

УДК 539.312

НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО РОЗШИРЮЮТЬСЯ

¹Пожуєв А. В., ²Фасоляк А. В.

¹Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна

²Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Розглядається тривимірний пружний простір з циліндричним включенням, підкріпленим оболонкою. Розглянуто випадки, коли на поверхню оболонки діють віссиметричні динамічні нормальні навантаження. Рух простору описувався динамічними рівняннями теорії пружності, а рух оболонки описувався трьома методами: динамічними рівняннями теорії пружності, рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а також класичними рівняннями теорії тонких оболонок, які ґрунтуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Задача розв'язана методом інтегральних перетворень Фур'є (за осьюовою змінною), та Лапласа (за змінною часу), обертання яких проводилось чисельно. Отримані результати проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний простір, динамічне навантаження, віссиметрична задача.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСШИРЯЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

¹Пожуєв А. В., ²Фасоляк А. В.

¹Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69000, Украина

²Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Рассматривается трехмерное упругое пространство с цилиндрическим включением, подкрепленным оболочкой. Рассмотрены случаи, когда на поверхность оболочки действуют осесимметрические нормальные нагрузки. Движение пространства описывается динамическими уравнениями теории упругости, а движение оболочки описывается тремя методами: динамическими уравнениями теории упругости, уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения (оболочка типа Тимошенко), а также классическими уравнениями теории тонких оболочек, которые удовлетворяют гипотезе Кирхгофа-Лява. Задача решена методом интегральных преобразований Фурье (по осевой координате) и Лапласа (по переменной времени), обращение которых проводилось численно. Полученные результаты проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругое пространство, динамическая нагрузка, осесимметрическая задача.

NON-STATIONAR DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL IN ELASTIC MEDIUM, SUBJECTED TO EXTENDING SURFACE LOADS

¹Pozhuev A. V., ²Fasoliak A. V.

¹Zaporizhzhya state engineering academy,
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhya, 69000, Ukraine

²Zaporizhzhya national technical university,
Zhukovsky str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine

¹scorpio1@mail.ru, ²antonfasolyak@mail.ru

Infinite cylindrical shell, embded in three-dimensional elastic space is considered. Case, when extended impulsive axi-symmetrical normal load is subjected to surface of the shell, is studied. Axi-symmetrical

normal load, which depends on time as unit Heaviside function is considered too. For the results to be compared, static load corresponding to the second dynamic load is considered.

Space motion is described by elastic theory dynamic equations. Shell's motions, with purpose to compare results, are described by three methods: elastic theory dynamic equations; equations, that consider transversal shift and rotary inertia (Timoshenko's shell) and classic thin shells theory equations, based on Kirchhoff-Love theory.

Elastic theory dynamic equations are solved by method of two potential functions. Then integral transform technique is used. Fourier transform on axial variable, and Laplace transform on time are used.

Transform solutions for displacements and stresses are inversed numerically. Filon's method (to inverse Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used.

Dependence of shell's radial displacements and stresses on load's extension velocity is studied. It is shown, that shell's radial displacements and stresses aspire to zero in large timescales

Radial displacements and stresses for normal load, that depend on time as unit Heaviside function, are observed to aspire to static solution in large timescales.

Based on the received results, we can conclude that the results of shell's motions approximate descriptive methods and exact solutions are almost coincide with that was shown on graphs. Therefore in the following works we can use only one of the given shell's motions approximate descriptive methods.

Key words: cylindrical shell, elastic space, dynamic loads, axi-symmetrical problem.

ВСТУП

Задачі про стаціонарну динамічну поведінку нескінченно довгих циліндричних оболонок, які знаходяться в необмеженому інерційному пружному середовищі під дією рухомих навантажень, раніше розглядалися в роботах [1-3], а також у монографії [4]. У роботах [5, 6] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці, але розгляд обмежено випадками, коли для оболонки використовуються класичні рівняння, а для опису реакції середовища використовується наближена модель типу Власова-Пастернака, яка не дозволяє знайти напруження і переміщення у пружному просторі, та обмежує дослідження нестационарної поведінки оболонки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається вісесиметрична нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться в лінійно-пружному, однорідному та ізотропному просторі під дією навантажень, що рухаються вздовж осі оболонки. Нехай оболонка та простір віднесені до нерухомої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, але для цієї вісесиметричної задачі всі величини не залежать від змінної θ . Внутрішній радіус оболонки b , а зовнішній – a . У момент часу $t < 0$ оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім у момент часу $t = 0$ в точці $x = 0$, $r = b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 і в подальші моменти часу $t > 0$ відбувається розширення навантаженої ділянки з постійною швидкістю c таким чином, що сумарний нормальний тиск у всі моменти часу залишається рівним F_0 . Також розглядається випадок, коли в момент часу $t = 0$ в області $|x| \leq d$, $r = b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на цій ділянці. Для порівняння результатів при заданому навантаженні розглянута аналогічна статична задача.

У нашій роботі рух оболонки будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності, рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а також класичних рівнянь теорії тонких оболонок, які ґрунтуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Контакт між простором та оболонкою вважаємо ковзним, а зв'язок – двостороннім. Середовище, що оточує оболонку, описується динамічними рівняннями теорії пружності.

Розглянемо спочатку випадок, коли рух оболонки описується рівняннями теорії пружності.

У векторній формі ці рівняння мають вигляд [9, с.551]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad div} \left(\vec{u}^{(-k)} \right) - \mu_k \text{rot rot} \left(\vec{u}^{(-k)} \right) = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}^{(-k)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $\bar{u}^{(k)} = (u_x^{(k)}, u_r^{(k)})$ – вектор переміщень, де $k=1$ відноситься до оболонки, а $k=2$ – до простору; λ_k , μ_k – параметри Ламе, ρ_k – щільність.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції $\Phi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$ за формулами [9, с.565]

$$u_x^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\Psi^{(k)}}{r}, \quad u_r^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x}. \quad (2)$$

Підставляючи залежності (2) у рівняння (1), маємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{1k}^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{\Psi^{(k)}}{r^2} = \frac{1}{c_{2k}^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$c_{1k}^2 = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{\rho_k(1-2\nu_k)}, \quad c_{2k}^2 = \frac{G_k}{\rho_k}. \quad (4)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rx}^{(1)}(b, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(b, x, t) = -f_n(x, t),$$

$$\sigma_{rx}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(a, x, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t), \quad u_r^{(1)}(a, x, t) = u_r^{(2)}(a, x, t), \quad (5)$$

де $f_n(x, t)$ – нормальне навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки.

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (5), виражаються через переміщення формулами:

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \right) + \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r},$$

$$\sigma_{rx}^{(k)} = G_k \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Якщо рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), то у віссиметричному випадку рівняння для оболонки мають вигляд [10, с.43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f_n + q_r), \\ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x \right) = \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (7)$$

де u , w – осьове та радіальне переміщення серединної поверхні оболонки; α_x – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки в осьовому напрямку; $q_r = q_r(x, t)$ – нормальна реакція з боку простору на межі контакту з оболонкою.

У цьому випадку граничні умови для простору такі:

$$\sigma_{rx}^{(2)}(a, x, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)}(a, x, t) = -q_r(x, t), \quad u_r^{(2)}(a, x, t) = w(x, t). \quad (8)$$

Якщо рух оболонки описується класичними рівняннями теорії тонких оболонок, які відповідають гіпотезі Кірхгофа-Лява, то у вісесиметричному випадку будемо мати рівняння [10, с.27]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-v_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{v_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-v_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-v_1}{2G_1 h} (-f_n + q_r). \end{cases} \quad (9)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку залишаться справедливими граничні умови (8).

Початкові умови у всіх випадках приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Зауважимо, що для статичної задачі треба взяти рівними нулю похідні за часом, а всі величини не залежать від змінної t .

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad (10)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-isx} dx. \quad (11)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\Phi}^{(k)}, \bar{\Psi}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{a^2} \left\{ \Phi^{(k)}, \Psi^{(k)} \right\}; \quad \left\{ U_x^{(k)}, U_r^{(k)}, W, U \right\} = \frac{1}{a} \left\{ u_x^{(k)}, u_r^{(k)}, w, u \right\}; \\ \left\{ \bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{rx}^{(k)} \right\} &= \frac{1}{G_1} \left\{ \sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)} \right\}; \quad \bar{f}_n = \frac{f_n}{G_1}; \quad \left\{ \bar{q}_{r1}, \bar{q}_{r2} \right\} = \frac{1}{G_1} \left\{ q_{r1}, q_{r2} \right\}; \\ \left\{ x_*, r_* \right\} &= \frac{1}{a} \left\{ x, r \right\}; \quad \tau = \frac{c_{21}}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa. \end{aligned} \quad (12)$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (3). Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_1^{(k)} p^2 \right) \bar{\Phi}_{LF}^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_2^{(k)} p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LF}^{(k)} = 0, \quad (13)$$

де

$$\eta_1^{(1)} = \frac{c_{21}^2}{c_{11}^2} = \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)}; \quad \eta_2^{(1)} = \frac{c_{21}^2}{c_{21}^2} = 1; \quad \eta_1^{(2)} = \frac{c_{21}^2}{c_{12}^2} = \frac{\gamma}{\rho^*} \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)}; \quad \eta_2^{(2)} = \frac{c_{21}^2}{c_{22}^2} = \frac{\gamma}{\rho^*}.$$

Загальний розв'язок рівнянь (13) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_1(s, p)K_0(m_1 r_*) + C_2(s, p)I_0(m_1 r_*); \\
\bar{\Psi}_{LF}^{(1)}(r_*, s, p) &= C_3(s, p)K_1(m_2 r_*) + C_4(s, p)I_1(m_2 r_*); \\
\bar{\Phi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_5(s, p)K_0(m_3 r_*); \\
\bar{\Psi}_{LF}^{(2)}(r_*, s, p) &= C_6(s, p)K_1(m_4 r_*),
\end{aligned} \tag{14}$$

де $m_1 = \sqrt{s^2 + \eta_1^{(1)} p^2}$, $m_2 = \sqrt{s^2 + \eta_2^{(1)} p^2}$, $m_3 = \sqrt{s^2 + \eta_1^{(2)} p^2}$, $m_4 = \sqrt{s^2 + \eta_2^{(2)} p^2}$, а K_0 , I_0 , K_1 , I_1 – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (2) та (6). Отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень:

$$U_{xLF}^{(k)} = is\bar{\Phi}_{LF}^{(k)} + \frac{d\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}}{r_*}, \quad U_{rLF}^{(k)} = \frac{d\bar{\Phi}_{LF}^{(k)}}{dr_*} - is\bar{\Psi}_{LF}^{(k)}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)} &= \frac{2\nu_1}{1-2\nu_1} \left(isU_{xLF}^{(1)} + \frac{U_{rLF}^{(1)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{dU_{rLF}^{(1)}}{dr_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)} &= \left(\frac{dU_{xLF}^{(1)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(1)} \right),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)} &= \frac{2\nu_2}{(1-2\nu_2)\gamma} \left(isU_{xLF}^{(2)} + \frac{U_{rLF}^{(2)}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{(1-2\nu_2)\gamma} \frac{dU_{rLF}^{(2)}}{dr_*}, \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dU_{xLF}^{(2)}}{dr_*} + isU_{rLF}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

У просторі зображень граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)}(d_1, s, p) &= 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)}(d_1, s, p) = -\bar{f}_{rLF}(s, p), \\
\bar{\sigma}_{rxLF}^{(1)}(1, s, p) &= \bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(1)}(1, s, p) = \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p), \quad U_{rLF}^{(1)}(1, s, p) = U_{rLF}^{(2)}(1, s, p).
\end{aligned} \tag{17}$$

У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1(s, p), \dots, C_6(s, p)$. Розв'язуючи систему методом Крамера, матимемо:

$$C_j(s, p) = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = \overline{1, 6}, \tag{18}$$

де $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 6}$

$$a_{11} = \frac{2(m_1^2 - \nu_1(m_1^2 + s^2))K_0(m_1 d_1)}{(1-2\nu_1)} + \frac{2m_1}{d_1} K_1(m_1 d_1);$$

$$a_{12} = \frac{2(m_1^2 - \nu_1(m_1^2 + s^2))I_0(m_1 d_1)}{(1-2\nu_1)} - \frac{2m_1}{d_1} I_1(m_1 d_1);$$

$$a_{13} = \frac{2is}{d_1} K_1(m_2 d_1) + 2ism_2 K_0(m_2 d_1); \quad a_{14} = \frac{2is}{d_1} I_1(m_2 d_1) - 2ism_2 I_0(m_2 d_1);$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -2ism_1K_1(m_1d_1); a_{22} = 2ism_1I_1(m_1d_1); a_{23} = (m_2^2 + s^2)K_1(m_2d_1); a_{24} = (m_2^2 + s^2)I_1(m_2d_1); \\
 a_{31} &= \frac{2(m_1^2 - v_1(m_1^2 + s^2))K_0(m_1)}{(1 - 2v_1)} + 2m_1K_1(m_1); a_{32} = \frac{2(m_1^2 - v_1(m_1^2 + s^2))I_0(m_1)}{(1 - 2v_1)} - 2m_1I_1(m_1); \\
 a_{33} &= 2isK_1(m_2) + 2ism_2K_0(m_2); a_{34} = 2isI_1(m_2) - 2ism_2I_0(m_2); \\
 a_{35} &= \frac{2(v_1(m_1^2 + s^2) - m_1^2)K_0(m_1)}{\gamma(1 - 2v_1)} - \frac{2m_1K_1(m_1)}{\gamma}; a_{36} = -\frac{(ism_4K_1(m_4) + ism_4^2K_0(m_4))}{\gamma}; \\
 a_{41} &= -2ism_1K_1(m_1); a_{42} = 2ism_1I_1(m_1); a_{43} = (m_2^2 + s^2)K_1(m_2); a_{44} = (m_2^2 + s^2)I_1(m_2); \\
 a_{55} &= -\frac{2ism_3K_1(m_3)}{\gamma}; a_{56} = \frac{(m_4^2 + s^2)K_1(m_4)}{\gamma}; a_{61} = -m_1K_1(m_1); a_{62} = m_1I_1(m_1); \\
 a_{63} &= -isK_1(m_2); a_{64} = -isI_1(m_2); a_{65} = m_3K_1(m_3); a_{66} = isK_1(m_4); \\
 a_{15} &= a_{16} = a_{25} = a_{26} = a_{45} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0.
 \end{aligned}$$

Матриці A_j , $j = \overline{1, 6}$ отримуються з матриці A заміною j -го стовпця вектором з координатами: $(-\overline{f}_{nLF}(s, p), 0, 0, 0, 0, 0)$.

У випадку, коли рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко) у просторі зображень за Фур'є-Лапласом із (7), приходимо до такої системи:

$$\begin{cases}
 -s^2U_{LF} + v_1isW_{LF} = \frac{1-v_1}{2}U_{LF}p^2; \\
 v_1isU_{LF} - k^2\frac{1-v_1}{2}(-s^2W_{LF} + is\overline{\alpha}_{xLF}) + W_{LF} = -\frac{1-v_1}{2}W_{LF}p^2 - \frac{1-v_1}{2\kappa\gamma}(-\overline{f}_{nLF} + \overline{q}_{rLF}); \\
 -s^2\overline{\alpha}_{xLF} - 6k^2\frac{1-v_1}{\kappa^2}(is\kappa W_{LF} + \overline{\alpha}_{xLF}) = \frac{1+v_1}{2}\overline{\alpha}_{xLF}p^2;
 \end{cases} \quad (19)$$

$$\overline{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \overline{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = -\overline{q}_{rLF}(s, p), \quad U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) = W_{LF}(s, p). \quad (20)$$

Враховуючи граничні умови (20), з першого та третього рівняння системи (19), знаходимо функції $U_{LF}(s, p)$, $\overline{\alpha}_{xLF}(s, p)$ відповідно:

$$U_{LF}(s, p) = \frac{2v_1is}{2s^2 + (1-v_1)p^2}W_{LF}(s, p); \quad (21)$$

$$\overline{\alpha}_{xLF}(s, p) = \frac{-6k^2\frac{1-v_1}{\kappa}is}{s^2 + 6k^2\frac{1-v_1}{\kappa^2} + \frac{1+v_1}{2}p^2}W_{LF}(s, p). \quad (22)$$

Підставляючи (21) та (22) у друге рівняння системи (19) і враховуючи граничні умови (20), отримуємо систему двох рівнянь відносно невідомих $C_1(s, p)$, $C_2(s, p)$.

Якщо рух оболонки описується класичними рівняннями теорії тонких оболонок, що відповідають гіпотезі Кірхгофа-Лява, у просторі зображень отримаємо такі рівняння:

$$\begin{cases} -s^2 U_{LF} + v_1 i s W_{LF} = \frac{1-v_1}{2} U_{LF} P^2; \\ v_1 i s U_{LF} + \frac{\kappa^2}{12} s^4 W_{LF} + W_{LF} = -\frac{1-v_1}{2} W_{LF} P^2 - \frac{1-v_1}{2\kappa} (-\bar{f}_{nLF} + \bar{q}_{rLF}). \end{cases} \quad (23)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\bar{\sigma}_{rxLF}^{(2)}(1, s, p) = 0, \quad \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLF}(s, p), \quad U_{rLF}^{(2)}(1, s, p) = W_{LF}(s, p). \quad (24)$$

Враховуючи граничні умови (24), отримуємо систему рівнянь (23) відносно невідомих $C_1(s, p)$, $C_2(s, p)$.

Для відповідної статичної задачі, коли оболонка описується рівняннями теорії пружності, її розв'язок будемо шукати у формі Папковича-Нейбера [9, с.185] через дві гармонічні функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$:

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r, x) &= \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial r} x; \\ u_x^{(k)}(r, x) &= -\frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial x} - (3-4\nu_k) \varphi_2^{(k)} + x \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Відповідні напруження виражаються через переміщення за формулами (6).

Функції $\varphi_1^{(k)}(r, x)$ і $\varphi_2^{(k)}(r, x)$ задовольняють рівнянням:

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi_j^{(k)}}{dr} + \frac{d^2 \varphi_j^{(k)}}{dx^2} = 0, \quad j=1,2; \quad k=1,2. \quad (26)$$

Застосувавши перетворення Фур'є по змінній x_* до рівнянь (26), маємо:

$$r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)}}{dr_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{Fj}^{(k)} = 0, \quad j=1,2; \quad k=1,2. \quad (27)$$

Загальний розв'язок рівнянь (27) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{F1}^{(1)}(r_*, s) &= C_1(s) K_0(sr_*) + C_2(s) I_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(1)}(r_*, s) &= C_3(s) K_0(sr_*) + C_4(s) I_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F1}^{(2)}(r_*, s) &= C_5(s) K_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{F2}^{(2)}(r_*, s) &= C_6(s) K_0(sr_*). \end{aligned} \quad (28)$$

Застосувавши перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (25), враховуючи (12), маємо:

$$\begin{aligned} U_{rF}^{(k)}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{F1}^{(k)}}{\partial r_*} + i \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s \partial r_*}; \\ U_{xF}^{(k)}(r_*, s) &= i s \bar{\Phi}_{F1}^{(k)} - (3-4\nu_k) \bar{\Phi}_{F2}^{(k)} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{F2}^{(k)}}{\partial s}. \end{aligned} \quad (29)$$

Трансформанти відповідних напружень задаються формулами (16).

Підставляючи співвідношення (28) в (29), а потім співвідношення (29) в граничні умови (17), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_1(s), \dots, C_6(s)$, яка розв'язується за формулами, аналогічними (18).

Розв'язки у випадках, коли оболонка описується рівняннями типу Тимошенко, або рівняннями класичної теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява, отримуються аналогічно.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗА

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в точці $x=0$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 і у подальший момент часу $t>0$ відбувається розширення навантаженої ділянки циліндричної оболонки з постійною швидкістю c .

Функція навантаження має вигляд:

$$f_n(x, t) = \frac{F_0 H(ct - |x|)}{4\pi c t b}, \tag{30}$$

де $H(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Трансформанта навантаження (30) має вигляд:

$$f_{nLF}(s, p) = \frac{F_0}{4\sqrt{2}\pi^2 d_1 s c^*} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{s c^*}\right) \right), \tag{31}$$

де $c^* = \frac{c}{c_{21}}$.

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}^{(2)}(r_*, x_*, p) G_1 a^2}{F_0} = \frac{1}{8\pi^2 d_1 c^*} \int_0^\infty \frac{U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{s c^*}\right) \right) \cos(s x_*) ds, \tag{32}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}^{(2)}(r_*, x_*, p) a^2}{F_0} = \frac{1}{8\pi^2 d_1 c^*} \int_0^\infty \frac{\bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{s c^*}\right) \right) \cos(s x_*) ds. \tag{33}$$

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в області $|x| \leq d$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на цій ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$f_n(x, t) = F_0 H(|x| - d) H(t). \tag{34}$$

Трансформанта навантаження (34) має вигляд:

$$f_{nLF}(s, p) = \frac{\sqrt{2} F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi} s p}, \tag{35}$$

де $d^* = \frac{d}{a}$.

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}^{(2)}(r_*, x_*, p)G_1}{F_0} = \frac{1}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) U_{rLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \cos(sx_*) ds, \quad (36)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}^{(2)}(r_*, x_*, p)}{F_0} = \frac{1}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) \bar{\sigma}_{rrLF}^{(2)}(r_*, s, p)}{s} \cos(sx_*) ds. \quad (37)$$

Відповідне навантаження для статичної задачі має вигляд:

$$f_n(x) = F_0 H(|x| - d), \quad (38)$$

трансформанта Фур'є якого дорівнює:

$$f_{nF}(s) = \frac{\sqrt{2} F_0 \sin(d^* s)}{\sqrt{\pi} s}. \quad (39)$$

Після оберненого перетворення Фур'є отримуємо розв'язок статичної задачі:

$$\frac{U_r^{(2)}(r_*, x_*)G_1}{F_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) U_{rF}^{(2)}(r_*, s)}{s} \cos(sx_*) ds, \quad (40)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rr}^{(2)}(r_*, x_*)}{F_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(d^* s) \bar{\sigma}_{rrF}^{(2)}(r_*, s)}{s} \cos(sx_*) ds. \quad (41)$$

Обчислення невласних інтегралів у виразах (32), (33), (36), (37), (40), (41) здійснювалося наближено з використанням метода Файлона [7, с.76], обернення перетворення Лапласа здійснювалося чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [8, с.42].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\gamma = 30$, $\rho^* = 4$, $\kappa = 0,02$, $d_1 = 1 - \kappa = 0,98$, $d^* = \frac{1}{2}$. Величини r_* , x_* , τ , c^* – змінювались.

Рис. 1 ілюструє зміну нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору при $r_* = 1$, $x_* = 0$ для різних значень безрозмірної швидкості руху навантаження, при цьому для кривої 1 – $c^* = 0,1$, для 2 – $c^* = 0,25$, 3 – $c^* = 0,4$. При цьому суцільні криві відповідають результатам, коли рух оболонки описується динамічними рівняннями теорії пружності, а пунктиром і штрих-пунктиром відповідають теорії Тимошенко і Кірхгофа-Лява відповідно. На рис. 2 наведені аналогічні результати для нормальних напружень.

На рис. 3 показано, як змінюються радіальні переміщення на межі контакту оболонки і пружного простору ($r_* = 1$) за осьовою координатою у різні моменти часу при $c^* = 0,1$, а рис. 4 ілюструє аналогічний розподіл для більш високої швидкості розповсюдження тиску, коли $c^* = 0,4$.

На рис. 5 і 6 для навантаження (34) зображено зміну за часом нормальних переміщень і напружень у точці $r_* = 1$, $x_* = 0$, при цьому горизонтальні прямі на обох графіках відповідають статичному розв'язку.

Рис. 7 ілюструє зміну нормальних переміщень за осьовою координатою для навантаження (34) при $\tau = 2,5$ при різних значеннях радіальної координати, тобто у пружному просторі при віддаленні від границі контакту з оболонкою.

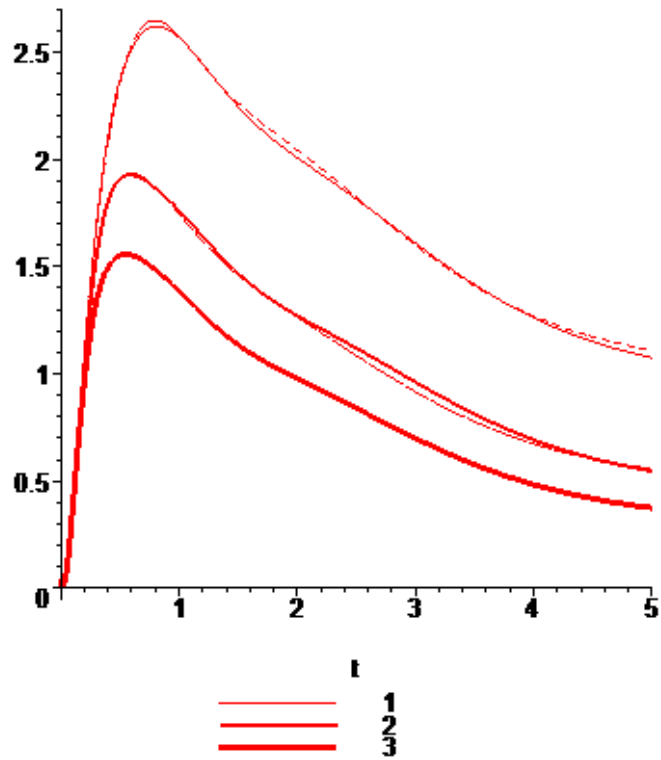


Рис. 1. Зміна нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

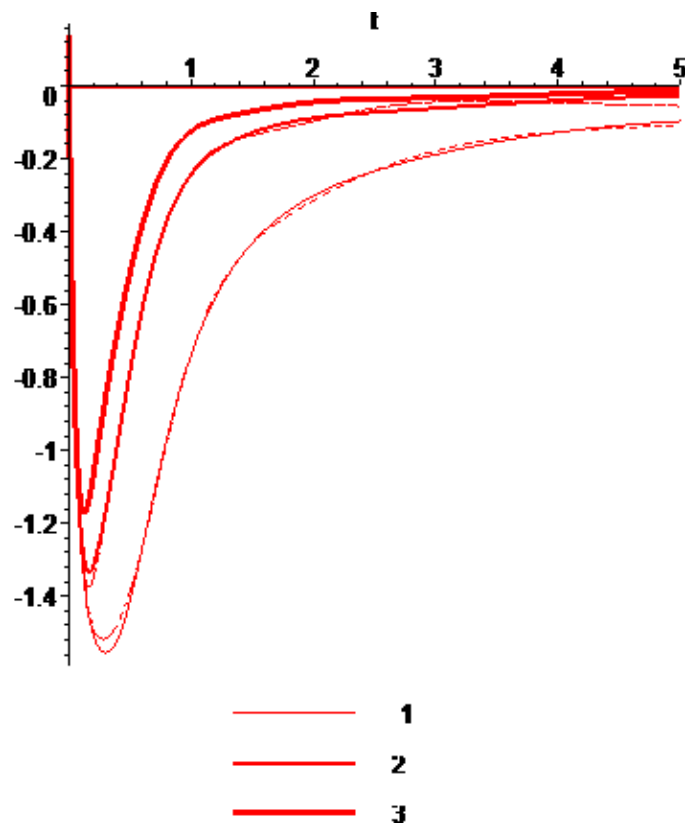


Рис. 2. Зміна нормальних напружень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

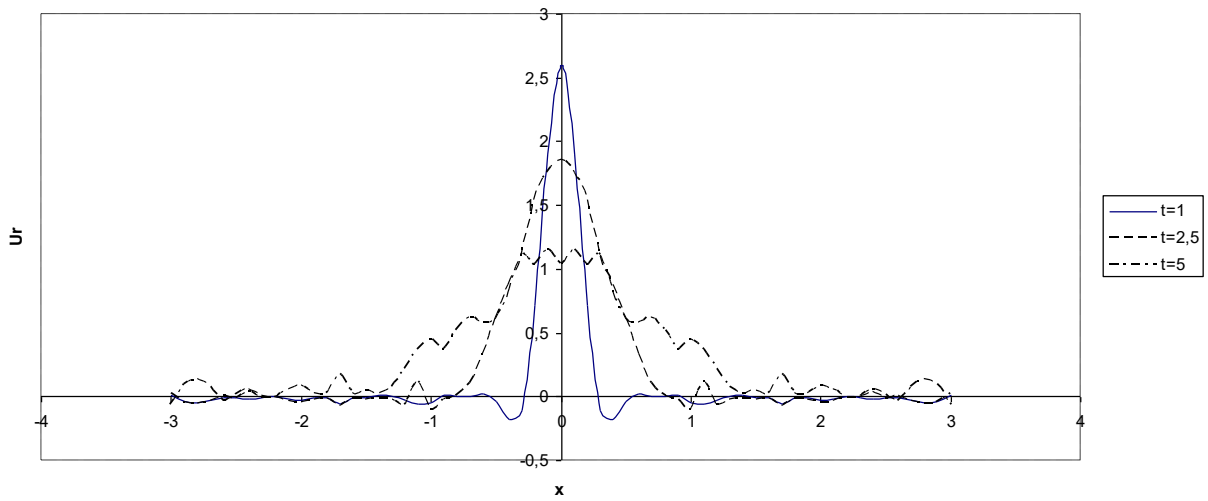


Рис. 3. Зміна нормальних переміщень за осью координатою при різних значень часу на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

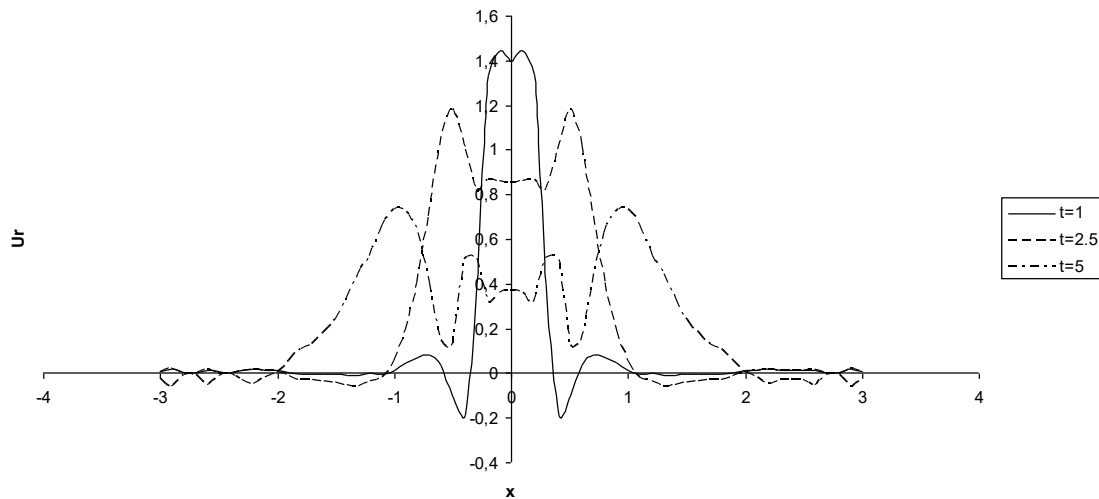


Рис. 4. Зміна нормальних переміщень за осью координатою при різних значень часу на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що розбігається

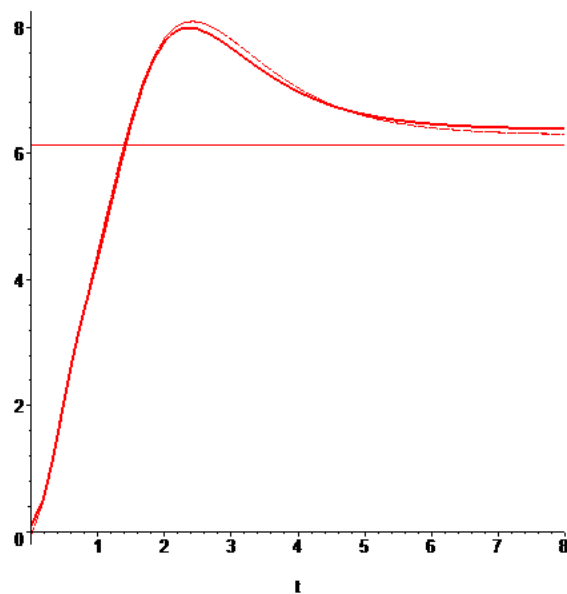


Рис. 5. Зміна нормальних переміщень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

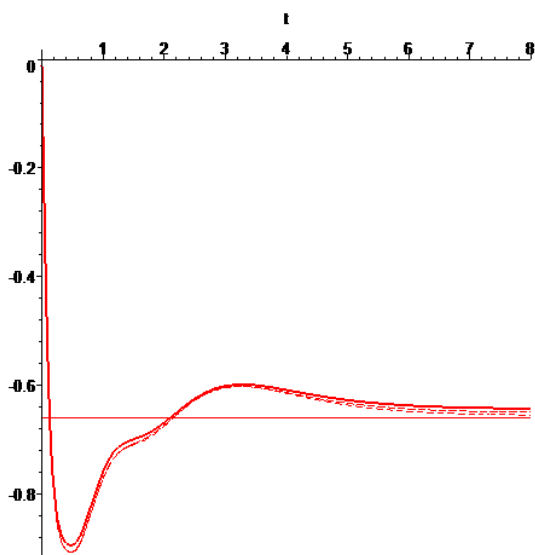


Рис. 6. Зміна нормальних напружень за часом на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

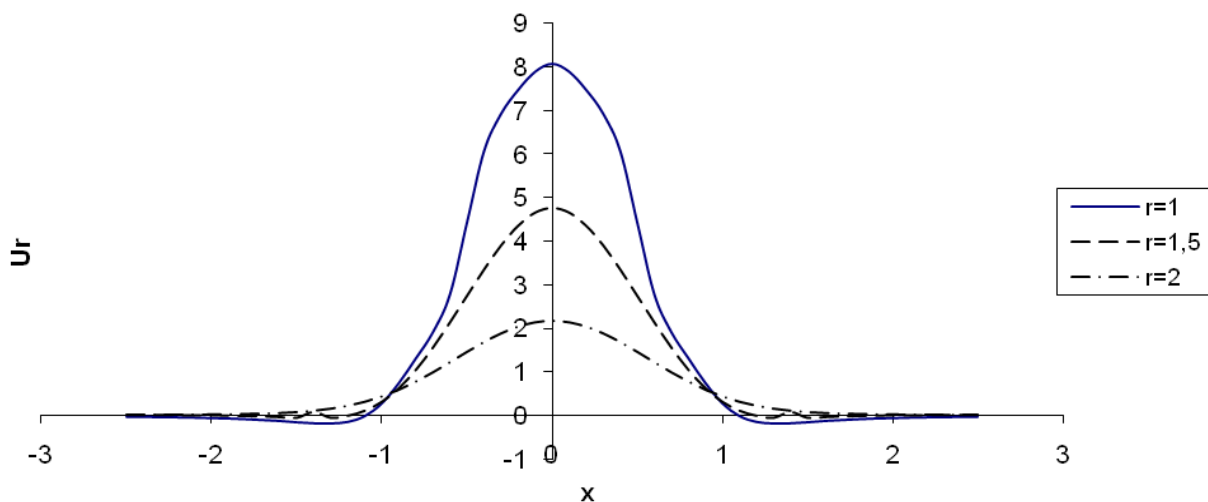


Рис. 7. Зміна нормальних переміщень за осовою координатою при різних значень радіальної координати на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

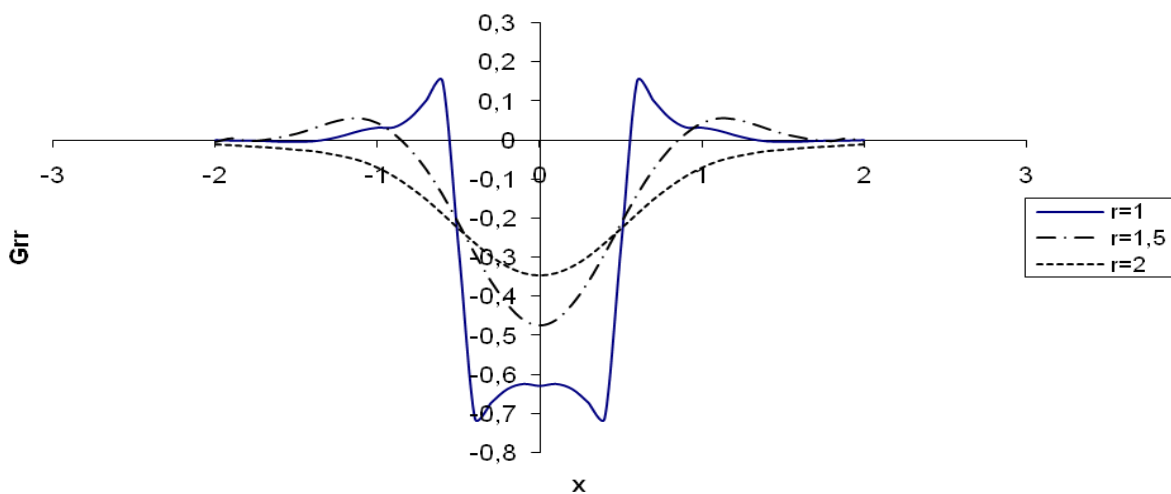


Рис. 8. Зміна нормальних напружень за осовою координатою при різних значеннях радіальної координати на межі контакту оболонки і пружного простору для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок вісесиметричної задачі для циліндричної оболонки, розташованої у пружному просторі, на яку діють навантаження, що розширюється, та навантаження, яке залежить від часу, як одинична функція Хевісайда. Для навантаження, що розбігається, досліджено залежність нормальних переміщень та напружень від швидкості розбігання навантаження, та їх розподілення за осьової координатою в різні моменти часу.

Для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда, було досліджено розподілення нормальних переміщень та напружень за осьовою та радіальною координатою в різні моменти часу.

Порівняно різні методи описання руху оболонки та показано, що результати, отримані на основі застосування цих методів, мало відрізняються. На основі цього можна зробити висновок, що при розв'язанні більш складних задач можна застосовувати одну з наближених моделей описання руху оболонки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Львовский В. М. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки / В. М. Львовский, В. И. Онищенко, В. И. Пожуев // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1974. – С. 98-110.
2. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде / В. И. Пожуев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – №1. – С. 44-46.
3. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки, находящейся в трансверсально-изотропной среде, на действие подвижной нагрузки / В. И. Пожуев // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 28-35.
4. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Изд-во МАИ, 1992 – 136 с.
5. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной нагрузки / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33-37.
6. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48-50.
7. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.
8. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М. : Наука, 1974. – 223 с.
9. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.

REFERENCES

1. Lvovskiy, V.M., Onishenko, V.I. and Pozhuev, V.I. (1974), "Steady fluctuations of cylindrical shell in elastic medium subjected to moving loads", *Voprosy prochnosti i plastichnosti*, pp. 98-110.
2. Pozhuev, V.I. (1976), "Action moving load on cylindrical shell in elastic medium", *Stroitel'naya mekhanika i raschet konstruksiy*, no. 1, pp. 44-46.
3. Pozhuev, V.I. (1980), "Response of cylindrical shell, situated in transversal and isotropic medium on action moving load", *Prikladnaya mekhanika*, vol. 16, no. 11, pp. 28-35.
4. Gorshkov, A.G. and Pozhuev, V.I. (1992), *Plastiny i obolochki na inertsyalnom osnovanii pri deystvii podvizhnykh nagruzok* [Plates and shells on inertial foundations subjected on moving loads], Moscow, Russia.
5. Pozhuev, V.I. and Zhybitay, Mokhammed (1991), "Non-stationary response of cylindrical shells in elastic medium on non axi-symmetrical moving load", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo i arkhetectura*, no. 6, pp. 33-37.

6. Pozhuev, V.I. and Zhybitay, Mokhammed (1992), "Non-stationary fluctuations of finite length pipeline, unilaterally interacts with inertial medium", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo*, no. 4, pp. 48-50.
7. Krylov, V.I. and Shulina, L.T. (1966), *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [Reference book of numerical integrations], Nauka, Moscow, Russia.
8. Krylov, V.I. and Skoblya, N.S. (1974), *Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Furiye i obrascheniya preobrazovaniya Laplasya* [Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform], Nauka, Moscow, Russia.
9. Novatskiy, V. (1975), *Teoriya uprugosti* [Elastic theory], Mir, Moscow, Russia.
10. Volmir, A.S. (1972), *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Non-linear dynamic of planes and shells], Nauka, Moscow, Russia.

UDC 512.12+517.987.1

CONDITIONS OF OVERLAPPING WITHIN AN INFINITE SET OF HYPERPARALLELEPIPEDS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE AND THE FINITE LEBESGUE MEASURE OF THEIR UNION

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

*Khmelnytskyi National University,
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, 29016, Ukraine*

romanukevadimv@mail.ru

An infinite set of hyperparallelepipeds in Euclidean arithmetical space is considered. Each hyperparallelepiped is closed. It is defined by five parameters. They are the sequence order number and quadruple of positive integers, giving two numerators and two denominators of two fractions. These fractions are such that the numerator is always less than the denominator. One fraction is subtracted from the sequence order number, another one is added to this number. The denominators are raised to the power which is actually that sequence order number. As a case study, the union of those hyperparallelepipeds is found. The goal is to ascertain whether the ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is finite and, if finite, to calculate it. Besides, it is tasked to find any overlappings within the infinite set of hyperparallelepipeds by the constrained fractions. In the beginning, concepts of overlapping and nonoverlapping are stated. Overlapping and nonoverlapping are conceived at various levels. Number of these levels is defined by the Euclidean arithmetical space dimension. Nonoverlapping, however, does not specify overlapping in lower dimensions. The nonoverlapping is perceived at a level implying the simpler nonoverlappings which correspond to higher dimensions. Thus, nonoverlapping is specified not through all the levels, but just at the basic level which is not implied elsewhere. Further, conditions of when overlapping exists are stated in four theorems. It is revealed that only single overlapping can be, and only first two numbered hyperparallelepipeds can overlap. The ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is always finite. Both for nonoverlapping and overlapping, two formulas for calculating the measure are stated. In the conclusion, it is mentioned about three cases when each hyperparallelepiped is open or half-open. In these cases, hyperparallelepipeds cannot overlap at a single point. Nonetheless, the measure calculation formulas hold.

Key words: infinite set of hyperparallelepipeds, union, overlapping, finite Lebesgue measure.

УСЛОВИЯ ПЕРЕКРЫТИЯ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ГИПЕРПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ В ЕВКЛИДОВОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КОНЕЧНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА ИХ ОБЪЕДИНЕНИЯ

Романюк В. В., профессор, д. т. н., доцент

*Хмельницький національний університет,
ул. Інститутська, 11, г. Хмельницький, 29016, Україна*

romanukevadimv@mail.ru

Рассматривается бесконечное множество гиперпараллелепипедов в евклидовом арифметическом пространстве. Каждый гиперпараллелепипед замкнут. Он определяется по пяти параметрам. Ими являются порядковый номер последовательности и четвёрка положительных целых чисел,