

5. Al-Shihabi S., Arafeh M., Barghash M. An improved hybrid algorithm for the set covering problem, Computers & Industrial Engineering, 2015, Volume 85, pp. 328 — 334.
6. Ashik Mathew K., Östergård P. R. J. On hypercube packings, blocking sets and a covering problem, Information Processing Letters, 2015, Volume 115, Issue 2, pp. 141 — 145.
7. Agora E., Antezana J., Cabrelli C. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups, Advances in Mathematics, 2015, Volume 285, pp. 454 — 477.
8. Ciucu M., Fischer I. Proof of two conjectures of Ciucu and Krattenthaler on the enumeration of lozenge tilings of hexagons with cut off corners, Journal of Combinatorial Theory, 2015, Series A, Volume 133, pp. 228 — 250.
9. Gorodetskiy V. V., Nagnibida N. I., Nastasiyev P. P. Methods of solving tasks of functional analysis, Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.

УДК 539.3

## АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ДОВГИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Сторожук Є. А., д. ф.-м. н., професор, Комарчук С. М., Піголь О. В., Яцура А. В.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

stevan@ukr.net

Дано постановку і розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання задач статички для композитних нескінченно довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з низькою зсувною жорсткістю. Отримано вирази для внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень замкненої і відкритої оболонок при дії комбінованого навантаження. Інтеграли у вказаних виразах обчислюються чисельно з використанням формули трапецій. Представлено числові результати для оболонки овального перерізу, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

*Ключові слова: довга циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, комбіноване навантаження, чисельне інтегрування, формула трапецій.*

## АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДЛИННЫХ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Сторожук Е. А., д. ф.-м. н., профессор, Комарчук С. Н., Пиголь О. В., Яцура А. В.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

stevan@ukr.net

Дана постановка и разработана аналитически-численная методика решения задач статички для композитных бесконечно длинных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения с низкой сдвиговой жесткостью. Получены выражения для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений замкнутой и открытой оболочек при действии комбинированной нагрузки. Интегралы в указанных выражениях вычисляются численно с использованием формулы трапеций. Представлены численные результаты для оболочки овального сечения, нагруженной равномерным внутренним давлением.

*Ключевые слова: длинная цилиндрическая оболочка, некруговое поперечное сечение, комбинированная нагрузка, численное интегрирование, формула трапеций.*

## ANALYTICAL AND NUMERICAL METHOD OF CALCULATING THE LENGTH OF NONCIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION

Storozhuk E. A., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Komarchuk S. M., Pigol O. V.,  
Yatsura A. V.

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

stevan@ukr.net

The thin cylindrical shells of circular and non-circular cross section are widely used in various branches of engineering as structural elements of machines and devices. Stress-strain state of cylindrical shell of non-circular (elliptical, oval, parabolic, etc.) cross section is described by the system of differential equations with variable coefficients. Therefore, the solving of boundary value problems for non-circular membranes associated with considerable mathematical difficulties.

Slow convergence of results occurs in the numerical solution of problems for infinitely long cylindrical shell of non-circular cross section due to the membrane circuit. The formulation is given and analytical numerical methodology of solution is proposed for solving of problems of statics for this class of membranes in the paper. The methodology is free from the membrane circuit and provides high accuracy of results.

It is accepted that infinitely long cylindrical non-circular shell is made of orthotropic composite material and loaded by surface and per unit length forces are distributed evenly along the axis of the cylinder. Shell is in the curvilinear orthogonal coordinate system that coincides with the main lines of curvature. Directions of orthotropy of material match with the directions of the axes at each point of the shell. Basic equations (balance equations, geometric and physical ratio) are given based on the refined theory of flat shells, which takes into account the cross-strain shear.

The methodology of solving a system of differential equations describing the stress-strain state non-circular infinitely long cylindrical shell based on the analytical and numerical integration. Integrals in the expressions for internal power factors and generalized displacements are calculated using numerical formula of trapezoids.

The solutions of problems of statics are constructed for such types of long cylindrical non-circular shell as closed shell under the influence of surface pressure and two pairs of opposite transverse forces evenly distributed along the generatings and open shell with hinged or rigid fixed longitudinal edges, stressed by surface forces and transverse force evenly distributed along the generating that is applied at the top of the shell.

Specific numerical results are received for a long closed cylindrical shell of oval cross section loaded by uniform internal pressure using developed techniques and programs. The distribution of internal forces, bending moment, angle of rotation of normal, tangential movement and deflection of the shell along the contour of the cross section are given and the influence of transverse shear deformation at maximum value of components of the stress-strain state are studied. Numerical results are presented in tables.

*Key words: long cylindrical shell, non-circular cross section, combined load, numerical integration, trapezoids formula.*

### ВСТУП

Тонкі циліндричні оболонки кругового і некругового перерізу знаходять широке застосування в різноманітних галузях техніки як конструктивні елементи машин та приладів. Напружено-деформований стан (НДС) циліндричної оболонки некругового (еліптичного, овального, параболічного тощо) перерізу описується системою диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Тому розв'язання крайових задач для некругових оболонок пов'язане зі значними математичними труднощами.

Історично першою працею з розв'язання задач про НДС циліндричної оболонки некругового перерізу була робота [1]. Проте перші розв'язки були надто спрощеними. Коректні результати, напевне, вперше отримав С. Тимошенко [2].

У більшості публікацій з цієї проблеми, які вийшли після зазначених вище робіт, за допомогою чисельних, аналітичних і експериментальних методів досліджено НДС [3-5], стійкість [6, 7] і коливання [8, 9] овальних та еліптичних циліндричних оболонок скінченної довжини при дії різного виду навантажень.

При чисельному розв'язанні крайових задач для нескінченно довгої циліндричної оболонки некругового перерізу спостерігається сповільнена збіжність результатів внаслідок мембранного замикання.

Автори розробили аналітично-чисельну методику розв'язання задач статки для такого класу оболонок, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні, вільна від мембранного замикання та забезпечує високу точність результатів.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо нескінченно довгу некругову циліндричну оболонку постійної товщини  $h$ , яка виготовлена з композитного ортотропного матеріалу і навантажена поверхневими та погонними силами, рівномірно розподіленими вздовж твірних (у напрямку осі) циліндра. Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в глобальній декартовій системі координат  $(X, Y, Z)$ , вісь  $OX$  якої спрямована по осі циліндра. Площину поперечного перерізу оболонки віднесемо до системи координат  $(Y, Z)$ , а його рівняння запишемо в параметричній формі:

$$Y = Y(\varphi); \quad Z = Z(\varphi); \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

де  $\varphi$  – кут між нормаллю до серединної поверхні і вертикальною віссю  $OZ$ .

Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $(s, \varphi, \zeta)$ . Тут  $s, \zeta$  – довжини твірної і нормалі до серединної поверхні. Прийmemo, що напрямки ортотропії матеріалу в кожній точці оболонки збігаються з напрямками осей координат  $(s, \varphi, \zeta)$ . Деформації і напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть залежати тільки від кута  $\varphi$ .

Вихідними при дослідженні НДС даного класу оболонок є загальні рівняння уточненої теорії непологих оболонок, в якій враховуються деформації поперечного зсуву. Основні рівняння оболонки в цьому випадку мають вигляд [10]:

рівняння рівноваги

$$\frac{dN}{rd\varphi} + \frac{Q}{r} + q_\varphi = 0; \quad \frac{dQ}{rd\varphi} - \frac{N}{r} + q_\zeta = 0; \quad \frac{dM}{rd\varphi} - Q = 0; \quad (1)$$

геометричні співвідношення

$$\varepsilon = \frac{du}{rd\varphi} + \frac{w}{r}; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{rd\varphi} - \frac{u}{r}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{rd\varphi}; \quad (2)$$

фізичні співвідношення

$$\begin{aligned} N &= D_N \varepsilon; \quad D_N = E_{\varphi\varphi} h / (1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s}); \\ Q &= D_Q \gamma; \quad D_Q = k G_{\varphi\zeta} h; \\ M &= D_M \mu; \quad D_M = E_{\varphi\varphi} h^3 / 12 (1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s}), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $N, Q, M$  – внутрішні зусилля і момент;  $r$  – радіус кривизни поперечного перерізу;  $\varepsilon, \gamma, \mu$  – мембранна, поперечна зсувна і згинна деформації;  $u, w$  – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки;  $\vartheta$  – кут повороту нормалі;  $E_{\varphi\varphi}$  – модуль пружності матеріалу оболонки в напрямку  $\varphi$ ;  $\nu_{s\varphi}, \nu_{\varphi s}$  – коефіцієнти Пуассона;  $G_{\varphi\zeta}$  – модуль зсуву в площині поперечного перерізу;  $k$  – деяка стала, яка приймає різні значення в різних теоріях.

При розв'язанні конкретних задач до рівнянь рівноваги (1) і геометричних та фізичних співвідношень (2) і (3) потрібно приєднати відповідні крайові умови.

### ЗАМКНЕНА НЕСКІНЧЕННО ДОВГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Вважаємо, що поперечний переріз довгої замкненої по напрямній  $(-\pi \leq \varphi \leq \pi)$  циліндричної оболонки (труби) має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії  $OY$  і  $OZ$ . Оболонка знаходиться під дією комбінованого навантаження: рівномірно розподілених уздовж твірних двох пар діаметрально протилежних поперечних зусиль  $P_a = const$  і  $P_b = const$  та нормальних поверхневих сил  $q_\zeta = q \neq const$ , які прикладені симетрично відносно площин  $XOY$  і  $XOZ$  (рис. 1).

Враховуючи геометричну і силову симетрію, за розрахункову схему приймемо четверту частину оболонки  $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$  і задамо такі крайові умови в точках  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} u(0) = \vartheta(0) = 0; \quad Q(0) = \frac{P_b}{2}; \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P_a}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

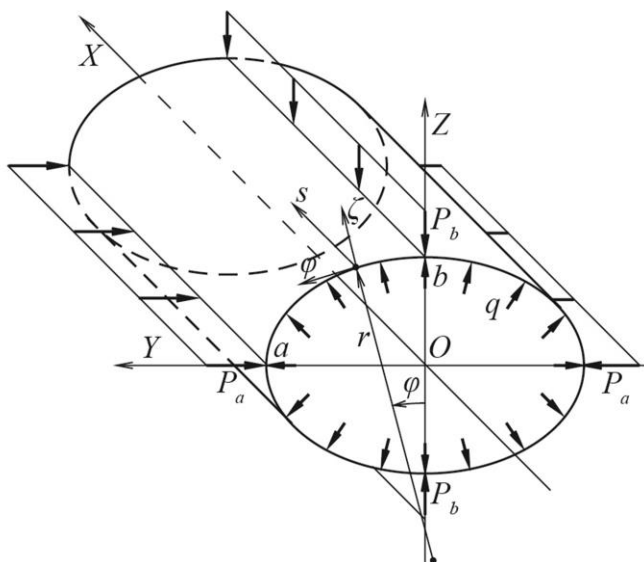


Рис. 1. Замкнена циліндрична оболонка некругового перерізу

Напружено-деформований стан оболонки описується системою рівнянь (1)-(3) і крайовими умовами (4).

З перших двох рівнянь рівноваги (1) отримаємо таке рівняння для знаходження поперечного зусилля:

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = \frac{d(rq)}{d\varphi}. \tag{5}$$

Характеристичне рівняння  $k^2 + 1 = 0$  відповідного однорідного рівняння має корені  $k_{1,2} = \pm i$ , тому загальним розв'язком цього рівняння буде функція  $Q^{30} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$ . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5) знайдемо методом варіації довільних сталих, а сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з крайових умов  $Q(0) = \frac{P_b}{2}$  і  $Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{P_a}{2}$ . Розв'язок рівняння (5), який задовольняє цим крайовим умовам, має вигляд

$$Q = \frac{P_b}{2} \cos \varphi - \frac{P_a}{2} \sin \varphi + \sin \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} qr \sin x dx - \cos \varphi \int_0^{\varphi} qr \cos x dx. \quad (6)$$

З другого рівняння рівноваги знайдемо тангенціальне зусилля

$$N = -\frac{P_b}{2} \sin \varphi - \frac{P_a}{2} \cos \varphi + \cos \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} qr \sin x dx + \sin \varphi \int_0^{\varphi} qr \cos x dx. \quad (7)$$

За допомогою інтегрування з третього рівняння рівноваги одержимо вираз для моменту

$$M = \int_0^{\varphi} rQ dx + C_3. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення для згинної деформації (2) і закон Гука для моменту (3) та інтегруючи, отримаємо формулу для кута повороту нормалі

$$\mathcal{G} = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM^* dt + \frac{C_3}{D_M} \int_0^{\varphi} r dt + C_4. \quad (9)$$

З крайових умов  $\mathcal{G}(0) = 0$  і  $\mathcal{G}(\pi/2) = 0$  визначимо сталі інтегрування:

$$C_3 = -\frac{1}{L} \int_0^{\pi/2} rM^* dt; \quad C_4 = 0. \quad (10)$$

У формулах (9), (10) позначено:  $M^* = \int_0^t rQ dx$ ;  $L = \int_0^{\pi/2} r dt$ .

Вихідним для знаходження тангенціального переміщення є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{D_N} \frac{d(rN)}{d\varphi} - \frac{rQ}{D_Q} + r\mathcal{G}. \quad (11)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд  $u^{30} = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi$ . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11) знайдемо методом варіації довільних сталих. Після визначення сталих інтегрування з крайових умов  $u(0) = 0$  і  $u(\pi/2) = 0$  та виконання деяких перетворень розв'язок рівняння (11) набуде вигляду:

$$u = \cos \varphi \int_0^{\varphi} r \left[ \frac{N \cos x}{D_N} - \left( \mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx - \sin \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} r \left[ \frac{N \sin x}{D_N} + \left( \mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx. \quad (12)$$

Тепер за допомогою співвідношення  $w = \frac{rN}{D_N} - \frac{du}{d\varphi}$  запишемо розгорнутий вираз для прогину

$$w = \sin \varphi \int_0^{\varphi} r \left[ \frac{N \cos x}{D_N} - \left( \mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx + \cos \varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} r \left[ \frac{N \sin x}{D_N} + \left( \mathcal{G} - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx. \quad (13)$$

### ВІДКРИТА ДОВГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА НЕКРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ З ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНИМИ ПОВЗДОВЖНІМИ КРАЯМИ

Розглянемо відкриту по напрямній ( $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ) нескінченно довгу циліндричну оболонку довільного поперечного перерізу, повздовжні краї  $\varphi = \pm \alpha$  якої оперті шарнірно на нерухомі

опори. Оболонка навантажена нормальними  $q_\zeta \neq const$  і тангенціальними  $q_\varphi \neq const$  поверхневими силами та рівномірно розподіленою вздовж твірної поперечною силою  $P = const$ , яка прикладена у вершині (рис. 2). Для поперечного перерізу і навантаження має місце симетрія відносно вертикальної площини  $XOZ$ .

Розрахунки будемо виконувати для половини оболонки ( $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ). На краю  $\varphi = \alpha$  задамо умови шарнірно нерухомого опирання ( $u = w = M = 0$ ), а на краю  $\varphi = 0$  – такі граничні умови:  $u = \vartheta = 0$  і  $Q = P/2$ .

Знаходження поперечного зусилля зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = -rq_\varphi - \frac{d(rq_\zeta)}{d\varphi}. \tag{14}$$

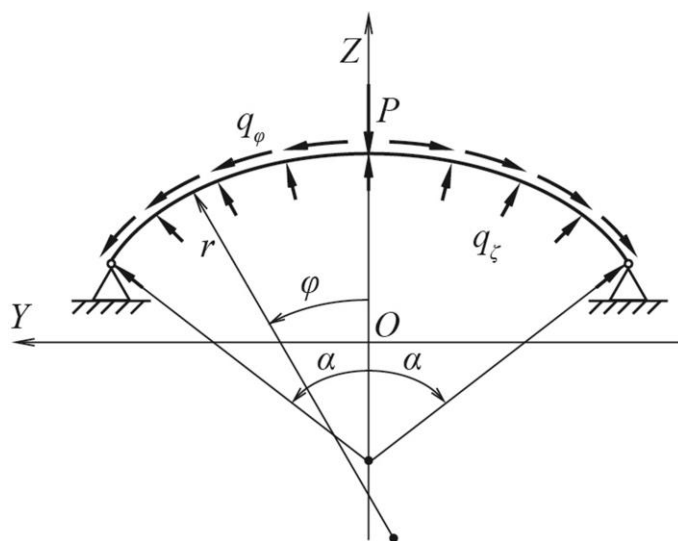


Рис. 2. Відкрита некругова циліндрична оболонка з шарнірно опертими повздовжніми краями

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \cos \varphi \int_0^\varphi r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \sin \varphi \int_0^\varphi r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \sin \varphi. \tag{15}$$

Для тангенціального зусилля з другого рівняння рівноваги отримаємо вираз

$$N = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \cos \varphi \int_0^\varphi r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \cos \varphi. \tag{16}$$

З граничної умови  $Q(0) = \frac{P}{2}$  визначимо сталу інтегрування  $C_1 = \frac{P}{2}$  і представимо внутрішні зусилля у вигляді:

$$Q = C_2 \sin \varphi + Q_1; \quad N = C_2 \cos \varphi + N_1, \tag{17}$$

де  $C_2$  – невідома стала інтегрування;

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{P}{2} \cos \varphi + \cos \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \sin \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \sin \varphi; \\ N_1 &= -\frac{P}{2} \sin \varphi - \sin \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \sin x - q_\zeta \cos x) dx - \cos \varphi \int_0^{\varphi} r(q_\varphi \cos x + q_\zeta \sin x) dx + (rq_\zeta) \Big|_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Для моменту з використанням третього рівняння рівноваги маємо вираз

$$M = \int_0^{\varphi} rQ dx + C_3. \quad (19)$$

Підставивши у цей вираз співвідношення (17) для поперечного зусилля, одержимо:

$$M = C_2 l_0 + M_0 + C_3. \quad (20)$$

Тут позначено:

$$l_0 = \int_0^{\varphi} r \sin x dx; \quad M_0 = \int_0^{\varphi} rQ_1 dx. \quad (21)$$

Сталу інтегрування в рівності (20) визначимо з граничної умови  $M(\alpha) = 0$ :

$$C_3 = -C_2 l_0(\alpha) - M_0(\alpha). \quad (22)$$

У підсумку вираз для моменту набуває вигляду

$$M = C_2 l_1 + M_1, \quad (23)$$

де

$$M_1 = M_0 - M_0(\alpha); \quad l_1 = l_0 - l_0(\alpha). \quad (24)$$

Кут повороту нормалі обчислюється за формулою:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM dt + C_4, \quad (25)$$

у якій відповідно до крайової умови  $\mathcal{G}(0) = 0$  стала  $C_4$  дорівнює нулю.

За допомогою співвідношення (23) для моменту з формули (25) дістанемо такий вираз для кута повороту нормалі:

$$\mathcal{G} = C_2 l_2 + \mathcal{G}_1. \quad (26)$$

Тут

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} rM_1 dx; \quad l_2 = \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} r l_1 dx. \quad (27)$$

Значення тангенціального переміщення  $u$  отримаємо, розв'язавши рівняння виду (11). Загальний розв'язок рівняння (11) для задачі має вигляд

$$u = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi - \cos \varphi \int_0^{\varphi} f(x) \sin x dx + \sin \varphi \int_0^{\varphi} f(x) \cos x dx, \quad (28)$$

де  $f(x)$  – права частина цього рівняння.

Прогин оболонки визначається за формулою

$$w = \frac{rN}{D_N} + C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi f(x) \sin x \, dx - \cos \varphi \int_0^\varphi f(x) \cos x \, dx. \quad (29)$$

З граничних умов  $u(\alpha) = 0$  і  $w(\alpha) = 0$  знаходимо сталі інтегрування  $C_5$  і  $C_6$ :

$$C_5 = -\frac{1}{D_N} \int_0^\alpha rN \cos x \, dx + \int_0^\alpha r \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \, dx; \quad (30)$$

$$C_6 = -\frac{1}{D_N} \int_0^\alpha rN \sin x \, dx - \int_0^\alpha r \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \, dx.$$

У результаті підстановки у співвідношення (28), (29) виразів для сталих інтегрування  $C_5$  і  $C_6$  та виразу для правої частини  $f(x)$ , виконання інтегрування частинами і деяких перетворень формули для тангенціального переміщення і прогину матимуть вигляд:

$$u = -\cos \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[ \frac{N \cos x}{D_N} - \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx - \sin \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[ \frac{N \sin x}{D_N} + \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx; \quad (31)$$

$$w = -\sin \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[ \frac{N \cos x}{D_N} - \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \sin x \right] dx + \cos \varphi \int_\varphi^\alpha r \left[ \frac{N \sin x}{D_N} + \left( \vartheta - \frac{Q}{D_Q} \right) \cos x \right] dx.$$

Задовольнивши граничну умову  $u(0) = 0$ , знаходимо сталу інтегрування  $C_2$ :

$$C_2 = -\frac{\int_0^\alpha r \left[ \frac{N_1 \cos x}{D_N} - \left( \vartheta_1 - \frac{Q_1}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}{\int_0^\alpha r \left[ \frac{\cos^2 x}{D_N} - \left( l_2 - \frac{\sin x}{D_Q} \right) \sin x \right] dx}. \quad (32)$$

Після цього за допомогою формул (17), (18), (23), (24), (26), (27) і (31) послідовно обчислюємо внутрішні зусилля  $(N, Q)$ , момент  $(M)$ , кут повороту нормалі  $(\vartheta)$  і переміщення  $(u, w)$  заданої оболонки.

### ВІДКРИТА ДОВГА НЕКРУГОВА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ПОВЗДОВЖНІМИ КРАЯМИ

Коротко опишемо основні аспекти визначення компонент НДС відкритої по напрямній  $(-\alpha \leq \varphi \leq \alpha)$  нескінченно довгої ортотропної циліндричної оболонки некругового поперечного перерізу, повздовжні краї  $\varphi = \pm \alpha$  якої жорстко защемлені. Оболонка знаходиться під дією комбінованого навантаження: поверхневих  $q_\zeta \neq const$  і  $q_\varphi \neq const$  та погонних  $P = const$  сил (рис. 3).

З огляду на геометричну і силову симетрію відносно вертикальної площини  $XOZ$  розрахунки достатньо виконати для половини оболонки  $(0 \leq \varphi \leq \alpha)$ . На краю  $\varphi = \alpha$  задамо умови жорсткого защемлення  $(u = w = \vartheta = 0)$ , а на краю  $\varphi = 0$  – змішані граничні умови:  $u = \vartheta = 0$  і  $Q = P/2$ .



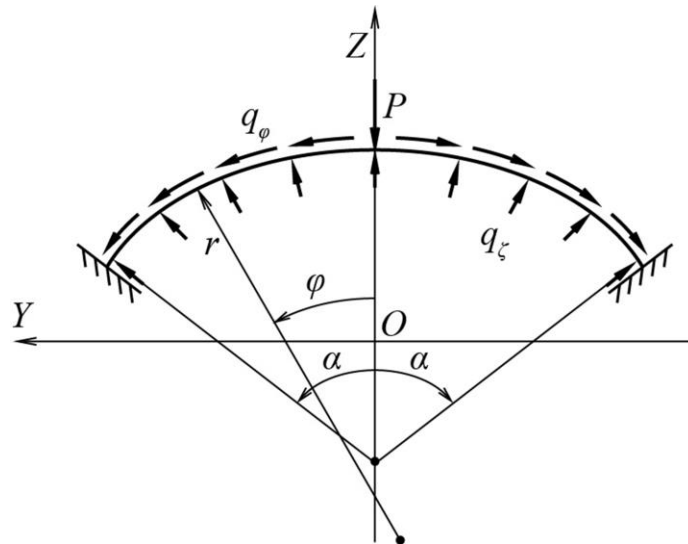


Рис. 3. Відкрита некругова циліндрична оболонка з жорстко закріпленими повздовжніми краями

Зазначимо, що вихідні рівняння (рівняння рівноваги, фізичні та геометричні співвідношення тощо) у цьому випадку такі самі, як і в попередній задачі. Тому при обчисленні внутрішніх зусиль ( $N, Q$ ), моменту ( $M$ ), кута повороту нормалі ( $\vartheta$ ) і переміщень ( $u, w$ ) оболонки можна скористатись формулами (17), (18), (23), (26), (27) і (31), отриманими в попередньому розділі. Відмінності мають місце тільки при знаходженні сталої інтегрування  $C_3$  (22) та складових  $M_1$  і  $l_1$  виразу для моменту (23), які для довгої некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими повздовжніми краями визначаються таким чином.

1. Підставляючи вираз (20) для моменту у формулу (25) для кута повороту нормалі, отримаємо

$$\vartheta = \frac{C_2}{D_M} \int_0^{\varphi} r l_0 dt + \frac{1}{D_M} \int_0^{\varphi} r M_0 dt + \frac{C_3}{D_M} \int_0^{\varphi} r dt + C_4. \quad (33)$$

З граничної умови  $\vartheta(0) = 0$  знаходимо сталу інтегрування  $C_4 = 0$ , а з умови  $\vartheta(\alpha) = 0$  – сталу  $C_3$ :

$$C_3 = -\frac{C_2}{L} \int_0^{\alpha} r l_0 dt - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r M_0 dt; \quad L = \int_0^{\alpha} r dt. \quad (34)$$

2. За допомогою отриманого співвідношення для сталої інтегрування  $C_3$  складові моменту у формулі (23) подамо у такому вигляді:

$$M_1 = M_0 - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r M_0 dx; \quad l_1 = l_0 - \frac{1}{L} \int_0^{\alpha} r l_0 dx. \quad (35)$$

### ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ У ВИРАЗАХ ДЛЯ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Оскільки підінтегральні функції у формулах (6)-(9), (12), (13), (17), (18), (23), (24), (26), (27) і (31) для внутрішніх зусиль, згинного моменту, кута повороту нормалі, тангенціального переміщення і прогину оболонки неперервні, то інтеграли в цих формулах існують, але для більшості поперечних перерізів циліндричної оболонки первісні підінтегральних функцій не

виражаються через елементарні функції. Тому в розробленій методиці зазначені інтеграли обчислюються чисельно з використанням формули трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]. \quad (36)$$

Тут  $x_i = a + i\Delta x$  – вузли інтегрування, які розбивають відрізок  $[a, b]$  на  $n$  рівних частин довжиною  $\Delta x = (b - a)/n$ .

Зауважимо, що підінтегральна функція у формулі трапецій може бути задана аналітично або представлена у вигляді таблиці (масиву) значень у вузлах інтегрування.

### АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Конкретні результати дослідження НДС представимо для замкненої нескінченно довгої ортотропної циліндричної оболонки овального перерізу, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності  $q$ .

Прийmemo, що поперечний переріз оболонки має дві осі симетрії і задається параметричними рівняннями виду:

$$Y = r_0 \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right]; \quad Z = r_0 \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \varphi + \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right]; \quad (37)$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \xi = 3 \frac{a-b}{a+b}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

де  $a, b$  – велика і мала півосі поперечного перерізу.

Для радіуса кривини поперечного перерізу з використанням рівностей (37) отримаємо вираз:

$$r = r_0 (1 + \xi \cos 2\varphi). \quad (38)$$

Дослідження проведені при таких значеннях геометричних і фізико-механічних параметрів оболонки:

$$a/h = 12; \quad b/h = 8; \quad E_{ss} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad E_{\varphi\varphi} = 38,4 \text{ ГПа};$$

$$G_{s\varphi} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad G_{\varphi\zeta} = 2 \text{ ГПа}; \quad \nu_{\varphi s} = 0,238.$$

У табл. 1 наведено розподіл значень внутрішніх силових факторів ( $\tilde{N} = N/hq$ ;  $\tilde{Q} = Q/hq$ ;  $\tilde{M} = M/h^2q$ ) і узагальнених переміщень ( $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}E_{\varphi\varphi}/q$ ;  $\tilde{u} = uE_{\varphi\varphi}/hq$ ;  $\tilde{w} = wE_{\varphi\varphi}/hq$ ) уздовж контуру поперечного перерізу оболонки. Дані отримані з використанням розробленої аналітично-чисельної методики для трьох варіантів модуля зсуву в площині поперечного перерізу: 1)  $G_{\varphi\zeta} = 0,2 \text{ ГПа}$  ( $K = 1$ ); 2)  $G_{\varphi\zeta} = 2 \text{ ГПа}$  ( $K = 2$ ); 3)  $G_{\varphi\zeta} = \infty$  ( $K = 3$ ). При виконанні розрахунків відрізок інтегрування  $[0, \pi/2]$  розбивався на 800 частин.

Результати аналітичного (точного) розв'язання задачі для другого варіанту модуля зсуву ( $K = 2$ ) представлені в табл. 2. Там же в останньому рядку подані відповідні значення компонент НДС циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу ( $a/h = b/h = 10$ ).

Наведені в табл. 1, 2 результати свідчать про ефективність запропонованої методики. Так, розбиття відрізка  $[0, \pi/2]$  на 800 частин при виконанні чисельного інтегрування забезпечує збіг чотирьох значущих цифр аналітично-чисельного розв'язку задачі для замкненої овальної циліндричної оболонки з аналітичним (точним) розв'язком цієї задачі.

Таблиця 1 – Внутрішні силові фактори і узагальнені переміщення на контурі поперечного перерізу (аналітично-чисельний розв'язок)

К	$\varphi$	$\tilde{N}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{M}$	$\tilde{g}$	$\tilde{u}$	$\tilde{w}$
1	0	8	0	17	0	0	15817
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-6610	-2147
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-11135
2	0	8	0	17	0	0	9624
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3845	-1483
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-6269
3	0	8	0	17	0	0	8936
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3538	-1410
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-5728

Урахування деформацій поперечного зсуву ( $K = 1; 2$ ) при розрахунку оболонки призводить до збільшення абсолютних величин тангенціальних переміщень і прогинів у порівнянні з результатами, отриманими для моделі Кірхгофа-Лява ( $K = 3$ ). Для першого варіанту розрахунку збільшення максимальних тангенціальних переміщень складає 87%, а максимальних прогинів – 77%. У той же час величини внутрішніх силових факторів і кута повороту нормалі для всіх трьох варіантів розрахунку набувають однакових значень.

Із відхиленням форми поперечного перерізу оболонки від кругової суттєво зростають максимальні значення всіх компонент НДС. Так, для другого варіанту розрахунку (дійсних значень модуля зсуву) максимальні прогини зростають у 100 разів.

Таблиця 2 – Внутрішні силові фактори і узагальнені переміщення на контурі поперечного перерізу (аналітичний розв'язок)

К	$\varphi$	$\tilde{N}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{M}$	$\tilde{g}$	$\tilde{u}$	$\tilde{w}$
2	0	8	0	17	0	0	9624
	$\pi/4$	10	-4	-9	982	-3845	-1483
	$\pi/2$	12	0	-23	0	0	-6269
2	0	10	0	0	0	0	96,26

### ВИСНОВКИ

Отже, у роботі розроблено аналітично-чисельну методику розв'язання лінійно-пружних задач статки композитних довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу з врахуванням деформацій поперечного зсуву, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні, вільна від мембранного замикання та забезпечує високу точність результатів. За допомогою запропонованої методики досліджено вплив деформацій поперечного зсуву і відхилення форми поперечного перерізу від кругової на напружено-деформований стан замкненої довгої овальної циліндричної оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском. Представляє подальший інтерес вивчення нелінійного деформування циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу як при дії статичного, так і динамічного навантаження.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Bresse J. A. C. Cours de Mécanique Appliquée. Première Partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions / J. A. C. Bresse. – Deuxième Édition. – Paris : Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.
2. Timoshenko S. Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems / S. Timoshenko. – New York : D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
3. Romano F. Noncircular Rings Under Shear Load / F. Romano, D. Ramlet // Jour. Frank. Instit. – 1967. – 284, No 5. – P. 283-299.
4. Григоренко Я. М. Анализ напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек при изменении их толщины и сохранении веса / Я. М. Григоренко, Л. И. Захарийченко // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 39-47.
5. Сторожук Є. А. Про аналітичні розв'язки деяких крайових задач для циліндричної оболонки овального перерізу [Електронний ресурс] / Є. А. Сторожук // Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць / Національний технічний університет України «КПІ». – Київ, 2015. – Вип. 1. – С. 72-79. – Режим доступу : <http://mmtu.in.ua/latest>.
6. Коноплев Ю. Г. Теоретико-экспериментальный метод в задаче устойчивости цилиндрической оболочки эллиптического сечения / Ю. Г. Коноплев, А. А. Саченков // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань : Изд-во КГУ, 1984. – Вып. 17, ч. 1. – С. 135-142.
7. Железнов Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – 43, № 4. – С. 155-160.
8. Yamada G. Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile / G. Yamada, T. Irie, Y. Tagawa // J. Sound and Vibr. – 1984. – 95, №1. – P. 117-126.
9. Мейш В. Ф. Нестационарная динамика продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения / В. Ф. Мейш, Н. П. Кепенач // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 6. – С. 83-89.
10. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник / Я. М. Григоренко, В. Д. Будак, О. Я. Григоренко. – Миколаїв : Ліон, 2010. – 294 с.

## REFERENCES

1. Bresse, J.A.C. (1866), [Cours de Mécanique Appliquée. Première Partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions], Gauthier-Villars, Paris.
2. Timoshenko, S. (1941), [Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems], D. Van Nostrand Company, New York.
3. Romano, F. and Ramlet, D. (1967), "Noncircular Rings Under Shear Load", *Jour. Frank. Instit*, vol. 284, no. 5, pp. 283-299.
4. Grigorenko, Ya.M. and Zakhariichenko, L.I. (1999), "Analysis of stress-strain state of circular cylindrical shells when changing their thickness and weight saving", *Prikl. mekhanika*, vol. 35, no. 6, pp. 39-47.
5. Storozhuk, E.A. (2015), "On the analytical solutions of some boundary value problems for cylindrical shell oval cross-section", *Matematika v suchasnomu tekhnichnomu universiteti, Zbirnik naukovometodichnikh prats' Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu Ukraini "KPI"*, issue 1, pp. 72-79, available at: <http://mmtu.in.ua/latest> (access January 20, 2016).
6. Konoplyev, Yu.G. and Sachenkov, A.A. (1984), "Theoretical and experimental method in the problem of stability of a cylindrical shell elliptical cross-section", *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek: trudy seminarov KFTI KF AN SSSR*, Izdatelstvo KGU, Kazan, issue 17, part 1, pp. 135-142.

7. Zheleznov, L.P. and Kabanov, V.V. (2002), "Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under axial compression and internal pressure", *Prikl. Mekhanika i tekhn. fizika*, vol. 43, no. 4, pp. 155-160.
8. Yamada, G., Irie, T. and Tagawa, Y. (1984), "Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile", *J. Sound and Vibr.*, vol. 95, no. 1, pp. 117-126.
9. Meish, V.F. and Kepenach, N.P. (2014), "Transient dynamics longitudinally reinforced cylindrical shells elliptical cross-section", *Prikl. mekhanika*, vol. 50, no. 6, pp. 83-89.
10. Grigorenko, Ya.M., Budak, V.D. and Grigorenko, O.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii' obolonok na osnovi dyskretno-kontinual'nikh metodiv: navchal'nyj posibnyk* [Solving the problems of membranes based on discrete kontynualnye methods: Tutorial], Ilion, Mykolayiv.

УДК 539.3

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ ДВУХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший преподаватель, Шупчинская К. С., студентка

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Получено численное решение статической контактной задачи о фрикционном взаимодействии двух упругих бесконечных круговых цилиндров с ортогональными осями. Для учета трения, возникающего в точках поверхности соприкосновения тел, использован закон трения Кулона в перемещениях. Граничные условия контактного взаимодействия задавались в ограниченной области, содержащей неизвестную область контакта при неизвестной границе зоны сцепления и зоны проскальзывания. Задача сведена к решению системы нелинейных граничных интегральных уравнений. Приближенное решение системы получено с помощью дискретизации её уравнений и использования метода простой итерации для решения дискретного аналога системы. Численный анализ посвящен оценке влияния трения на нормальные и касательные контактные напряжения. Установлено, что трение практически не оказывает влияние на нормальные напряжения и размеры зоны контакта. Касательные напряжения достигают максимальных значений на границе зоны сцепления и зоны проскальзывания.

*Ключевые слова: контактная задача, упругость, трение Кулона, сцепление, проскальзывание, цилиндры, интегральное уравнение, итерационный метод.*

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО СТИСКУВАННЯ ДВОХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший викладач, Шупчинська К. С., студентка

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Отримано чисельний розв'язок статичної контактної задачі про фрикційну взаємодію двох пружних нескінченних кругових циліндрів з ортогональними осями. Для урахування тертя, що виникає в точках поверхні зіткнення тіл, використовувався закон тертя Кулона в переміщеннях. Крайові умови контактної взаємодії задавались в обмеженій області, яка містить у собі невідому область контакту при невідомій межі зчеплення і зони проковзування. Задачу зведено до розв'язання системи нелінійних граничних інтегральних рівнянь. Наближений розв'язок системи отримано за допомогою дискретизації її рівнянь і використання метода простої ітерації для розв'язання дискретного аналога системи. Чисельний аналіз присвячено оцінці впливу тертя на нормальні і дотичні контактні напруження. Встановлено, що тертя практично не впливає на