6. Спиридонова І. М. Особливості квазіевтектичної кристалізації / І. М. Спиридонова, О. Ю. Береза, О. П. Ващенко // Металофізика і новітні технології. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 447-455.

7. Шульга А. В. Метастабильные равновесия и образование выделений квазикристаллической фазы в быстрозакаленных сплавах системы Al-Mn [Электронный ресурс] / А. В. Шульга. – 2010. – Режим доступа : http://litterref.ru/bewmerqasrnaotrrna.html/.

REFRRENCE

1. Adeeva, L.I. and Borisova, A.L. (2002), "Quasicrystall alloys as a new perspective material to protection covers", *Fizyka i khimiya tverdoho tila*, vol. 3, no. 3, pp. 454-465.

2. Borisov, Y.S., Borisov, A.L, Adeeva, L.I., Tunik, A.Y. and Panko, M.T. (2002), "Thermal coatings containing quasicrystalline phase, properties and application (review)", *Fizyka i khimiya tverdoho tila*, vol. 6, no. 1, pp. 124-136.

3. Karel Saksl, Dalibor Vojteˇch and Hermann Franz (2007), "Quasicrystal–crystal structural transformation in Al–5 wt.% Mn alloy", *J Mater Sci.*, no. 42, pp. 7198-7201.

4. Steurer, W. and Mayert, J. (1989), "Single-crystal X-ray study of the decagonal phase of the system Al–Mn", *Acta Cryst*., vol. B45, pp. 355-359.

5. Liakishev, N.P (1996), *Diagrammy sostoyaniya dvoynykh metallicheskikh system: v 2 t.* [The phase diagrams of binary metallic systems: in 2 vol.], vol, 2, Mashinostroenie, Moskow.

6. Spiridonov, I.O., Bereza, O.Y. and Vashchenko, O.P. (2005), "Features quasi eutectic crystallization", *Metalofizyka i novitni tekhnolohiyi*, vol. 27, no. 4, pp. 447-455.

7. Shulga, A.B. (2010), "Metastable equilibrium and the formation of precipitates quasicrystalline phase in rapidly quenched alloys of the Al-Mn", available at: http://litterref.ru/bewmerqasrnaotrrna.html/.

УДК 539.3

ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА КОЛИВАННЯ ФГМ ПОЛОГИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ ЗМІННОЮ ЗА ЧАСОМ ТОВЩИНОЮ

Фатєєва Ю. О.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

fateevajulia@gmail.com

У роботі розглядається наближений аналітичний розв'язок задачі динаміки пологої оболонки із функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ) і змінною за часом товщиною при наявності періодичного зовнішнього навантаження. Рух конструкції описується на основі класичної теорії оболонок. До цього напрямку досліджень можна віднести публікації [1-3]. Особлива увага в роботі приділяється дослідженню впливу характеру зміни товщини оболонки за часом на динамічну поведінку при заданих початкових умовах. Основні залежності «деформації – переміщення» базуються на теорії Кармана. Проблема зводиться до сингулярного нелінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінною за часом правою частиною. Проведено порівняння здобутого аналітичного розв'язку для деяких параметрів конструкції з прямим чисельним інтегруванням початкового рівняння задачі.

Ключові слова: тонкостінні оболонки з ФГМ, нелінійні коливання, теорія Кармана, метод ВКБ.

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕОДИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ НА КОЛЕБАНИЯ ФГМ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ВРЕМЕНИ ТОЛЩИНОЙ

Фатеева Ю. А.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

fateevajulia@gmail.com

В работе представлено приближенное аналитическое решение линейной задачи динамики пологой оболочки из функционально-градиентного материала (ФГМ) при наличии внешней динамической нагрузки на основе методов возмущений и фазовых интегралов (метод ВКБ). Движение конструкции описывается на основе классической теории оболочек. Особое внимание уделяется исследованию характера внешней нагрузки и свойств материала на динамическое поведение при заданных начальных условиях. Нелинейные зависимости «деформации–перемещения» базируются на теории Кармана. Проблема сводится к сингулярному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными по времени коэффициентами. Проведено сравнение полученного аналитического решения для некоторых параметров конструкции с прямым численным интегрированием основного уравнения задачи.

Ключевые слова: тонкостенные оболочки из ФГМ, нелинейные колебания, теория Кармана, метод ВКБ.

INFLUENCE OF EXTERNAL PERIODIC OSCILLATION OF A SHALLOW SHELL STRUCTURES MADE OF FGM WITH VARIABLE THICKNESS IN TIME

Fatieieva Yu.

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporozhzye, 69600, Ukraine

fateevajulia@gmail.com

This paper deals with non-linear vibration of shallow spherical shell with initial imperfection made of functionally graded material (FGM) and under an external dynamic loading. The equations of motion, compatibility and stability of the construction are described by the classical theory of shells (Karman theory). It is assumed that the shell base surface as geometrical middle surface. In this paper, we analyze the most popular case of functionally graded shell which top surface is ceramic and bottom surface is metal.

The properties of construction are graded in the thickness direction according to the given power low distribution in the terms of volume fraction of the constituents of the construction and initial conditions.

Special attention is paid to study of influence external load and material properties on the dynamic behavior construction with given initial conditions. Discussed problem leads to the singular linear non homogeneous second order differential equation with time dependent parameters.

An approximate analytical solution for forced oscillations of geometrically non-linear FGM imperfect shallow cylindrical shells with time dependent parameters on the basis of hybrid perturbation WKB approximation method are obtained. The analytical solution was compared with direct numerical integration of initial equation of the problem. For some particular parameters of structure an analytical solutions are in a good enough correlations with direct numerical solutions.

Key words: FGM shell, nonlinear vibration, Karman theory, WKB approximation method.

Основне диференціальне рівняння нелінійних коливань ФГМ пологих оболонок при наявності динамічного зовнішнього навантаження і товщиною, залежною від часу

Нелінійний аналіз динаміки базується на системі рівнянь згідно до роботи [1]. Вважається, що ФГМ полога оболонка шарнірно закріплена на кінцях, під дією зовнішнього тиску $q_0(t)$ і стискаючих зусиль $r_0(t)$, $p_0(t)$. Вважається, що модуль пружності і масова щільність змінюються по товщині, коефіцієнт Пуассона є величиною постійною, а товщина оболонки є функцією часу. При цьому

$$V_m + V_c = 1, \tag{1}$$

$$V_c = \left(\frac{2z+h(t)}{2h}\right)^k, \tag{2}$$

де V_m, V_c – відповідно об'ємні фракції металу та кераміки; $h(t)$ – товщина оболонки; k – показник фракцій компонентів матеріалу.

Модуль пружності, масова щільність і коефіцієнт Пуассона для ФГМ можуть бути знайдені за наступними залежностями [2]

$$E(z) = E_m V_m + E_c V_c = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{2z+h(t)}{2h(t)}\right)^k,$$

$$\rho(z) = \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{2z+h(t)}{2h(t)}\right)^k, \tag{3}$$

$$v(z) = const.$$

Застосовуютьсягеометрично нелінійні залежності для деформацій і відносно великих переміщень відповідно до теорії Кармана:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial x_1} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2, \quad \chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\partial u}{\partial x_2} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2, \quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \tag{4}$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Рівняння сумісності деформацій мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2^0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}^0}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \tag{5}$$

Залежності внутрішніх сил, їх інверсія та моментів даються у формі:

$$N_1 = \frac{E_1}{1-v^2}(\varepsilon_1^0 + v\varepsilon_2^0) - \frac{E_2}{1-v^2}(\chi_1 + v\chi_2),$$

$$N_2 = \frac{E_1}{1-v^2}(\varepsilon_2^0 + v\varepsilon_1^0) - \frac{E_2}{1-v^2}(\chi_2 + v\chi_1), \tag{6}$$

$$N_{12} = \frac{E_1}{2(1-v)}\lambda_{12}^0 - \frac{E_2}{1-v}\chi_{12},$$

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{E_1}(N_1 - vN_2) + \frac{E_2}{E_1}\chi_1,$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{E_1}(N_2 - vN_1) + \frac{E_2}{E_1}\chi_2, \tag{7}$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{2(1+v)}{E_1}N_{12} + \frac{2E_2}{E_1}\chi_{12},$$

$$M_1 = \frac{E_2}{E_1}N_1 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}(\chi_1 + v\chi_2),$$

$$M_2 = \frac{E_2}{E_1}N_2 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}(\chi_2 + v\chi_2), \tag{8}$$

$$M_{12} = \frac{E_2}{E_1}N_{12} - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}\chi_{12},$$

де

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1}\right)h(t),$$

$$E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh(t)^2}{2(k+1)(k+2)}, \tag{9}$$

$$E_3 = \left[\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4}\right)\right]h(t)^3.$$

Відповідно до Кірхгоффа-Лява теорії оболонок рівняння руху зводяться до залежностей

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+$$

$$+k_1N_1+k_2N_2+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

де

$$\rho_1=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)dz=\left(\rho_m+\frac{\rho_c-\rho_m}{k+1}\right)h(t). \qquad (11)$$

Беручи до уваги лише сили інерції у напрямку, ортогональному до серединної поверхні оболонки ($u\ll w,\ v\ll w$), тобто враховуючи, що $\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0$ і $\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\to 0$, а також вводячи функцію напруги φ співвідношеннями

$$N_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},\quad N_2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\quad N_{12}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}, \qquad (12)$$

залежності (3.10) будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+N_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+k_1N_1+k_2N_2+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (13)$$

З урахуванням залежностей (7)-(13), а також наявності початкових недосконалостей у серединній поверхні оболонки,отримаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно функцій напруги і нормального переміщення:

$$\frac{1}{E_1}\Delta\Delta\varphi=-k_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},$$

$$\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{E_1E_3-E_2^2}{E_1(1-v^2)}\Delta\Delta w+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-k_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=q_0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{E_1}\Delta\Delta\varphi=-k_1\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x_2^2}-k_2\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x_1^2}+\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right]-\left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2}\right]=0,$$

$$\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{E_1E_3-E_2^2}{E_1(1-v^2)}\Delta\Delta(w-w_0)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-k_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=q_0.$$

Застосовуючи Бубнова-Гальоркіна процедуру з припущенням, що функція деформування оболонки $w=(x_1,x_2,t)$ задається у формі

$$w=(x_1,x_2,t)=f(t)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{b}, \qquad (15)$$

що відповідає граничним умовам шарнірного обпирання оболонки, основне рівняння зводиться до форми:

$$\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left[\frac{E_1E_3-E_2^2}{E_1(1-v^2)}\frac{(m^2+n^2\lambda^2)\pi^4}{a^4}+\frac{E_1(k_1n^2\lambda^2+k_2m^2)}{(m^2+n^2\lambda^2)^2}\right](f-f_0)-$$

$$-\frac{16E_1mn\lambda^2(k_1n^2\lambda^2+k_2m^2)}{3a^2(m^2+n^2\lambda^2)^2}\left[f^2-f_0^2+2f(f-f_0)\right]+$$

$$+\frac{512E_1m^2n^2\lambda^4}{9a^4(m^2+n^2\lambda^2)^2}f(f^2-f_0^2)=\frac{16Q\sin\Omega t}{\pi^2mn(1-t)}. \qquad (16)$$

АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ

За умови відсутності початкових недосконалостей і заданих параметрів зовнішнього навантаження

$$q_0(t) = Q \sin \Omega t, \tag{17}$$

$$r_0 = p_0 = 0, \tag{18}$$

$$a = b = 2m; \quad h = 0{,}01m; \quad k_1 = k_2 = \frac{1}{R}; \quad R = 5m, \tag{19}$$

а також параметрів жорсткості оболонки у відповідності до роботи [1], рівняння задачі дається у вигляді:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2{,}78 \cdot 10^6 f(t) = \frac{0{,}075 \cdot 10^6 \operatorname{Sin}(1{,}6 \cdot 10^3 t)}{1 - 16t}. \tag{20}$$

Аналітичний розв'язок рівняння (20) за початковими умовами

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \tag{21}$$

має вигляд:

$$f(t) = \sin K(t)\left(c_1 + \vec{c}_1(t)\right) + \cos K(t)\left(c_2 + \vec{c}_2(t)\right), \tag{22}$$

де

$$K(t) = 1{,}67 \cdot 10^3 t, \tag{23}$$

$$\vec{c}_1(t) = 0{,}677((0{,}51) CosIntegral[100 - 1600t] + 0{,}862 SinIntegral[100 - 1600t],$$

$$\vec{c}_2(t) = 2{,}724((0{,}506) CosIntegral[100 - 1600t] + 0{,}862 SinIntegral[100 - 1600t].$$

Результати чисельного аналізу основного рівняння задачі наведені на рис. 1-3.

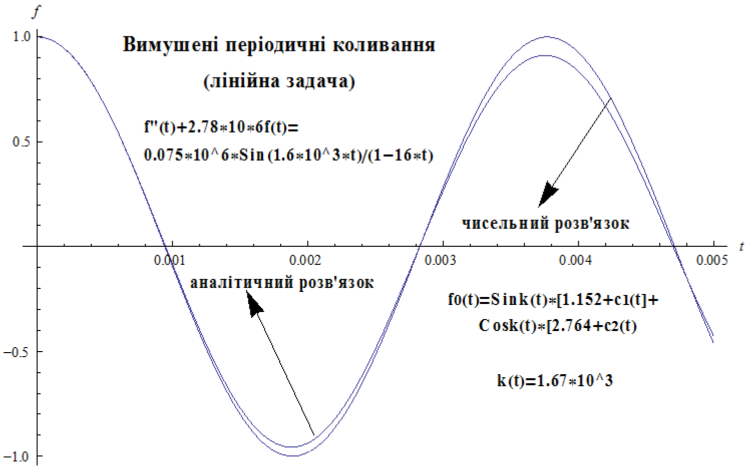

Рис. 1. Розв'язок задачі про вимушені коливання ФГМ пологої оболонки з періодичним зовнішнім навантаженням

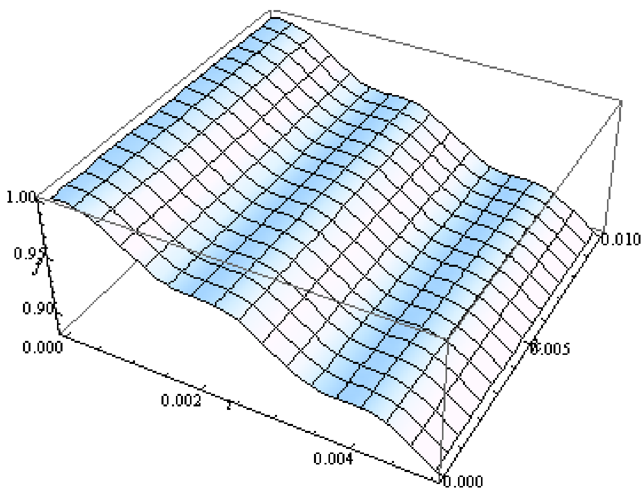

Рис. 2. Вплив коефіцієнту K_0 на характер динамічного процесу

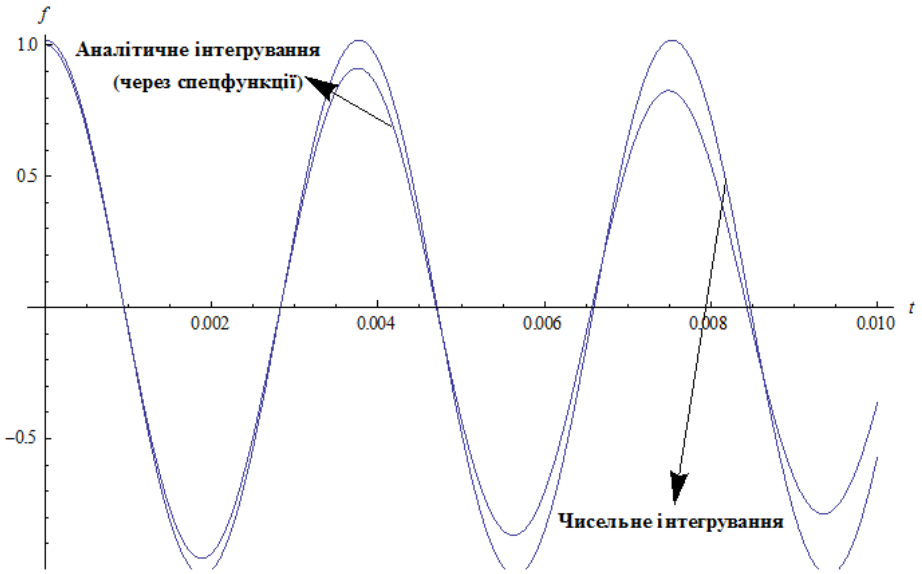

Рис. 3. Порівняння аналітичного і чисельного інтегрування у аналізі вимушених коливань

ВИСНОВОК

У роботі запропоновано розв'язок задачі про вимушені коливання пологої оболонки зі змінною за лінійним законом у часі товщиною і періодичною функцією зовнішнього навантаження. Надано чисельний аналіз вимушених коливань для оболонки із заданими параметрами жорсткості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dao Huy Bich. Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells / Dao Huy Bich, Yu Do Long // Vietnam Journal of Mechanics, VAST. – 2010. – Vol. 32. – No 1. –P. 1-14.

2. Vu Thi Thuy Anh. Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature / Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc // VNU Journal of Mathematics – physics. – 2013. – Vol. 29. – No 2. –P. 1-15.

3. Kowal-Michalska K. Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate / Katarzhyna Kowal-Michalska, Radoslaw J. Mania // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2013. – Vol. 17. – No 1. –P. 99-112.

REFERENCES

1. Dao Huy Bich and Yu Do Long (2010),"Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells",*Vietnam Journal of Mechanics*, *VAST*,vol. 32, no. 1, pp. 1-14.

2. Vu Thi Thuy Anh and Nguyen Dinh Duc (2013),"Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature", *VNU Journal of Mathematics – physics*, vol. 29, no. 2, pp. 1-15.

3. Kowal-Michalska, K. and Mania, Radoslaw J. (2013),"Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate", *Mechanics and Mechanical Engineering*, vol. 17,no. 1, pp. 99-112.