, Russia.
5. Hantmakher, F.R. (1988), *Teoryya matryts* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. техн. н., профессор, Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, Днепропетровск, Украина*

stroller@rambler.ru

В статье рассматривается обратная задача теории бифуркаций в теории тонкостенных систем как задача диагностики предбифуркационного состояния возмущенной тонкостенной системы. Используется топологический предвестник бифуркации, построенный на основе характерных последовательностей форм деформации, полученных путём кластеризации обучающей выборки, сгенерированной на основе закритических решений нелинейной краевой задачи теории оболочек. Предложенный метод решения был применён к идентификации предбифуркационного состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, близкого к критическому, подвергнутой импульсному воздействию.

Ключевые слова: обратная задача теории бифуркаций, топологический предвестник, структура ветвления решения, тонкостенная оболочка.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ БІФУРКАЦІЙ У ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. техн. н., професор, Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, Україна*

stroller@rambler.ru

У статті розглянуто обернену задачу теорії бифуркацій у теорії тонкостінних систем як задачу діагностики передбифуркаційного стану збуреної тонкостінної системи. Використовується топологічний передвісник бифуркації, побудований на основі характерних послідовностей форм деформації, одержаних за допомогою навчальної вибірки, згенерованої з закритичних розв'язків нелінійної крайової задачі теорії оболонок. Запропонований метод розв'язання застосовано до ідентифікації передбифуркаційного стану циліндричної оболонки, що знаходиться під дією зовнішнього тиску, близького до критичного, що піддана імпульсному впливу.

Ключові слова: обернена задача теорії бифуркацій, топологічний передвісник, структура галуження розв'язку, тонкостінна оболонка.

INVERSE PROBLEM OF BIFURCATION THEORY FOR THIN-WALLED SYSTEMS THEORY

Obodan N. I., D Sc (Tech.), Adlutcky V. J., Ph D (Phys.-Math.), Gromov V. O., Ph D (Phys.-Math.)

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina, ave., 72, Dnepropetrovsk, Ukraine*

stroller@rambler.ru

Paper focuses on an inverse bifurcation problem in thin-walled systems theory. The problem implies identification pre-bifurcation state of perturbed thin-walled system. The topological precursor used is based on typical sequences of deformed states extracted from clustered post-critical solutions of non-linear boundary problem of thin-walled systems theory. The proposed approach was employed to identify a pre-bifurcation state of a cylindrical shell under uniform pressure (close to the critical) subjected to a pulse impact.

Key words: inverse problem of bifurcation theory, topological precursor, bifurcation structure, thin-walled shell.

ВВЕДЕНИЕ

Широкий спектр явлений, связанных с качественной сменой поведения нелинейных систем, делает необходимым анализ явлений, непосредственно предшествующих бифуркации: «флагов», «отпечатков пальцев» катастрофы, либо предвестников бифуркации [1]. Именно в определении и анализе предвестников бифуркации и заключается обратная задача теории бифуркаций.

Магистральным направлением здесь является анализ динамических систем с шумами различной природы, причём предвестником бифуркации служит резкое увеличение амплитуды шума при приближении к точке бифуркации, а также изменение его характеристик. Такого рода предвестники получили название шумовых. Здесь возможно построение предвестников бифуркации для детерминированных систем с аддитивным шумом той или иной природы и для стохастических систем [2]. Так, в работе [3] исследуется изменение спектра шума при приближении к аттрактору типа предельный цикл; серия работ [4, 5] посвящена предбифуркационному усилению шума в нелинейных отображениях. Работа [1] ставит цель не просто предсказать приближение бифуркации, но и определить её тип по виду распределения случайных составляющих наблюдаемой системы.

Существенным недостатком шумовых предвестников является необходимость наличия для их вычисления весьма длинных стационарных временных рядов, что невозможно в случае нестационарных или сильно зашумленных данных [2]. Естественно, данное требование несовместимо с необходимостью оперативного принятия решений в системах быстрой оценки живучести.

В некоторой степени указанного недостатка лишены топологические предвестники. Так, в работе [2] рассматривается предвестник, основанный на статистическом анализе структуры последовательности, генерируемой отображением Пуанкаре исследуемой системы. Метод основывается на независимости указанной структуры от конкретного вида дифференциальных уравнений в окрестности той или иной бифуркации и существовании характерных последовательностей наблюдений в данной окрестности. В частности, в указанной статье авторы рассматривают случай бифуркации удвоения периода предельного цикла. В целом, применение топологических предвестников для предсказания бифуркаций в конкретной системе требует знания возможных бифуркаций.

Ещё один способ построения топологических предвестников, связанный с обнаружением неустойчивых предельных циклов (UPO – unstable periodic orbit), представлен в работах [6, 7]. В работе [8] решается обратная задача теории бифуркаций для суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа (бифуркации рождения цикла); представлены результаты вычислительного и натурального эксперимента. Здесь в качестве предвестника бифуркации

выступает явление когерентного резонанса (coherence resonance, CR), состоящее в возникновении согласованности в индуцированных шумом колебаниях различных элементов системы.

В настоящей работе предлагается подход к решению обратной задачи бифуркации в теории тонкостенных систем, в рамках которого в качестве предвестника бифуркации выступают характерные последовательности форм деформации, фиксируемые на закритических ветвях решения нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем. Данный подход предполагает знание полной бифуркационной картины нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем. Указанную картину для случаев тонкостенной цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, и цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного осевого сжатия, можно найти в монографии [9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о диагностике предбифуркационного состояния тонкостенной системы, подвергнутой воздействию, не предусмотренному проектом; состояние описывается последовательностью форм деформации во времени путём мониторинга указанной системы. Модель изменения наблюдаемой формы деформирования представляет собой последовательность следующих друг за другом форм деформации. Решение обратной задачи путём отыскания предвестников бифуркаций предполагает установление характерных последовательностей форм, ведущих к потере устойчивости.

Массовый численный эксперимент показал, что как в случае колебаний вокруг исходного состояния, так и в случае процесса потери устойчивости наблюдаемые формы деформации по отдельности могут быть весьма схожими, однако последовательности форм, соответствующие первому и второму случаю, весьма отличны друг от друга. Во втором случае последовательность наблюдаемых в течении предбифуркационного процесса форм, может быть соотнесена с формами, наблюдаемыми на некотором участке закритической ветви, в первом – представляют собой хаотическую последовательность форм.

Соответственно, в качестве предвестника бифуркации здесь выступает характерная последовательность форм деформации оболочки, близких к тем, которые наблюдаются на закритических ветвях решения нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем.

Обратная задача определения апостериорного бифуркационного состояния может быть сформулирована как

$$C_{\text{bif}} = \arg \min_{C \in \mathfrak{Z}} \rho_C(C, C^*), \quad (1)$$

где $\rho_C(C, C^*)$ – расстояние в евклидовой метрике между подмножеством C^* последовательности наблюдаемых и последовательностью C возможных закритических состояний тонкостенной оболочки, \mathfrak{Z} – множество предвестников бифуркации.

Наблюдаемая последовательность форм $C^* = \{u^*(t_0), u^*(t_1), \dots, u^*(T)\}$, отражает поведение тонкостенной системы как последовательность состояний $u^*(t_i) = \{u_k^*(t_i)\}$, описываемых с помощью значений перемещений в фиксированных $k = \overline{1, K}$ точках поверхности оболочки в равноотстоящие моменты времени t_i . Здесь и далее T – момент времени, в который осуществляется идентификация.

Предвестник бифуркации также представляет собой характерную последовательность форм деформации $C = \{u_C(T - t_0^{(C)}), u_C(T - t_1^{(C)}), \dots, u_C(T - t_{t_c}^{(C)})\}$, которую можно поставить в соответствие неравноотстоящим моментам времени $T - t_0^{(C)}, T - t_1^{(C)}, \dots, T - t_{t_c}^{(C)}$, где величины

$t_0^{(C)}, t_1^{(C)}, \dots, t_{t_c}^{(C)}$ характерны для данного конкретного предвестника. Эвклидово расстояние $\rho_C(C, C^*)$ в момент времени T вычисляется как сумма эвклидовых расстояний между наблюдаемыми $u^*(T - t_s^{(C)})$ и характерными для данного предвестника $u_C(T - t_s^{(C)})$ формами деформации:

$$\rho_C(C, C^*) = \sum_{s=0}^{t_c} \rho(u_C(T - t_s^{(C)}), u^*(T - t_s^{(C)})). \quad (2)$$

Под моделью обратной задачи будем понимать функциональное отображение $F: C^* \rightarrow \mathfrak{Z}$, ставящее в соответствие последовательности наблюдаемых форм деформации C^* конкретный предвестник из \mathfrak{Z} .

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для построения топологических предвестников бифуркации в теории тонкостенных систем осуществлялось выявление характерных последовательностей форм деформации путём кластеризации форм деформации, соответствующих совокупности закритических ветвей решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи: в такой постановке каждый кластер будет связан с некоторым участком закритической ветви.

Алгоритм состоит из двух частей. Первая – это кластеризация множества последовательностей закритических форм, составленных из наблюдений, соответствующих множеству предопределённых шаблонов, и последующего выявления характерных последовательностей наблюдений (центры кластеров). Вторая часть предусматривает идентификацию наблюдаемой динамики с использованием полученных характерных последовательностей.

Обучающая выборка для первой части алгоритма формировалась из векторов, составленных из последовательностей закритических форм деформации по определённому шаблону: под шаблоном здесь понимается фиксированная последовательность расстояний между позициями наблюдений в последовательности, которые займут соседние позиции в формируемом векторе наблюдений. Используемый алгоритм кластеризации (модифицированный алгоритм Уишарта [10]) применялся к выборкам, полученным с помощью всех возможных шаблонов длины 4. Для каждой такой выборки формировался свой набор кластеров.

Перед началом кластеризации формы нормировались максимальным значением прогиба w_{\max} , что позволило кластеризовать не характерные амплитуды, но характерные формы деформации. Это приводит к снижению числа кластеров. При сравнении характерных последовательностей (центров кластеров) с последовательностями форм, наблюдаемыми в конечноэлементном расчёте, последние подвергались той же процедуре нормализации. В качестве расстояния везде использовалось эвклидово; векторы формировались из значений наблюдений в точках фиксированной сетки.

Одному участку закритической ветви между двумя соседними экстремумами обычно отвечают один-три кластера. В среднем участок закритической ветви, отвечающий одному кластеру, соответствует 5-7% вариации в значении параметра нагружения.

Таким образом, одному значению параметра внешней нагрузки соответствует число кластеров, равное числу закритических решений нелинейной краевой задачи, существующих для данного значения параметра нагружения, что делает возможным быстрое решение задачи диагностики (для заданного значения параметра нагружения). Общее число кластеров также невелико. Совокупность центров таким образом построенных кластеров образует множество топологических предвестников бифуркации \mathfrak{Z} для обратной задачи бифуркации в теории тонкостенных систем.

Если, при этом алгоритм не может отнести наблюдаемую последовательность форм ни к одному из кластеров (непредсказываемые точки в терминах парадигмы предсказания на основе кластеризации), считается, что наблюдаются колебания системы вокруг формы деформации, соответствующей докритической ветви, – внешнего возмущения оказалось недостаточно, чтобы вывести систему в закритическую область.

Следует подчеркнуть, что центр каждого из кластеров может рассматриваться как усреднённое представление различных вариантов поведения теряющей устойчивость тонкостенной системы в окрестности соответствующего участка закритической ветви. Указанное усреднение приводит к ухудшению качества идентификации за счёт использования средних значений (идентификация осуществляется с использованием центров кластеров), и одновременно к её улучшению, вызванному взаимным уничтожением случайных составляющих противоположных знаков, неизбежно присутствующих в реальных наблюдениях и расчётах. Используемый метод кластеризации задаёт вариант компромисса между этими тенденциями.

При идентификации наблюдаемой последовательности форм (вторая часть алгоритма) использовались центры полученных кластеров, рассчитанные для всех используемых шаблонов. А именно, для текущей позиции (алгоритм пытается осуществить идентификацию, начиная с самого первого наблюдения) из предыдущих наблюдений (форм деформации) составлялись векторы в соответствии с каждым из использованных шаблонов таким образом, чтобы последняя позиция в шаблоне совпадала с позицией, для которой требуется осуществить идентификацию.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛУЧАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Приведенный выше алгоритм был применён для идентификации предбифуркационного состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления λ , близкого к критическому, подвергнутой импульсному воздействию. Расчёты проводились в пакете конечноэлементного анализа COSMOSM 2.6. На рис. 1 представлены последовательности форм деформации, отвечающие уровню внешнего давления $\lambda = 0.9$, для первой последовательности амплитуда приложенного импульса составляет $A = 50.0 H$, для второй – $A = 100.0 H$.

Здесь важно отметить, что как в случае сохранения близкого к исходному состояния (см. рис. 1, верхняя последовательность), так и в случае процесса потери устойчивости (нижняя последовательность), наблюдаемые формы деформации по отдельности могут быть весьма схожими, однако последовательности форм, соответствующие первому и второму случаю, весьма отличны друг от друга. Во втором случае последовательность, наблюдаемых в течении предбифуркационного процесса форм, может быть соотнесена с формами, наблюдаемыми на некотором участке закритической ветви, в первом – представляют собой хаотическую последовательность форм.

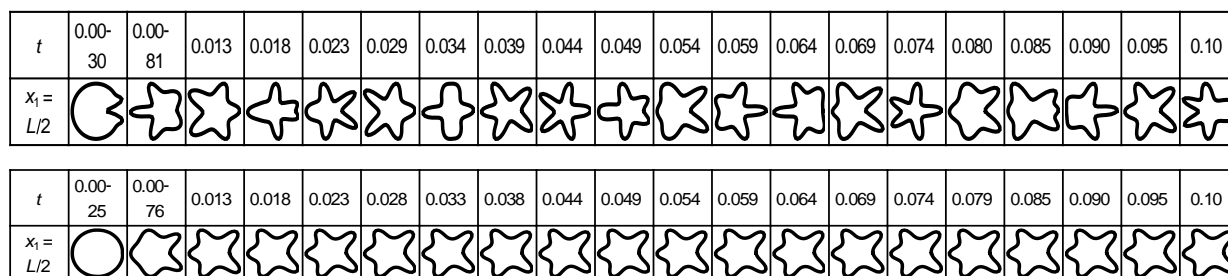


Рис. 1. Характерные последовательности форм деформации: (верхняя) сохранение деформированного состояния, близкого к исходному ($A = 50.0 H$); (нижняя) потеря устойчивости (конечная форма деформации – регулярная, пять волн) ($A = 100.0 H$)

Для сравнения в табл. 1 [9] приведены формы закритической деформации для случая цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, отвечающие указанным в левой колонке значениям нагрузки (нагрузка выражена в долях оценки критической нагрузки, полученной в рамках линейной теории).

Таблица 1 – Характерные закритические формы деформации

| Уровень нагрузки | Форма | | | Форма | | | Форма | | | Форма | | | Форма | | |
|--|--|-------------------------------|--|--|-------------------------------|--|--|-------------------------------|--|--|-------------------------------|--|--|-------------------------------|-------------------------------|
| | $\ w\ _{L_2}$ | $\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$ | $\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$ | $\ w\ _{L_2}$ | $\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$ | $\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$ | $\ w\ _{L_2}$ | $\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$ | $\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$ | $\ w\ _{L_2}$ | $\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$ | $\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$ | $\ w\ _{L_2}$ | $\frac{\ w\ _{L_2}}{\ w\ _C}$ | $\frac{\ w\ _{w^2}}{\ w\ _C}$ |
| | Описание | | | Описание | | | Описание | | | Описание | | | Описание | | |
| $\lambda = 0.9$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 11.2 | 0.76 | 14.1 | 5.94 | 0.97 | 17.1 | 16.5 | 0.98 | 8.9 | 52.1 | 1.03 | 6.65 | 15.1 | 1.05 | 25.6 |
| | 3l:6 _{min} → 5 _{min} | | | 5 _{max} (5 _{min}) | | | 4 _{max} (4 _{min}) | | | 3 _{max} (3 _{min}) | | | 6 _{max} (6 _{min}) | | |
| $\lambda = 0.8$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 6.67 | 0.54 | 8.71 | 7.14 | 0.67 | 5.31 | 65.9 | 0.72 | 4.81 | 7.12 | 0.74 | 12.1 | 50.5 | 0.94 | 8.3 |
| | 3l:5 _{min} → 4 _{min} | | | 2l:6 _{min} → 4 _{min} | | | 3l:5 _{max} → 3 _{max} | | | 2l:5 _{min} → 4 _{max} | | | 2l:4 _{max} → 3 _{max} | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 18.4 | 0.99 | 9.2 | 55.1 | 1.02 | 7.55 | 23.0 | 1.03 | 15.2 | | | | | | |
| | 48.0 | 1.02 | 13.6 | 64.6 | 1.07 | 8.86 | 10.5 | 1.04 | 17.7 | | | | | | |
| 4 _{min} (4 _{max}) | | | 3 _{max} (3 _{min}) | | | 5 _{max} (5 _{min}) | | | | | | | | | |
| $\lambda = 0.7$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 8.48 | 0.49 | 7.18 | 23.2 | 0.61 | 6.97 | 32.2 | 0.64 | 8.36 | 8.82 | 0.7 | 10.7 | 12.7 | 0.7 | 10. |
| | | | | 16.2 | 0.78 | 11.5 | 15.1 | 0.76 | 11.6 | | | | 25.1 | 0.72 | 1 |
| 3l:5 _{min} → 4 _{min} | | | 3l:5 _{max} → 3 _{max} | | | 3l:5 _{max} → 3 _{max} | | | 2l:5 _{min} → 4 _{max} | | | 2l:5 _{max} → 3 _{min} | | | |
| | | | 3l:6 _{min} → 5 _{min} | | | | | | | | | 2l:6 _{min} → 5 _{min} | | | |

Продолжение табл. 1

| | | | | | |
|-----------------|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
| | 13.1 0.77 10.9 13.0 0.77 10.9 15.3 0.81 12.3 15.3 0.81 12.2 | 36.7 0.81 6.95 35.7 0.81 7.01 | 79.2 0.98 6.28 | 20.0 0.99 9.8 44.0 1.03 12.4 | 52.1 1.03 6.5 62.7 1.06 5 7.8 6 |
| | 4l : 5 _{max} → 3 _{min} 2l : 6 _{max} → 5 _{min} | 3l : 5 _{max} → 3 _{min} 3l : 6 _{max} → 5 _{min} | 2l : 4 _{max} → 3 _{max} | 4 _{min} (4 _{max}) | 3 _{max} (3 _{min}) |
| $\lambda = 0.6$ | | | | | |
| | 12.4 .49 6.1 22.3 .61 6.2 | 13.4 0.68 8.91 30.4 0.78 7.07 | 23.0 0.82 9.67 35.3 0.91 8.01 | 22.4 0.97 10.4 39.2 1.02 11.3 | 57.9 1.03 7.1 58.3 1.06 9 7.2 4 |
| | 3l : 5 _{min} → 4 _{min} | 2l : 5 _{min} → 4 _{max} | 3l : 5 _{min} → 3 _{max} | 4 _{min} (4 _{max}) | 3 _{max} (3 _{min}) |
| $\lambda = 0.5$ | | | | | |
| | 25.8 0.85 8.82 | 27.3 0.89 9.16 | 26.2 0.92 10.4 | 24.5 0.95 10.5 25.1 1.01 10.8 | |
| | 2l : 5 _{min} → 4 _{max} | 3l : 5 _{min} → 4 _{min} | 2l : 6 _{min} → 4 _{min} | 4 _{min} (4 _{max}) | |

Было установлено, что, несмотря на схожесть отдельных форм деформации в двух указанных случаях, последовательности форм, ведущих к потере устойчивости, типичны и отвечают характерным последовательностям, выделенным в процессе кластеризации форм деформации, соответствующих устойчивым участкам закритических ветвей. На рис. 2 представлено сопоставление наблюдаемых форм деформации с характерными последовательностями (центрами кластеров); в средней строке представлены формы, полученные в конечноэлементном расчёте, в последней – центры выбранных алгоритмом кластеров. Здесь первый кластер отвечает регулярной ветви с четырьмя волнами (ср. табл. 1, $\lambda = 0.9$, третья форма слева), второй – с пятью волнами (ср. табл. 1, $\lambda = 0.9$, вторая форма слева), третий – первому восходящему участку локальной ветви (ср. Табл. 1, $\lambda = 0.6$, первая форма слева).

Для корректной идентификация предбифуркационного состояния достаточно осуществлять сопоставление результатов наблюдений с центрами кластеров на временном отрезке $0 < t < t^* \sim 2 \cdot 10^{-2}$ (что существенно меньше времени развития больших перемещений $t \sim 10^{-1}$); при этом классификация осуществляется за время порядка $t_p \sim 10^{-4}$; в случае неотнесения наблюдаемой последовательности форм ни в один из классов считается, что наблюдаются

колебания в окрестности докритического состояния. Это позволяет диагностировать процесс потери устойчивости до его завершения, что актуально для систем автоматической диагностики.

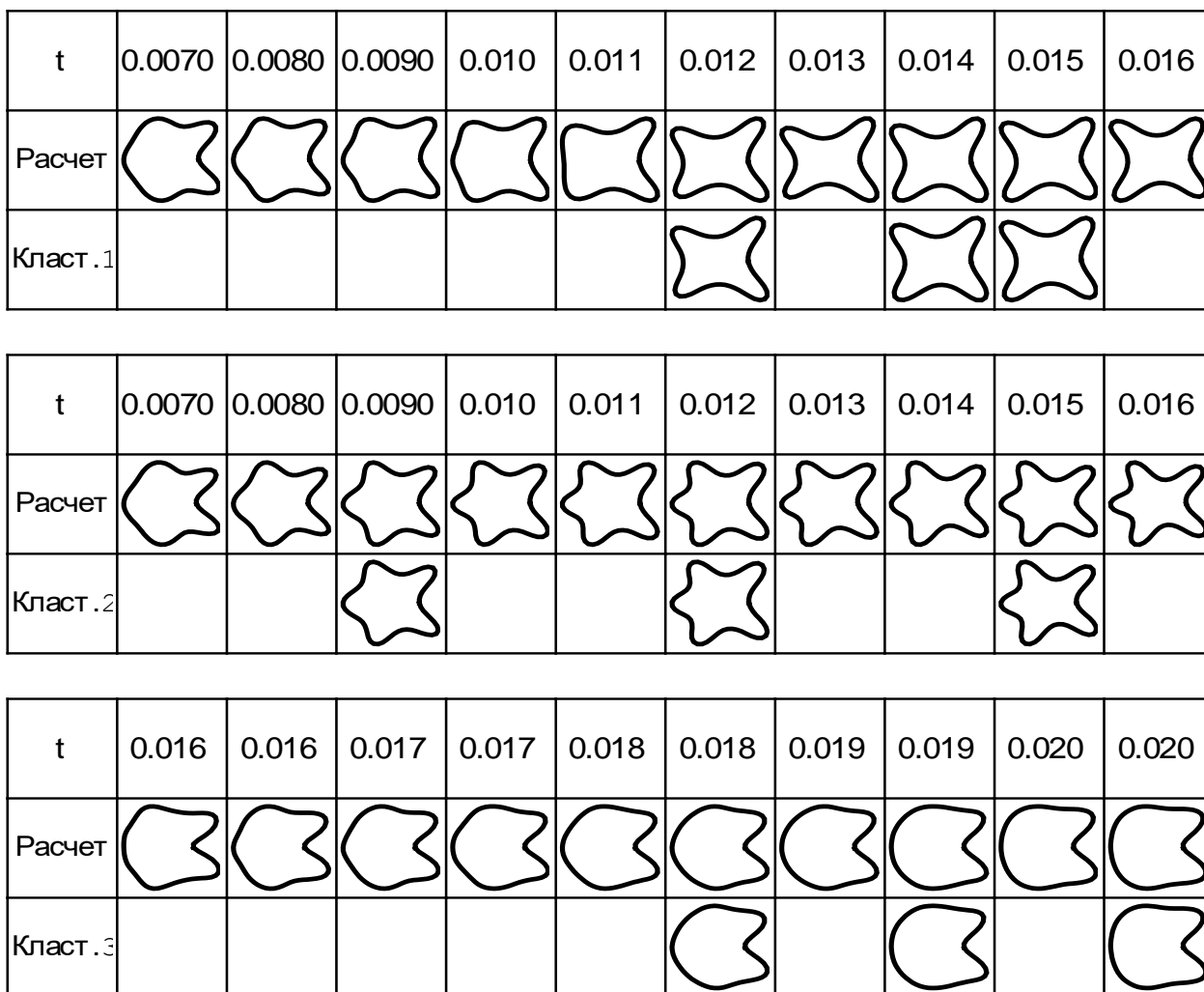


Рис. 3. Сопоставление форм деформации, полученных в конечноэлементном расчёте (средняя строка) с характерными последовательностями

ВЫВОДЫ

1. Для фиксации и оценки предбифуркационного состояния могут быть использованы характерные последовательности форм деформации, полученные путём кластеризации обучающей выборки, сгенерированной на основе закритических решений нелинейной краевой задачи теории оболочек.
2. Необходимым предусловием формирования обучающей выборки является знание полной картины ветвления нелинейной краевой задачи теории тонкостенных систем, что достигается на путях решения прямой задачи теории бифуркаций.
3. Предлагаемый метод прогноза предбифуркационного состояния может быть использован для оценки уязвимости реальных тонкостенных конструкций, находящихся в условиях мониторинга, в процессе эксплуатации при аварийных внешних воздействиях

ЛИТЕРАТУРА

1. Зульпукаров М.-Г. М. Обратная задача теории бифуркаций в динамических системах с шумом / М.-Г. М. Зульпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов // Препринт ИПМ РАН. – 2005. http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005_39.pdf.

2. Omberg L. Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data / L. Omberg, K. Dolan, A. Neiman, F. Moss // *Physical Review E*. – 2000. – Vol. 61, № 5. – P. 4848-4853.
3. Wiesenfeld K. Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations / K. Wiesenfeld // *Physical Review A*. – 1985. – Vol. 32, № 3. – P. 1744-1751.
4. Kravtsov Yu. A. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification / Yu. A. Kravtsov, E. D. Surovyatkina // *Physics Letters A*. – 2003. – Vol. 3199, № 3-4. – P. 348-351.
5. Surovyatkina E. Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems / E. Surovyatkina // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2005. – Vol. 12. – P. 25-29.
6. Pierson D. Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Applications to Biology / D. Pierson, F. Moss // *Phys. Rev. Lett* 75. – 1995. – Vol. 75, № 11. – P. 2124-2135.
7. Pei X. Characterization of low-dimensional dynamics in the crayfish caudal photoreceptor / X. Pei, F. Moss // *Nature*. – 1996. – Vol. 379, № 6566. – P. 618-621.
8. Kiss I. Z. Experiments on coherence resonance: Noisy precursors to Hopf bifurcations / I. Z. Kiss, J. L. Hudson // *Physical Review E*. – 2003. – Vol. 67. – P. 15-19.
9. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedeyev, V. A. Gromov. – N.-Y. : Springer, 2013. – 180 p.
10. Лапко А. В. Непараметрические системы обработки информации / А. В. Лапко, С. В. Ченцов. – Новосибирск : Наука, 2000. – 352 с.

REFERENCES

1. Zulpukarov, M.-G.M., Malinetskii, G.G. and Podlazov, A.V. (2005), “Inverse bifurcation problem for noised dynamical systems with noise”, *Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS*.
2. Omberg, L., Dolan, K., Neiman, A. and Moss, F. (2000), “Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data”, *Physical Review E*, vol. 61, no. 5, pp. 4848-4853.
3. Wiesenfeld, K. (1985), “Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations”, *Physical Review A*, vol. 32, no. 3, pp. 1744-1751.
4. Kravtsov, Yu.A. and Surovyatkina, E.D. (2003), “Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification”, *Physics Letters A*, vol. 3199, no. 3-4, pp. 348-351.
5. Surovyatkina, E. (2005), “Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 12, pp. 25-29.
6. Pierson, D. and Moss, F. (1995), “Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Applications to Biology”, *Phys. Rev. Lett* 75, vol. 75, no. 11, pp. 2124-2135.
7. Pei, X. and Moss, F. (1996), “Characterization of low-dimensional dynamics in the crayfish caudal photoreceptor”, *Nature*, vol. 379, no. 6566, pp. 618-621.
8. Kiss, I.Z. and Hudson, J.L. (2003), “Experiments on coherence resonance: Noisy precursors to Hopf bifurcations”, *Physical Review E*, vol. 67, pp. 15-19.
9. Obodan, N.I., Lebedeyev, O.G. and Gromov, V.A. (2013), *Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells*, Springer, New-York.
10. Lapko, A.V. and Chentsov, S.V. (2000), *Непараметрические системы обработки информации* [Non-parametric systems of information processing], Nauka, Novosibirsk.