6. Pozhuev, V.I. and Zhybitay, Mokhammed (1992), "Non-stationary fluctuations of finite length pipeline, unilaterally interacts with inertial medium", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo*, no. 4, pp. 48-50.
7. Krylov, V.I. and Shulina, L.T. (1966), *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [Reference book of numerical integrations], Nauka, Moscow, Russia.
8. Krylov, V.I. and Skoblya, N.S. (1974), *Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Furye i obrascheniya preobrazovaniya Laplasa* [Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform], Nauka, Moscow, Russia.
9. Novatskiy, V. (1975), *Teoriya uprugosti* [Elastic theory], Mir, Moscow, Russia.
10. Volmir, A.S. (1972), *Nelineynaya dinamika plastinok I obolochek* [Non-linear dynamic of planes and shells], Nauka, Moscow, Russia.

UDC 512.12+517.987.1

CONDITIONS OF OVERLAPPING WITHIN AN INFINITE SET OF HYPERPARALLELEPIPEDS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE AND THE FINITE LEBESGUE MEASURE OF THEIR UNION

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

Khmelnitskiy National University,
Institutskaya str., 11, Khmelnitskiy, 29016, Ukraine

romanukevadimv@mail.ru

An infinite set of hyperparallelepipeds in Euclidean arithmetical space is considered. Each hyperparallelepiped is closed. It is defined by five parameters. They are the sequence order number and quadruple of positive integers, giving two numerators and two denominators of two fractions. These fractions are such that the numerator is always less than the denominator. One fraction is subtracted from the sequence order number, another one is added to this number. The denominators are raised to the power which is actually that sequence order number. As a case study, the union of those hyperparallelepipeds is found. The goal is to ascertain whether the ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is finite and, if finite, to calculate it. Besides, it is tasked to find any overlappings within the infinite set of hyperparallelepipeds by the constrainted fractions. In the beginning, concepts of overlapping and nonoverlapping are stated. Overlapping and nonoverlapping are conceived at various levels. Number of these levels is defined by the Euclidean arithmetical space dimension. Nonoverlapping, however, does not specify overlapping in lower dimensions. The nonoverlapping is perceived at a level implying the simpler nonoverlappings which correspond to higher dimensions. Thus, nonoverlapping is specified not through all the levels, but just at the basic level which is not implied elsewhere. Further, conditions of when overlapping exists are stated in four theorems. It is revealed that only single overlapping can be, and only first two numbered hyperparallelepipeds can overlap. The ordinary Lebesgue measure of the hyperparallelepipeds' union is always finite. Both for nonoverlapping and overlapping, two formulas for calculating the measure are stated. In the conclusion, it is mentioned about three cases when each hyperparallelepiped is open or half-open. In these cases, hyperparallelepipeds cannot overlap at a single point. Nonetheless, the measure calculation formulas hold.

Key words: infinite set of hyperparallelepipeds, union, overlapping, finite Lebesgue measure.

УСЛОВИЯ ПЕРЕКРЫТИЯ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ГИПЕРПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ В ЕВКЛИДОВОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КОНЕЧНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА ИХ ОБЪЕДИНЕНИЯ

Романюк В. В., профессор, д. т. н., доцент

Хмельницкий национальный университет,
ул. Институтская, 11, г. Хмельницкий, 29016, Украина

romanukevadimv@mail.ru

Рассматривается бесконечное множество гиперпараллелепипедов в евклидовом арифметическом пространстве. Каждый гиперпараллелепипед замкнут. Он определяется по пяти параметрам. Ими являются порядковый номер последовательности и четвёрка положительных целых чисел, дающих два числителя и два знаменателя двух дробей. Эти дроби таковы, что числитель всегда меньше знаменателя. Одна дробь вычитается из порядкового номера последовательности, другая — прибавляется к этому номеру. Знаменатели возводятся в степень, которой является тот же порядковый номер последовательности. Для исследования находится объединение рассматриваемых гиперпараллелепипедов. Цель состоит в выяснении того, является ли обычная лебегова мера объединения гиперпараллелепипедов конечной, и, если она конечна, необходимо её вычислить. Кроме того, ставится задание найти всякие перекрытия в бесконечном множестве гиперпараллелепипедов при накладываемых ограничениях на дроби. Вначале излагаются концепции перекрытия и отсутствия перекрытия. Перекрытие и отсутствие перекрытия понимаются на различных уровнях. Количество этих уровней определяется размерностью евклидового арифметического пространства. Однако по отсутствию перекрытия нельзя точно определить наличие перекрытия в нижних размерностях. Отсутствие перекрытия воспринимается на таком уровне, где подразумеваются более простые случаи неперекрывающихся подмножеств, что соответствует высшим размерностям. Соответственно отсутствие перекрытия определяется не по всем уровням, а только на основном уровне, который не подразумевается где-либо ещё. Далее условия того, когда перекрытие существует, излагаются в четырёх теоремах. Оказывается, что может быть только одно перекрытие, и только два первых гиперпараллелепипеда могут перекрываться. Обычная лебегова мера объединения гиперпараллелепипедов всегда конечна. И для случая отсутствия перекрытия, и для случая перекрытия приводятся две формулы, по которым вычисляется эта мера. В заключении упоминается о трёх случаях, где каждый гиперпараллелепипед открыт или полуоткрыт. В этих случаях гиперпараллелепипеды не могут перекрываться лишь в одной точке. Тем не менее, формулы для вычисления меры остаются в силе.

Ключевые слова: бесконечное множество гиперпараллелепипедов, объединение, перекрытие, конечная лебегова мера.

УМОВИ ПЕРЕКРИТТЯ В ОДНІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ ГІПЕРПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ В ЕВКЛІДОВОМУ АРИФМЕТИЧНОМУ ПРОСТОРІ І СКІНЧЕННА МІРА ЛЕБЕГА ЇХ ОБ'ЄДНАННЯ

Романюк В. В., професор, д. т. н., доцент

Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

romanukevadimv@mail.ru

Розглядається нескінченна множина гіперпаралелепіпедів в арифметичному евклідовому просторі. Кожен гіперпаралелепіпед замкнутий. Він визначається за п'ятьма параметрами. Ними є порядковий номер послідовності та четвірка додатних цілих чисел, що дають два чисельники і два знаменники двох дробів. Ці дроби є такими, що чисельник завжди менший за знаменник. Один дріб віднімається від порядкового номера послідовності, інший — додається до цього номера. Знаменники підносяться до степеня, яким є той же порядковий номер послідовності. Для дослідження знаходиться об'єднання даних гіперпаралелепіпедів. Мета полягає у з'ясуванні того, чи є звичайна лебегова міра об'єднання гіперпаралелепіпедів скінченною, і, якщо вона скінченна, необхідно її обчислити. Крім того, ставиться завдання знайти всякі перекриття у нескінченній множині гіперпаралелепіпедів за обмежень, що накладаються на дробі. Спочатку викладаються концепції перекриття і відсутності перекриття. Перекриття і відсутність перекриття розуміються на різних рівнях. Кількість цих рівнів визначається розмірністю арифметичного евклідового простору. Проте по відсутності перекриття не можна точно визначити наявність перекриття в нижчих розмірностях. Відсутність перекриття сприймається на такому рівні, де маються на увазі простіші випадки підмножин, котрі не перекриваються, що відповідає вищим розмірностям. Відповідно відсутність перекриття визначається не по всіх рівнях, а лише на основному рівні, який неможливо визначити десь в іншому місці. Умови того, коли перекриття існує, далі викладаються в чотирьох теоремах. Виявляється, що може бути лише одне перекриття, і лише два перші гіперпаралелепіпеди можуть перекриватися. Звичайна лебегова міра об'єднання гіперпаралелепіпедів завжди є скінченною. І для випадку відсутності перекриття, і для випадку перекриття наводяться дві формули, за якими обчислюється ця міра. У висновку згадується про три випадки, де кожен гіперпаралелепіпед є відкритим або напіввідкритим. У цих випадках гіперпаралелепіпеди не можуть перекриватися лише в одній точці. Проте формули для обчислення міри залишаються в силі.

Ключові слова: нескінченна множина гіперпаралелепіпедів, об'єднання, перекриття, скінченна лебегова міра.

AN INFINITE COUNTABLE NONOVERLAPPING ELEMENTS COVER PROBLEM

The set cover problem issues from combinatorics, computer science and complexity theory [1, 2]. Set packing is the dual problem of the set covering [3, 4]. It is a special case when the cover is of infinite countable number of subsets. The set cover problem relates to many similar and dual problems [3, 5, 6], e. g. hitting set, vertex cover, edge cover, set packing hereinbefore mentioned, maximum coverage problem, dominating set, exact cover problem, closest pair of points problem, nearest neighbor search, etc. However, sometimes it is desirable that any couple of elements in the infinite countable cover have the empty intersection. Such a problem of the infinite countable cover of nonoverlapping elements may be relevant to practicing when the covering (or tiling) must have streaks or strata [7, 8].

INFINITE LEBESGUE-MEASURABLE COVERINGS IN EUCLIDEAN ARITHMETICAL SPACE

If a set $A \subset \mathbb{R}^K$ by $K \in \mathbb{N}$ can be formed from closed or open sets through finite or countable number of operations of unions, intersections, and differences (relative complements), then A is a Borel set [9]. Each Borel set in $\mathbb{R}^K$ is measurable [9]. However, an infinite covering from Borel sets may not have the finite Lebesgue measure.

For the case study, consider the infinite union

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigtimes_{k=1}^{K} \left[n - \frac{a_k}{b_k^n};\, n + \frac{c_k}{d_k^n} \right] \subset \mathbb{R}^K \tag{1}$$

of a sequence of hyperparallelepipeds by some parameters

$$\{a_k, b_k, c_k, d_k\} \tag{2}$$

in the k-th dimension. Speaking generally, these parameters can be taken as real numbers. And then the covering (1) may not have the finite Lebesgue measure in $\mathbb{R}^K$ for a very wide range of cases. If parameters (2) are positive $\forall\, k = \overline{1, K}$ then a class of infinite coverings (1) having the finite Lebesgue measure is obviously narrower. The cases when the covering (1) turns finitely Lebesgue-measurable constitute a pretty narrow class for integer parameters (2). Beyond finite measurability, another question is whether the infinite countable cover (1) is the union of nonoverlapping elements.

THE ARTICLE GOAL AND ITS TASKS

For definiteness, we take all the parameters (2) in each dimension as natural numbers, which, however, are constrained by the denominators in the statement (1):

$$a_k \in \mathbb{N},\ b_k \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{N},\ d_k \in \mathbb{N},\ a_k < b_k,\ c_k < d_k \quad \forall\, k = \overline{1, K}. \tag{3}$$

The cover (1) is Borelean and thus is $\mu_{\mathbb{R}^K}$-measurable [9]. Denote the n-th hyperparallelepiped as

$$P_n = \bigtimes_{k=1}^{K} \left[n - \frac{a_k}{b_k^n};\, n + \frac{c_k}{d_k^n} \right]. \tag{4}$$

By denotation (4), we have to ascertain whether the measure of the cover (1) is finite and

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P) = \mu_{\mathbb{R}^K}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathbb{R}^K}(P_n) \tag{5}$$

or not, i. e. are there any overlappings within the infinite set of hyperparallelepipeds $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ by (3)? Here, the overlapping is understood in the sense of the ordinary Lebesgue measure in $\mathbb{R}^K$. The strict concept of overlapping should precede conditions of when overlapping exists. The number of the existing overlappings must be estimated. Finally, it ought to be noticed how the measure $\mu_{\mathbb{R}^K}(P)$ should be calculated.

CONCEPTS OF OVERLAPPING AND NONOVERLAPPING

If there is no overlapping, the measure is σ-additive and (5) is true. The overlapping, however, can be conceived at various levels. Even if $K=1$, the segments $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ may be nonoverlapping in two ways. The neighboring segments P_n and P_{n+1} either do not touch each other $\forall\, n=\overline{1,\,\infty}$ or $\exists\, n\in\left\{\overline{1,\,\infty}\right\}$ such that they have just a single common point (possibly, not for any n).

The condition

$$\mu_{\mathbb{R}^K}\left(P_{n_1}\bigcap P_{n_2}\right)=0 \quad \forall\, n_1=\overline{1,\,\infty} \text{ and } \forall\, n_2=\overline{n_1+1,\,\infty} \tag{6}$$

requires that there would not be $\mathbb{R}^K$-overlapping. Let the statement (6) be the condition of $\mathbb{R}^K$-nonoverlapping. This is the simplest nonoverlapping. Although, there may be more strict requirements, that there would not be $\mathbb{R}^q$-overlapping:

$$\left\{P_{n_1}\bigcap P_{n_2}\right\}\subset\mathbb{R}^q \text{ and } \mu_{\mathbb{R}^q}\left(P_{n_1}\bigcap P_{n_2}\right)=0$$

$$\forall\, n_1=\overline{1,\,\infty} \text{ and } \forall\, n_2=\overline{n_1+1,\,\infty} \text{ for } q\in\left\{\overline{1,\,K}\right\}. \tag{7}$$

The statement (7) is the condition of $\mathbb{R}^q$-nonoverlapping. The most strict requirement is $\varnothing$-overlapping, i. e.

$$P_{n_1}\bigcap P_{n_2}=\varnothing \quad \forall\, n_1=\overline{1,\,\infty} \text{ and } \forall\, n_2=\overline{n_1+1,\,\infty} \tag{8}$$

meaning that those hyperparallelepipeds $\varnothing$-overlap. Else they overlap at least at a single point (SP). Clearly, $\varnothing$-overlapping implies SP-nonoverlapping, and SP-nonoverlapping itself implies $\mathbb{R}^q$-nonoverlapping for $q\in\left\{\overline{1,\,K}\right\}$, and $\mathbb{R}^q$-nonoverlapping implies $\mathbb{R}^{q+1}$-nonoverlapping for $q\in\left\{\overline{1,\,K-1}\right\}$. Nonoverlapping doesn't specify overlapping (surely, in lower dimensions). For instance, $\mathbb{R}$-nonoverlapping implies either SP-overlapping or $\varnothing$-overlapping, and $\mathbb{R}^2$-nonoverlapping may be followed with $\mathbb{R}$-overlapping, SP-overlapping, or $\varnothing$-overlapping.

Consequently, the nonoverlapping is perceived at one of its $K+1$ levels implying the simpler (corresponding to higher dimensions) nonoverlappings. Thus, when stating about nonoverlapping, it is going to be specified not through all the levels, but just at the basic level which is not implied elsewhere. And when it is spoken that there is no overlapping at a level then this is the nonoverlapping at that level.

CONDITIONS OF WHEN OVERLAPPING EXISTS

Theorem 1. If there is no overlapping in the k-th dimension at some $n=n_0$ ($n_0\in\mathbb{N}$) within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), then there is no overlapping for $n>n_0$.

Proof. In the k-th dimension, denote the difference between the left end of the $(n+1)$-th segment and the right end of the n-th segment:

$$s(k,\,n)=n+1-\frac{a_k}{b_k^{n+1}}-\left(n+\frac{c_k}{d_k^n}\right)=1-\left(\frac{a_k}{b_k^{n+1}}+\frac{c_k}{d_k^n}\right). \tag{9}$$

If at some $n=n_0$ there is no $\mathbb{R}^K$-overlapping, then

$$\exists\, k_0\in\left\{\overline{1,\,K}\right\} \text{ such that } s(k_0,\,n_0)=0 \tag{10}$$

and

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}}+\frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}}=1 \tag{11}$$

by (9), while

$$s(k,\, n_0)<0 \;\text{ by }\; k\in\left\{\left\{\overline{1,\, K}\right\}\setminus\{k_0\}\right\}.$$

By constraints (3), we have obvious inequalities

$$b_{k_0}^{n_0+1+m}>b_{k_0}^{n_0+1} \;\text{ and }\; d_{k_0}^{n_0+m}>d_{k_0}^{n_0} \;\text{ by }\; m\in\mathbb{N} \tag{12}$$

letting conclude that

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}}<\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} \;\text{ and }\; \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}}<\frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}}. \tag{13}$$

Consequently,

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}}+\frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}}<\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}}+\frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}}=1. \tag{14}$$

From the double inequality (14) we get

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}}+\frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}}<1 \tag{15}$$

and

$$s(k_0,\, n_0+m)>0 \;\text{ by }\; m\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Therefore,

$$\mu_{\mathbb{R}^K}\left(P_{n_1}\cap P_{n_2}\right)=0 \quad \forall\, n_1=\overline{n_0,\,\infty} \;\text{ and }\; \forall\, n_2=\overline{n_1+1,\,\infty}. \tag{17}$$

If there is no $\mathbb{R}^q$-overlapping at some $n=n_0$, then we have different $K-q+1$ indices $\left\{k_0^{\langle j\rangle}\right\}_{j=1}^{K-q+1}\subset\left\{\overline{1,\, K}\right\}$ such that

$$s\left(k_0^{\langle j\rangle},\, n_0\right)=0 \quad \forall\; j=\overline{1,\, K-q+1} \tag{18}$$

while

$$s(k,\, n_0)<0 \;\text{ by }\; k\in\left\{\left\{\overline{1,\, K}\right\}\setminus\left\{k_0^{\langle j\rangle}\right\}_{j=1}^{K-q+1}\right\}.$$

Then we take $k_0=k_0^{\langle j\rangle}$ and go through the deduction (10) — (16) $\forall\; j=\overline{1,\, K-q+1}$. Finally,

$$\left\{P_{n_1}\cap P_{n_2}\right\}\subset\mathbb{R}^q \;\text{ and }\; \mu_{\mathbb{R}^q}\left(P_{n_1}\cap P_{n_2}\right)=0 \quad \forall\, n_1=\overline{n_0,\,\infty} \;\text{ and }\; \forall\, n_2=\overline{n_1+1,\,\infty}. \tag{19}$$

If there is no overlapping at all, i. e.

$$P_{n_0}\cap P_{n_0+1}=\varnothing, \tag{20}$$

then

$$s(k_0, n_0) > 0 \quad \forall\, k_0 = \overline{1, K}\,. \tag{21}$$

Subsequently, we have

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} < 1 \tag{22}$$

and (12), (13), and

$$\frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1+m}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0+m}} < \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}^{n_0+1}} + \frac{c_{k_0}}{d_{k_0}^{n_0}} < 1\,, \tag{23}$$

whence (15) and (16) issue. Eventually,

$$P_{n_1} \cap P_{n_2} = \varnothing \quad \forall\, n_1 = \overline{n_0, \infty} \;\text{ and }\; \forall\, n_2 = \overline{n_1 + 1, \infty}\,. \tag{24}$$

The theorem has been proved.

Theorem 2. If there is a couple of identical values among the numbers (3), then there is $\varnothing$-overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3).

Proof. Here, the four cases are to be considered:

$$b_k = d_k\,, \;\; a_k = c_k\,, \;\; a_k = d_k\,, \;\; b_k = c_k\,.$$

Owing to Theorem 1, it is sufficient to disclose that

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{d_k} < 1\,. \tag{25}$$

The inequality (25) means that $s(k, 1) > 0$ and thus the condition (8) is true.

By $b_k = d_k$, in succession,

$$a_k < b_k\,, \;\; \frac{a_k}{b_k} < \frac{b_k}{b_k}\,,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{b_k}\,,$$

$$\frac{c_k}{b_k} < \frac{c_k + 1}{b_k} \leqslant 1\,,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{b_k} < \frac{1}{b_k} + \frac{c_k}{b_k} = \frac{c_k + 1}{b_k} \leqslant 1\,,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{b_k} < 1\,. \tag{26}$$

The inequality (26) by $b_k = d_k$ is the inequality (25).

By $a_k = c_k$, in succession,

$$a_k < b_k\,, \;\; a_k(a_k + 1) < b_k^2\,,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{a_k+1}, \quad \frac{a_k}{b_k^2} + 1 - \frac{1}{a_k+1} < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{a_k+1} < 1,$$

$$d_k \geqslant a_k + 1, \quad \frac{1}{d_k} \leqslant \frac{1}{a_k+1},$$

$$\frac{a_k}{d_k} \leqslant \frac{a_k}{a_k+1},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{d_k} \leqslant \frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{a_k+1} < 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k}{d_k} < 1. \tag{27}$$

The inequality (27) by $a_k = c_k$ is the inequality (25).

By $a_k = d_k$, in succession,

$$a_k < b_k, \quad a_k^2 < b_k^2,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} < \frac{1}{a_k}, \quad \frac{a_k}{b_k^2} - \frac{1}{a_k} + 1 < 1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k - 1}{a_k} < 1,$$

$$\frac{c_k}{a_k} \leqslant \frac{a_k - 1}{a_k},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{a_k} \leqslant \frac{a_k}{b_k^2} + \frac{a_k - 1}{a_k} < 1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2} + \frac{c_k}{a_k} < 1. \tag{28}$$

The inequality (28) by $a_k = d_k$ is the inequality (25).

By $b_k = c_k$, in succession,

$$a_k \leqslant b_k - 1,$$

$$a_k\left(b_k+1\right) \leqslant \left(b_k-1\right)\left(b_k+1\right),$$

$$a_k\left(b_k+1\right) - b_k^2 \leqslant \left(b_k-1\right)\left(b_k+1\right) - b_k^2 = -1,$$

$$\frac{a_k\left(b_k+1\right) - b_k^2}{b_k^2\left(b_k+1\right)} \leqslant \frac{\left(b_k-1\right)\left(b_k+1\right) - b_k^2}{b_k^2\left(b_k+1\right)} = -\frac{1}{b_k^2\left(b_k+1\right)},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2}-\frac{1}{b_k+1}\leqslant\frac{(b_k-1)(b_k+1)-b_k^2}{b_k^2(b_k+1)}=-\frac{1}{b_k^2(b_k+1)},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2}-\frac{1}{b_k+1}+1\leqslant\frac{(b_k-1)(b_k+1)-b_k^2}{b_k^2(b_k+1)}+1=1-\frac{1}{b_k^2(b_k+1)}<1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{b_k}{b_k+1}\leqslant\frac{(b_k-1)(b_k+1)-b_k^2}{b_k^2(b_k+1)}+1=1-\frac{1}{b_k^2(b_k+1)}<1,$$

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{b_k}{b_k+1}<1,$$

$$\frac{b_k}{d_k}\leqslant\frac{b_k}{b_k+1},$$

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{b_k}{d_k}\leqslant\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{b_k}{b_k+1}<1,$$

whence

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{b_k}{d_k}<1. \tag{29}$$

The inequality (29) by $b_k=c_k$ is the inequality (25).

The theorem has been proved.

Theorem 3. If $b_k>c_k$, then there is $\varnothing$-overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3).

Proof. Here,

$$b_k^2>c_k^2$$

and

$$\frac{a_k}{b_k^2}<\frac{a_k}{c_k^2}.$$

Using the inequality (29), see that

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{c_k}{d_k}<\frac{a_k}{c_k^2}+\frac{c_k}{d_k}<1,$$

whence the inequality (25) issues.

The theorem has been proved.

Theorem 4. If

$$a_k<b_k<c_k<d_k, \tag{30}$$

then there can be an overlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), and this overlapping is of P_1 and P_2, and this overlapping is the single only.

Proof. It is sufficient to consider a counterexample:

$$\frac{a_k}{(a_k+1)^2}+\frac{a_k+2}{a_k+3}=\frac{a_k^3+5a_k^2+8a_k+2}{a_k^3+5a_k^2+7a_k+3}=1+\frac{a_k-1}{a_k^3+5a_k^2+7a_k+3}\geqslant 1$$

and

$$\frac{a_k}{(a_k+1)^2}+\frac{a_k+2}{a_k+3}>1 \text{ by } a_k\neq 1. \tag{31}$$

The inequality (31) confirms that the inequality

$$\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{c_k}{d_k}>1 \tag{32}$$

is possible by (30), and thus an overlapping of hyperparallelepipeds P_1 and P_2 exists. If $a_k=1$ then either SP-overlapping or $\mathbb{R}^q$-overlapping of P_1 and P_2 is possible for $q\in\left\{\overline{1,\, K-1}\right\}$.

For proving that the overlapping is the single only along the k-th dimension, we have to show that

$$s(k,\, n)>0 \text{ by } n=\overline{2,\,\infty}.$$

For this, it is sufficient to show, owing to Theorem 1, that

$$\frac{a_k}{b_k^3}+\frac{c_k}{d_k^2}<1. \tag{33}$$

As

$$a_k\leqslant b_k-1,\ \ c_k\leqslant d_k-1,$$

then

$$\frac{a_k}{b_k^3}+\frac{c_k}{d_k^2}\leqslant\frac{b_k-1}{b_k^3}+\frac{d_k-1}{d_k^2}<\frac{b_k}{b_k^3}+\frac{d_k}{d_k^2}=\frac{1}{b_k^2}+\frac{1}{d_k}. \tag{34}$$

But

$$b_k\geqslant 2,\ \ \frac{1}{b_k^2}\leqslant\frac{1}{4},$$

and

$$d_k\geqslant 4,\ \ \frac{1}{d_k}\leqslant\frac{1}{4}.$$

So (34) is completed at the upper estimation:

$$\frac{b_k-1}{b_k^3}+\frac{d_k-1}{d_k^2}<\frac{b_k}{b_k^3}+\frac{d_k}{d_k^2}=\frac{1}{b_k^2}+\frac{1}{d_k}\leqslant\frac{1}{2},$$

whence the inequality (33) is confirmed.

The theorem has been proved.

If there is $\mathbb{R}^K$-nonoverlapping within the infinite set $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of hyperparallelepipeds (4) by (3), then the measure

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P)=\mu_{\mathbb{R}^K}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\mathbb{R}^K}(P_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{c_k}{d_k^n}-\left(-\frac{a_k}{b_k^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{c_k}{d_k^n}+\frac{a_k}{b_k^n}\right) \tag{35}$$

should be calculated via expanding the product in the last term of (35) and finding sums of the corresponding 2^K geometrical progressions. For instance, when $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ are segments,

$$\mu_{\mathbb{R}}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_1}{d_1^n}+\frac{a_1}{b_1^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1}{d_1^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1^n}=c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_1^n}+a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_1^n}=$$

$$=c_1\left(\frac{1}{1-\frac{1}{d_1}}-1\right)+a_1\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b_1}}-1\right)=\frac{c_1}{d_1-1}+\frac{a_1}{b_1-1}. \tag{36}$$

When $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ are rectangles,

$$\mu_{\mathbb{R}^2}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_1}{d_1^n}+\frac{a_1}{b_1^n}\right)\left(\frac{c_2}{d_2^n}+\frac{a_2}{b_2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1c_2}{d_1^nd_2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2}{b_1^nb_2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1a_2}{d_1^nb_2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1c_2}{b_1^nd_2^n}=$$

$$=c_1c_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(d_1d_2)^n}+a_1a_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(b_1b_2)^n}+c_1a_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(d_1b_2)^n}+a_1c_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(b_1d_2)^n}=$$

$$=\frac{c_1c_2}{d_1d_2-1}+\frac{a_1a_2}{b_1b_2-1}+\frac{c_1a_2}{d_1b_2-1}+\frac{a_1c_2}{b_1d_2-1}. \tag{37}$$

Generally,

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{c_k}{d_k^n}+\frac{a_k}{b_k^n}\right)=\sum_{j=0}^{2^K-1}\frac{\prod_{k=1}^{K}u_k}{\prod_{k=1}^{K}w_k-1}, \tag{38}$$

where $u_k=c_k$ and $w_k=d_k$ if the k-th position of the binary code of the index j is 1, but $u_k=a_k$ and $w_k=b_k$ if the k-th position of the binary code of the index j is 0.

If $\forall\ k=\overline{1,\,K}$ the condition (30) is true, and if $\mu_{\mathbb{R}^K}(P_1\cap P_2)\neq 0$ then the measure

$$\mu_{\mathbb{R}^K}(P)=\mu_{\mathbb{R}^K}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{\mathbb{R}^K}(P_n)-\mu_{\mathbb{R}^K}(P_1\cap P_2)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{c_k}{d_k^n}+\frac{a_k}{b_k^n}\right)-\prod_{k=1}^{K}\left(-s(k,1)\right)=\sum_{j=0}^{2^K-1}\frac{\prod_{k=1}^{K}u_k}{\prod_{k=1}^{K}w_k-1}-\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{a_k}{b_k^2}+\frac{c_k}{d_k}-1\right) \tag{39}$$

by the $\{u_k,\,w_k\}$-convention following the formula (38).

CONCLUSION

By constraints (3), the measure of the cover (1) is finite and the equality (5) holds under conditions of Theorem 2 and Theorem 3. The value (38) is the measure of the union (1) of $\mathbb{R}^K$-nonoverlapping hyperparallelepipeds. As an exception, there can be an overlapping of just hyperparallelepipeds P_1 and P_2 by (30), and this overlapping is the single only. By the overlapping, the measure of the cover (1) is calculated as (39).

A peculiarity of SP-overlapping concerns three cases when the n-th hyperparallelepiped (4) is substituted with one of those hyperparallelepipeds:

$$P_n = \bigtimes_{k=1}^{K} \left(n - \frac{a_k}{b_k^n};\, n + \frac{c_k}{d_k^n} \right),\ \ P_n = \bigtimes_{k=1}^{K} \left[n - \frac{a_k}{b_k^n};\, n + \frac{c_k}{d_k^n} \right),\ \ P_n = \bigtimes_{k=1}^{K} \left(n - \frac{a_k}{b_k^n};\, n + \frac{c_k}{d_k^n} \right]. \tag{40}$$

In these cases, SP-overlapping doesn't exist. Nonetheless, the measure calculation formulas (38) and (39) hold for (40) as well.

REFERENCES

1. Vazirani V. V. Approximation Algorithms / V. V. Vazirani. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. — 380 p.
2. Korte B. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (5 ed.) / B. Korte, J. Vygen. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. — 660 p.
3. Gao C. An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem / C. Gao, X. Yao, T. Weise, J. Li // European Journal of Operational Research. — 2015. — Volume 246, Issue 3. — P. 750 — 761.
4. Zhang Y.-L. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system / Y.-L. Zhang, C.-Q. Li, M.-L. Lin, Y.-J. Lin // Information Sciences. — 2015. — Volume 319. — P. 56 — 67.
5. Al-Shihabi S. An improved hybrid algorithm for the set covering problem / S. Al-Shihabi, M. Arafeh, M. Barghash // Computers & Industrial Engineering. — 2015. — Volume 85. — P. 328 — 334.
6. Ashik Mathew K. On hypercube packings, blocking sets and a covering problem / K. Ashik Mathew, P. R. J. Östergård // Information Processing Letters. — 2015. — Volume 115, Issue 2. — P. 141 — 145.
7. Agora E. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups / E. Agora, J. Antezana, C. Cabrelli // Advances in Mathematics. — 2015. — Volume 285. — P. 454 — 477.
8. Ciucu M. Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tilings of hexagons with cut off corners / M. Ciucu, I. Fischer // Journal of Combinatorial Theory. — 2015. — Series A, Volume 133. — P. 228 — 250.
9. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : [учеб. пособие] / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Выща школа, 1990. — 479 с.

REFERENCES

1. Vazirani V. V. Approximation Algorithms, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 380 p.
2. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (5 ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012, 660 p.
3. Gao C., Yao X., Weise T., Li J. An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem, European Journal of Operational Research, 2015, Volume 246, Issue 3, pp. 750 — 761.
4. Zhang Y.-L., Li C.-Q., Lin M.-L., Lin Y.-J. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system, Information Sciences, 2015, Volume 319, pp. 56 — 67.

5. Al-Shihabi S., Arafeh M., Barghash M. An improved hybrid algorithm for the set covering problem, Computers & Industrial Engineering, 2015, Volume 85, pp. 328 — 334.

6. Ashik Mathew K., Östergård P. R. J. On hypercube packings, blocking sets and a covering problem, Information Processing Letters, 2015, Volume 115, Issue 2, pp. 141 — 145.

7. Agora E., Antezana J., Cabrelli C. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups, Advances in Mathematics, 2015, Volume 285, pp. 454 — 477.

8. Ciucu M., Fischer I. Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tilings of hexagons with cut off corners, Journal of Combinatorial Theory, 2015, Series A, Volume 133, pp. 228 — 250.

9. Gorodetskiy V. V., Nagnibida N. I., Nastasiyev P. P. Methods of solving tasks of functional analysis, Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ДОВГИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Сторожук Є. А., д. ф.-м. н., професор, Комарчук С. М., Піголь О. В., Яцура А. В.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

stevan@ukr.net

Дано постановку і розроблено аналітично-чисельну методику розв’язання задач статики для композитних нескінченно довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з низькою зсувною жорсткістю. Отримано вирази для внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень замкненої і відкритої оболонок при дії комбінованого навантаження. Інтеграли у вказаних виразах обчислюються чисельно з використанням формули трапецій. Представлено числові результати для оболонки овального перерізу, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

Ключові слова: довга циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, комбіноване навантаження, чисельне інтегрування, формула трапецій.

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДЛИННЫХ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Сторожук Е. А., д. ф.-м. н., профессор, Комарчук С. Н., Пиголь О. В., Яцура А. В.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

stevan@ukr.net

Дана постановка и разработана аналитически-численная методика решения задач статики для композитных бесконечно длинных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения с низкой сдвиговой жесткостью. Получены выражения для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений замкнутой и открытой оболочек при действии комбинированной нагрузки. Интегралы в указанных выражениях вычисляются численно с использованием формулы трапеций. Представлены численные результаты для оболочки овального сечения, нагруженной равномерным внутренним давлением.

Ключевые слова: длинная цилиндрическая оболочка, некруговое поперечное сечение, комбинированная нагрузка, численное интегрирование, формула трапеций.