42. Ahusborde, E. and Glockner, S. (2011), "A 2D Block-structured Mesh Partitioner for Accurate Flow Simulations on Non-rectangular Geometries", *Computers & Fluids*, vol. 43, pp. 2-13.

43. Steensland, J. and Ray, J. (2005), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part I", *The International Journal of High Performance Computing Applications*, vol. 19, no. 4, pp. 409-422.

44. Steensland, J. and Ray, J. (2004), "A partitioner-centric model for structured adaptive mesh refinement partitioning trade-off optimization: Part II", *Proceedings of Parallel Processing Workshops*, Montreal, QC, Canada, 15-18 Aug 2004, pp. 231-238.

УДК 519.17

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ

Шерман З. А., аспирант

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,
просп. Академика Глушкова, 40, Киев, 03680 МСП, Украина

sherman.zoya@rambler.ru

В данной работе предложен краткий обзор методов построения грациозной разметки деревьев, а также других классов графов с целью их систематизации. Выделены частные конструктивные методы для деревьев. Детально описан один из универсальных методов нахождения грациозной разметки графов, в основе которого лежат алгоритмы линейного целочисленного программирования. Рассмотрены методы с аналитическим подходом для графов, порожденных циклами.

Ключевые слова: грациозная разметка, метод переноса ветвей и ребер, метод Δ-построения, целочисленное программирование, циклы с хордами.

КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ГРАЦІЙНОЇ РОЗМІТКИ ГРАФІВ

Шерман З. О., аспірант

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03680 МСП, Україна

sherman.zoya@rambler.ru

У наведеній роботі запропоновано огляд методів граційної розмітки дерев, а також інших класів графів з метою їх систематизації. Виділені приватні конструктивні методи для дерев. Детально описаний один з універсальних методів знаходження граційної розмітки графів, що має за основу алгоритми лінійного цілочисельного програмування. Розглянуті методи з аналітичним підходом для графів, породжених циклами.

Ключові слова: граційна розмітка, метод перенесення гілок і ребер, метод Δ-побудови, цілочисельне програмування, цикли з хордами.

A BRIEF REVIEW OF GRACEFUL GRAPHS CONSTRUCTION METHODS

Sherman Z. O.

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine,
40 Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03187

sherman.zoya@rambler.ru

The paper presents a brief review of methods for constructing graceful labeling of trees, as well as other classes of graphs for their systematization. For trees among the most famous and used methods those that are developing and have not lost their relevance are highlighted. They are method of transfering branches, edges and Δ-construction method. Section 3 describes in detail one of the universal methods of finding a graceful labeling of small orders graphs. The basis of this method is in linear integer programming algorithms. Special attention in this paper is given to publications which deal with graphs generated by cycles. They all have a general similarity – analytical approach in labeling construction.

Section 2 analyzes methods of graceful graphs construction in the order of their occurrence. The constructive method of graceful trees constructtion presented by P. Hrnciar and A. Haviar is distinguished. The authors proposed to transfer a certain amount of end-edges and subtrees emanating from one vertex of the graceful tree to another vertex of it. They proved that all the trees of diameter 4 and some trees of diameter 5 are graceful. Further development of transferring methods was done by M. Superdock in 2014, who suggested the use of certain sequences of transfering end-edges to construct some classes of graceful trees of diameter 6.

Section 3.2 deals with a particular constructive approach of defining graceful trees of large size among known graceful trees. K. Koh, D. Rogers, T.Tan completed the construction of the new graph, adding to the disjoint union of isomorphic copies of this graceful graph *T*, the additional vertice connected by edges with the isomorphic image of a vertex *T*. The method is used for the gracefulness study of symmetrical trees. The same authors summarized this method, identifying isomorphic images of the vertices of *T* with an additional vertex, as well. In 1979, the construction of graceful tree was implemented by a given pair of graceful trees and was called Δ-construction. Using it, K. Koh and others have proved gracefulness of the full *m-ary* tree. In 1998 M. Burzio, G. Ferrarese made additions to the algorithm of Δ-construction and called it его Δ+1-construction. Using the method of Δ+1-construction the subdivision graph gracefulness was proved.

Section 4 describes a universal method of graceful label constructing for different classes of graphs. In 2003 T. Redl based algorithm for finding the graceful labeling of Petersen graphs and double cones on one of the methods of linear integer programming. Similar results were obtained in K. Eshghi and P. Azimi’s studies. The disadvantages of this method are related to the limited size of the graphs.

Section 5 distinguishes the graceful labeling methods for constructing graphs with a cyclic structure. The basis of some of them is in the findings of a certain functional dependence, and that of the others is in a recursive method. A. Rosa having considered gracefulness of cycle Cn was the founder of this direction. In 1977 R. Bodendiek, H. Schumacher and H. Wagner first studied the cycles with a chord and constructed graceful labeling for some special cases of such cycles. Their research was summarized by C. Delorne, M. Maheo, K. Koh, H. Tan in 1980 and K. Ma and C. Feng in 1984 who proved that any cycle with chord is graceful. In 1985 K. Koh and others offered a method of graceful labeling construction for cycles with P_k-chords for k=3 and hypothesized that all cycles with P_k-chords are graceful. In 2005 G.Sethuraman and A.Elumalai presented a recursive method of constructing graceful labelings for cycles C_n (n≥6) with parallel P_k-chords, with k=3, 4, 6, 8, 10, and suggested that the cycles C_n with parallel P_k-chords were graceful for any even k. In 2013 G.Sethuraman A.Elumalai studied methods of constructing graceful C_n (n≥8) cycles with zigzag chords, which link the alternating tops of the cycle. In 2014 Kaneria V.J., Makadia H.M. and Meghapara M. studied the cycles with double chords. They provided a method of constructing graceful labeling for any cycle C_n with a double chord where n≡2(mod 4).

Key words: graceful labeling, method of transfering branches and edges, Δ-construction, integer programming, cycles with chords.

ВВЕДЕНИЕ

Математическими моделями многих задач выступают графы. В основе методов решения некоторых из них в таких областях, как рентгеновская кристаллография, теория кодирования, радиолокация, астрономия, проектирование схем и сетей, управление базами данных, лежит теория разметок графов. Ее зарождение началось в 1963 году с гипотезы Г. Рингеля. Он предположил, что граф K_{2n+1} можно разложить на $2n+1$ подграфа, каждый из которых изоморфный заданному дереву с n ребрами [1]. При решении этой гипотезы А. Роса в 1967 году ввел понятие β-оценки графа, а также ряд других оценок, как инструмент для разложения графа на изоморфные подграфы [2]. В 1978 году в работах С. Голомба появился термин грациозная разметка, являющийся тождественным β-оценке. Первоначально А. Роса изучал только грациозность деревьев и выдвинул предположение о том, что все деревья грациозные. На данный момент не существует общего подхода нахождения грациозной разметки для всех классов деревьев и поэтому проблема грациозности деревьев, известная как гипотеза Рингеля-Котцига-Роса, остается открытой.

Анализ публикаций по данной тематике показал, что все методы построения грациозной разметки деревьев можно разделить на универсальные и частные. Целью данной работы является краткий обзор методов построения грациозной разметки деревьев, а также других классов графов для осуществления их систематизации. Для деревьев, среди известных и наиболее применяемых частных методов, выделим те, которые сегодня развиваются и не утратили свою актуальность. Это метод переноса ветвей, ребер и метод Δ-построения. Возможно, в будущем их можно использовать для построения грациозных разметок других классов графов. Учитывая широкое использование систем программирования, в разделе 3 детально описан один из универсальных методов нахождения грациозной разметки графов малых порядков. В основе этого метода лежат алгоритмы линейного целочисленного программирования. Отдельное внимание в данной работе уделено публикациям, в которых рассматриваются графы, порожденные циклами. Все они имеют общее сходство – аналитический подход построения грациозной разметки.

В разделе 2 анализ методов построения грациозных графов осуществлен в порядке их возникновения. Цепи – это исторически первый класс деревьев, для которого найдена грациозная разметка [2]. Затем рассматривались деревья гусеницы, звезды, грациозные разметки для них найдены с помощью простых алгоритмов. Авторы работы [4] использовали более сложный способ построения новых грациозных деревьев. Они предложили метод переносов некоторого количества висячих ребер, а также поддеревьев, исходящих из одной вершины грациозного дерева в другую его вершину. Доказали, что все деревья диаметра 4 и некоторые деревья диаметра 5 являются грациозными. Данный метод относится к частным и представлен в разделе 2.1. Его дальнейшее развитие осуществил М. Сайпердок в 2014 году, предложив использовать определенные последовательности переноса висячих ребер, для построения некоторых классов грациозных деревьев диаметра 6.

В разделе 2.2 рассмотрен один из конструктивных подходов нахождения грациозных деревьев больших размеров из известных грациозных деревьев. Его применяли Р. Стентон, С. Занке [8], К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан [9-11]. К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан выполнили построение нового графа, добавив к дизъюнктивному объединению изоморфных копий данного грациозного графа T дополнительную вершину, соединенную ребрами с изоморфными образами некоторой фиксированной вершины T. Данный метод использован при исследовании на грациозность симметричных деревьев. Эти же авторы обобщили указанный метод, отождествив изоморфные образы фиксированной вершины графа T с дополнительной вершиной. В работе [10] построение грациозного дерева реализовано по заданной паре грациозных деревьев и названо Δ-построением. Используя его, К. Кох и др. доказали грациозность полного -арного дерева. В 1998 году М. Буржио и Г. Феррерас внесли дополнения в алгоритм Δ-построения [10] и назвали его Δ_{+1}-построение. Используя метод Δ_{+1}-построения, доказана грациозность графа подразбиений.

В разделе 3 речь идет об универсальном методе построения грациозных разметок различных классов графов, представленном в работах [12-14]. В 2003 году Т. Редл в основу алгоритма нахождения грациозной разметки графов Петерсона и двойных конусов положил один из методов линейного целочисленного программирования. Аналогичные результаты получены К. Эшти и П. Азими в работах [13, 14]. Недостатки этого метода связаны с ограничением размеров графов.

Все графы, кроме деревьев, содержат в качестве подграфов циклы, поэтому раздел 4 посвящен методам построения грациозной разметки графов с циклической структурой. В их основу положен вывод определенной функциональной зависимости, чаще всего с элементами рекурсии. А. Роса в работе [2], рассмотрев грациозность цикла C_n, стал основоположником данного направления. В 1977 году Р. Бодендик, Г. Шумахер и Г. Вагнер впервые изучили циклы с хордой и построили грациозную разметку для некоторых частных случаев. Обобщили их исследования С. Делорн, Г. Махео, К. Кох, Г. Тан в 1980 году, а К. Ма, С. Фенг в 1984 году доказали, что любой цикл с хордой является грациозным. В 1985 году К. Кох и К. Яп предложили метод построения грациозной разметки для циклов с P_k-цепью для $k = 3$ и выдвинули гипотезу, что все циклы с P_k-цепью являются грациозными. В 2005 году Г. Сесурамен и А. Елумалай представили рекурсивный метод построения грациозной разметки для циклов C_n $(n \geq 6)$ с параллельными P_k-цепями, где $k = 3, 4, 6, 8, 10$ и предположили, что циклы C_n с параллельными P_k-цепями грациозные для любого четного k. В 2013 году А. Елумалай и А. Ефремнес рассмотрели метод построения грациозных циклов C_n $(n \geq 8)$ с зигзагообразными хордами, которые связывают чередующиеся вершины в цикле. В 2014 году В. Канерия, Г. Макадия и М. Мегхапара [18] изучали циклы с двойными хордами. Они представили метод построения грациозной разметки для любого цикла C_n с двойной хордой, где $n \equiv 2(mod4)$. В работе [19] речь идет о графах, полученных дублированием вершины (ребра) в цикле. Их грациозность находится с помощью функциональных зависимостей, выведенных авторами.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под графом будем понимать конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называют порядком, а число $|E(G)|$ ребер – его размером.

Напомним определения и теоретические результаты, которые будут использованы в следующих разделах.

Определение 1.1. *Грациозной разметкой графа* $G = (V, E)$ называют инъекцию $f: V(G) \to \{0,1, \dots, n\}$, которая порождает разметку ребер $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$, где u, v – вершины графа G, при этом f^* – биекция из $E(G)$ на множество $\{1,2, \dots, n\}$.

Граф, допускающий грациозную разметку, называется *грациозным графом.*

Определение 1.2. Пусть u – вершина графа G. Построим граф $G + u_0$ добавлением вершины u_0 и ребер u_0v_i таким образом, что вершина $v_i \in V(G)$ соединяют новую вершину со всеми вершинами, смежными с вершиной u. Говорят, что граф $G + u_0$ получен дублированием вершины u, а саму операцию называют дублирование вершины в графе.

Определение 1.3. Пусть uv – ребро графа G. Построим граф $G + u_0v_0$ добавлением ребер u_0v_0, u_0v_i, u_0v_j таким образом, что вершины $v_i, v_j \in V(G)$ будут смежными концевым вершинам ребра uv. Говорят, что граф $G + u_0v_0$ получен дублированием ребра uv, а саму операцию называют дублирование ребра в графе.

Лемма 1.1 [4]. Пусть дерево T имеет грациозную разметку f и вершина u будет смежная с вершинами u_1, u_2. Пусть в поддереве T' дерева T определено множество вершин $V(T') = \Big(V(T) - \big(V(T_{u,u_1}) \cup V(T_{u,u_2})\big)\Big) \cup \{u\}$ и вершина $v \in V(T')$, где $v \neq u$.

а). Если $u_1 \neq u_2$, $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$ и дерево T'' получено путем отождествления вершины v дерева T' с вершиной u деревьев T_{u,u_1} и T_{u,u_2}, то f – грациозная разметка и для дерева T'';

б). Если $u_1 = u_2$, $2f(u_1) = f(u) + f(v)$ и дерево T'' получено путем отождествления вершины v дерева T' с вершиной u дерева T_{u,u_1}, то f – грациозная разметка и для дерева T''.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Работы, рассматривающие решение проблемы грациозности деревьев, связаны двумя подходами. Один из них математический, заключается в том, чтобы показать, что все деревья, имеющие определенную структуру, являются грациозными. Второй подход использует вычислительную технику, и направлен на исследование грациозности деревьев с определенным числом вершин. Для него наиболее существенный недавний результат – это доказательство того факта, что все деревья, у которых число вершин не больше 40 – грациозные. В данном разделе описаны основные методы построения грациозных деревьев, относящиеся к первому подходу.

2.1. Метод переносов. В 1978 году А. Котциг предложил идею преобразования одного грациозного дерева в другое путем удаления одного висячего ребра в этом дереве и добавления другого висячего ребра в другую его вершину с той же индуцированной меткой (Г. Бермонд [3]).

В 2001 году П. Гончар и А. Хавьер [4] расширили этот метод А. Котцига. Они предложили выполнять перенос некоторого количества висячих ребер, а также поддеревьев, исходящих из одной вершины грациозного дерева в другую его вершину.

Рассмотрим метод построения грациозного дерева, предложенный П. Гончар и А. Хавьер в работе [4] для произвольного грациозного дерева T порядка n. Пусть ребро $uv \in E(T)$. Обозначим $T_{u,v}$ – поддерево дерева T с множеством вершин $V\left(T_{u,v}\right) = \{w \in V(T)$, где $w = u$ или v находятся на цепи $u - w\}$. Реализуем метод по следующим правилам:

– метка каждой вершины назначается в соответствии с ее номером;

– для переноса ветвей из вершины u в вершину v используется обозначение $u \to v$.

Выполним преобразование грациозного дерева T для получения нового грациозного дерева T'' того же порядка. Для этого необходимо перенести поддеревья T_{u,u_1} и T_{u,u_2} из вершины u в вершину v согласно условиям, представленным в лемме 1.1 (рис. 1). Для реализации данного переноса висячих ребер в работе [4] используется два типа переноса висячих ребер. К первому относится перенос $u \to v$ конечного числа тех висячих ребер, у которых висячие вершины имеют метки $k, k+1, \ldots, k+m$. Перенос $u \to v$ выполняется согласно леммы 1.1, при условии $u + v = k + (k+m)$ (поскольку $k + (k+m) = k + 1 + (k+m-1) = = k + 2 + (k+m-2) = \cdots$). После переноса ветвей первого типа остается нечетное число висячих ребер, инцидентных вершине u. Перенос $u \to v$ второго типа – это перенос двух подмножеств конечного числа тех висячих ребер, у которых висячие вершины имеют метки $k, k+1, \ldots, k+m$ и $l, l+1, \ldots, l+m$. Перенос второго типа $u \to v$ выполняется согласно леммы 1.1, при условии $u + v = k + l + m$ (поскольку $k + 1 + (l + m - 1) = k + 2 + +(l + m - 2) = \cdots$). В этом случае вершине будет инцидентно нечетное или четное число висячих ребер.

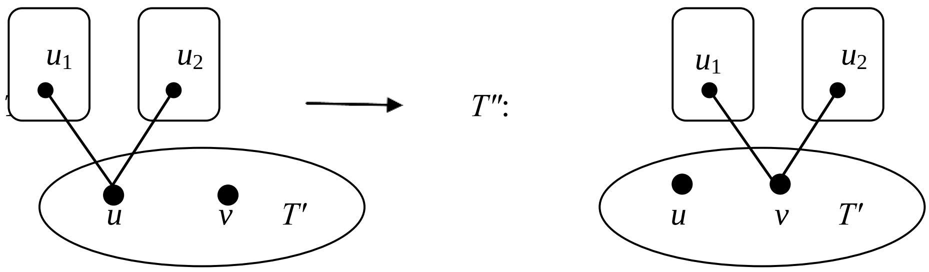

Рис. 1. Преобразование дерева T

Если выполняется перенос висячих ребер первого типа из вершины u, то следующим из этой вершины может быть перенос висячих ребер первого или второго типов, а после переноса второго типа – возможен перенос висячих ребер только второго типа.

Проиллюстрируем на грациозном дереве порядка 16 (для $k = 3$) применение всех типов переносов. Первоначальное дерево $K_{1,15}$ изображено на рисунке 2.

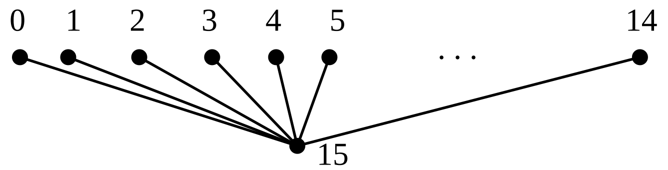

Рис. 2. Грациозное дерево $K_{1,15}$

Выполним перенос первого типа $15 \to 0$. Так как $15 + 0 = 3 + 1 + (15 - 3 - 1) = 4 + 11$, то переносим в вершину 0 висячие ребра, инцидентные висячими вершинами $4, 5, \ldots, 11$. Этот перенос $15 \to 0$ представлен на рисунке 3.

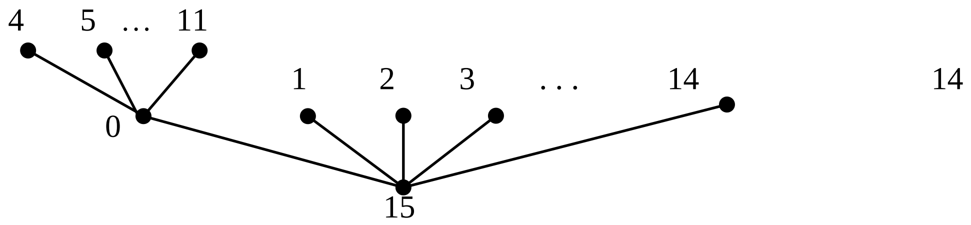

Рис. 3. Грациозное дерево

Аналогично выполняются переносы первого типа $0 \to 14$ и $14 \to 1$. Затем выполняется перенос второго типа $1 \to 13$. Схема переносов ветвей показана на рисунке 4.

0-14 4-11 4-10 5-10 5-6, 8-9

$15 \to 0 \to 14 \to 1 \to 13$

Рис. 4. Схема переносов ветвей

В результате имеем дерево T с грациозной разметкой, у которого все метки ребер различны (рис. 5).

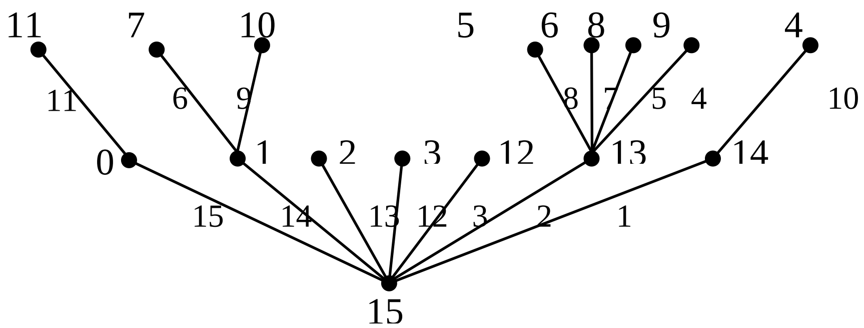

Рис. 5. Грациозное дерево T

П. Гончар и А. Хавьер применили данный метод переноса висячих ребер для построения грациозной разметки всех деревьев диаметра 4 [5]. Затем определили третий тип переноса, который назвали *backwards double 8-transfer*.Он включает в себя восемь переносов первого типа:

$$0 \to n \to 1 \to n-1 \to 0 \to n \to 1 \to n-1 \to 2.$$

Эта последовательность переносов оставляет четное количество висячих ребер на каждой вершине с меткой $0, n, 1, n-1$. Затем выполняется возврат к основной последовательности переносов $2 \to n-2 \to 3$ ... первого или второго типа. Используя третий тип переноса авторы построили грациозную разметку всех деревьев диаметра 5. П. Гончар и Г. Моножова в 2007 году [6] методом переносов построили грациозное обобщенное банановое дерево.

В 2014 году М. Сайпердок показал, что любой перенос может быть заменен на перенос первого типа и определил новые последовательности, состоящие только из переносов первого типа, для реализации грациозной разметки некоторых деревьев диаметра 6.

Таким образом, дальнейшее развитие метода переносов зависит от организации новых перспективных последовательностей переносов поддеревьев и висячих ребер.

2.2. Метод Δ-построения грациозных деревьев. В 1976 году И. Джахит [7] выдвинул гипотезу о том, что все полные бинарные деревья грациозные. Это послужило толчком к разработке новых методов порождения грациозных деревьев из деревьев меньших порядков.

Первый алгоритм построения грациозных деревьев больших порядков из грациозных деревьев меньших порядков встречается у Р. Стентона и С. Занке в работе [7]. Независимо К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан получили аналогичные результаты, усовершенствовали их, представив новые возможности для порождения грациозных деревьев [8-10].

Рассмотрим метод, предложенный К. Кохом, Д. Роджерсом и Т. Таном в 1977 году [8], названный Δ-построением. В данном методе за основу берется грациозное дерево T порядка $|V(T)| = n$ с разметкой f. Пусть вершина w дерева T имеет наибольшую метку n, т.е. $f(w) = n$. Построение происходит путем дизъюнктивного объединения изоморфных копий T_i дерева T с помощью новой вершины w_0 и ребер $w_0w_1, w_0w_2, \dots, w_0w_p$, где $p \geq 1$ и $w_i \in V(T_i)$ – изоморфные образы вершины w. Новое дерево обозначается T_w^p (рис. 6). Граф T_w^p с множеством вершин $pn + 1$ имеет грациозную разметку f^*, которая определяется следующим образом: $f^*(w_0) = pn + 1$ и для каждой вершины $v \in V(T_i)$, где $i = 1, 2, \dots, p$

$$f^*(v) = \begin{cases} in + 1 - f(v), & \text{если } d(w, v) - \text{четное в графе } T(n), \\ (p + 1 - i)n + 1 - f(v), & \text{если } d(w, v) - \text{нечетное в графе } T(n). \end{cases}$$

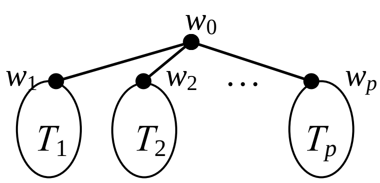

Рис. 6. Грациозное дерево T_w^p

Следующие две модификации метода Δ-построения предложили в 1979 году К. Кох, Д. Роджерс и Т. Тан в работе [10]. Одна из них заключается в том, что в дизъюнктивном объединении изоморфных копий T_i грациозного дерева T вершины $w_1, w_2, \dots, w_p$ отождествляются, то есть $w_1 = w_2 = \dots = w_p = w_0$. Во втором варианте используется два произвольных грациозных дерева S и T. Рассмотрим его более детально.

Пусть $|V(S)| = m$, $|V(T)| = n$ и $V(S) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Обозначим через f_m, f_n – грациозные разметки графов S и T, соответственно. Возьмем дерево S в качестве основы. В дереве T зафиксируем произвольную вершину v^*. Отождествим каждую вершину w_i, где $i = 1,2, \dots, m$ графа S с образом вершины v^* в каждой копии T_i изоморфной дереву T. Новое дерево имеет mn вершин и обозначается $S\Delta T$. Для каждой вершины v дерева T_i, $i = 1,2, \dots, n$ зададим функцию:

$$f^*(v) = \begin{cases} (f_m(w_i) - 1) - f_n(v), & \text{где } d(v^*, v) - \text{четное в графе } T(n), \\ \big(m - f_m(w_i)\big)n + f_n(v), & \text{где } d(v^*, v) - \text{нечетное в графе } T(n). \end{cases}$$

Функция f^* удовлетворяет условиям определения 1. Таким образом, $S\Delta T$ – грациозное дерево. Алгоритм построения $S\Delta T$ носит название Δ-построения.

Покажем использование данного метода на примере. Пусть графы S и T – грациозно размеченные деревья, представленные на рисунке 7. В результате Δ-построения образуется грациозное дерево $S\Delta T$ порядка 15 (рис. 8).

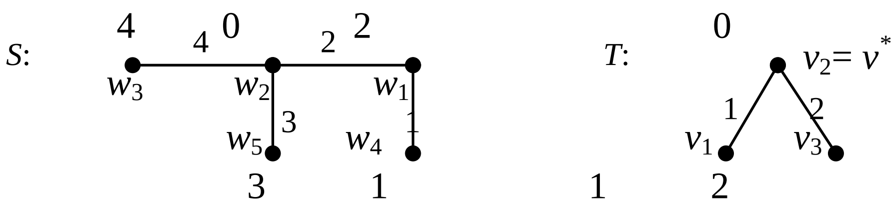

Рис.7. Грациозные деревья S и T

В 1998 году М. Буржио и Г. Фререрас [11] обобщили алгоритм Δ-построения. Они предложили T_i и T_j копии дерева T соединять произвольным ребром $v^i v^j$, а не фиксированным ребром $w_i w_j$ дерева S. На рисунке 9 представлено обобщенное Δ-построение дерева $S\Delta T$.

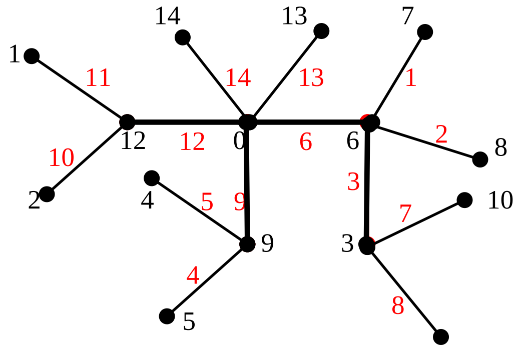

Рис.8. Грациозная разметка $S\Delta T$

М. Буржио и Г. Фререрас в работе [11] внесли изменения в метод Δ-построения. Они используют два грациозных дерева S и T, одно из которых берется в качестве основы. Авторы назвали его h-деревом, а другое дерево в виде копий. Алгоритм Δ-построения выполняется на всех вершинах $host$-дерева, кроме корневой вершины с наибольшей меткой. Корневая вершина помечается $(m-1)n+1$, а все остальные метки согласно метода Δ-построения. Полученное дерево обозначается как $S\Delta_{+1}T$, а сам метод называется Δ_{+1}-построение.

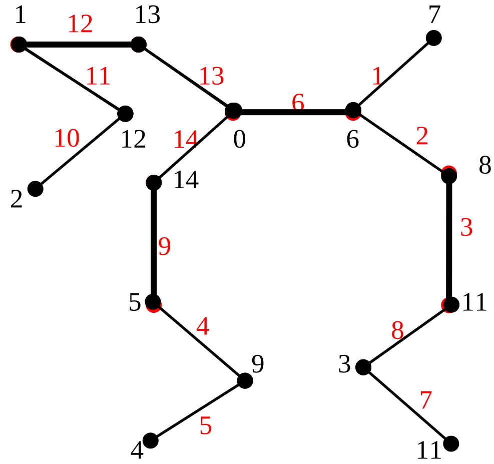

Рис. 9. Обобщенное Δ-построение

Рассмотрим его на примере. Пусть графы S и T – грациозно размеченные деревья, представленные на рисунке 10. В результате Δ_{+1}-построения образуется грациозное дерево $S\Delta_{+1}T$ порядка 7, как показано на рисунке 11.

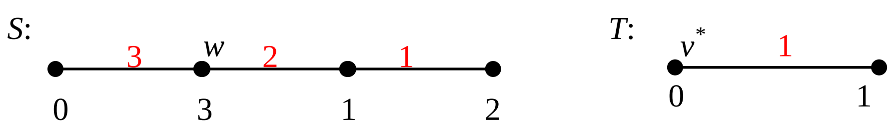

Рис. 10. Грациозные деревья S и T

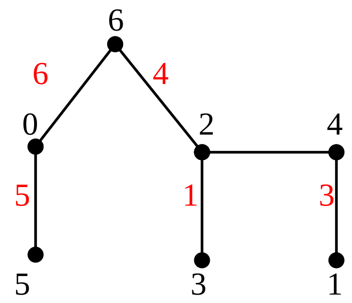

Рис. 11. Грациозное дерево $S\Delta_{+1}T$

Используя Δ-построение, доказана грациозность m-арного дерева для любого натурального m. Это доказательство стало ответом на гипотезу И. Джахита [7] о том, что все полные бинарные деревья грациозные.

3. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ

В данном разделе анализируются публикации, в которых использовались универсальные методы построения грациозной разметки графов. Т. Редл в работе [12], К. Ешти и П. Азими в работах [13] и [14] рассмотрели задачу построения грациозной разметки разных классов графов с применением методов линейного целочисленного программирования. Первоначально один из методов был применен для нахождения грациозной разметки графов Петерсона и двойных конусов в 2003 году в работе [12]. Опишем метод, представленный К. Ешти и П. Азими в 2004 году.

Пусть задан граф $G = (V, E)$ порядка m и размера n, не содержащий кратных ребер и петель. Введем ряд переменных, необходимых для составления ограничений:

x_i – метка -той вершины графа G, $i = 1, \dots, m$;

e_{ij} – метка ребра ij, $e_{ij} \neq 0$, $i \neq j$;

r_{ijlp} – разность меток ребер ij и lp, $ij \neq lp$, $r_{ijlp} \neq 0$;

s_{ijlp} – сумма меток ребер ij и lp, $s_{ijlp} \neq 0$, $e_{ij} \neq - e_{lp}$;

t_{ij} – разность меток вершин i и j, $i, j \notin V(G)$,

где $i, j, l, p = 1,2, \dots, m$.

Сформулируем задачу:

1) $x_i - x_j = e_{ij}$, для всех $i, j \in V(G)$, $(i, j) \in E(G)$, $i \neq j$;

2) $e_{ij} - e_{lp} = r_{ijlp}$, для всех $r_{ijlp} \neq 0$, $(i, j), (l, p) \in E(G)$, $(i, j) \neq (l, p)$;

3) $e_{ij} + e_{lp} = s_{ijlp}$, для всех $s_{ijlp} \neq 0$, $(i, j), (l, p) \in E(G)$, $(i, j) \neq (l, p)$;

4) $x_i - x_j = t_{ij}$, для всех $(i, j) \notin E(G)$, $i \neq j$;

5) $0 \leq x_i \leq m$, где x_i – целые числа;

6) e_{ij}, r_{ijlp}, s_{ijlp}, t_{ij}, – ненулевые числа,

где $i, j, l, p = 1,2, \dots, m$.

Полученные ограничения гарантируют выполнение условий грациозности, если $e_{ij} \in$ $\in \{1,2,3, \dots, n\}$ при $i, j \in V(G)$. Число введенных ограничений 1)-4) в постановке задачи приводят к $((n-1)^2 + 1/2n^2 - (n-1) - n/2)$ уравнениям [13], что значительно затрудняет поиск решения при увеличении значения n. Предлагаемый в этой работе способ модификации метода «Ветвей и границ» дает возможность не только отбросить условие целочисленности и ограничение 6), а так же особым образом выбрать переменную для ветвления. Этот выбор выполняется по стратегии «jumptracking» [13]. Согласно этой стратегии, в каждое полученное решение входят все выше описанные переменные, которые заносятся в список оптимальных решений. При этом все нецелочисленные и нулевые переменные каждого текущего решения распределяются в множества: $P_1 = \{e_{ij}, t_{ij} | e_{ij} = 0$ или $t_{ij} = 0\}$, $P_2 = \{r_{ijlp}, s_{ijlp} | r_{ijlp} = 0$ или $s_{ijlp} = 0\}$, $P_3 = \{x_i | x_i$ – имеет не целое значение$\}$. Переменная, выбранная из множества P_1, имеет больший приоритет над переменной из P_2. Аналогично, переменная из множества P_2 имеет больший приоритет над переменной из P_3. Если выбирается переменная из множеств P_1 или P_2, то решаем две новые подзадачи линейного программирования с дополнительными ограничениями (например: $x \geq 1$ и $x \leq -1$). Если выбирается переменная из множества P_3, то две новые подзадачи имеют следующие ограничения: в первой подзадаче дробную переменную x, уменьшая до $\lfloor x \rfloor$, получаем дополнительное ограничение: $x \leq \lfloor x \rfloor$; во второй подзадаче дробную переменную x увеличивая до $\lfloor x \rfloor + 1$, получаем дополнительное ограничение: $x \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

Если из списка оптимальных решений несколько раз выбирается переменная, которая не приводит к нужному результату, то данное решение удаляется из списка. Приведенный способ позволяет ускорить процесс нахождения оптимального решения задачи. Чем меньше мощность множества $|P_1| + |P_2| + |P_3|$, тем быстрее получим допустимое решение задачи.

В работах [13] и [14], используя выше описанный алгоритм, построена грациозная разметка для деревьев с 35, 40 вершинами, а так же определена грациозность определенных классов графов, выбранных произвольно.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРАЦИОЗНЫХ ГРАФОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ЦИКЛАМИ

Впервые грациозная разметка циклов C_n была представлена в работе А. Роса [2]. Такие виды графов, порожденные циклами, как циклы с хордами, циклы с P_k-цепью, циклы с двойными хордами, циклы с зигзагообразными хордами, циклы с дублированием вершины (ребра) выделим в одну группу. Их грациозность доказана с использованием однотипных функциональных зависимостей. Иной тип рекурсии в функциональной зависимости приводит к грациозной разметке циклов с параллельными хордами.

4.1. Циклы с хордами. В 1977 году Р. Бодендик, Г. Шумахер и Г. Вагнер приступили к исследованию на грациозность циклов с хордой. В 1984 году К. Ма, С. Фен в работе [15] представили метод построения грациозной разметки цикла с хордой (рис. 12). Остановимся на описании этого метода.

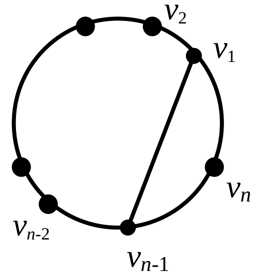

Рис. 12. Схема разметки графа $C_6 + v_{n-1}v_1$

Пусть дан граф $G = C_n + v_{n-1}v_1$, где $v_{n-1}v_1$ – хорда цикла C_n. Для каждой вершины v_i графа $G = C_n + v_{n-1}v_1$, где $n \equiv 1(mod4)$, определим на множестве вершин функцию $f: V \to$ $\to \{0,1,2,\dots,n+1\}$ следующим образом:

$$f(v_n) = n + 1;\;\; f(v_{n-1}) = 0;\;\; f(v_n) = n - k;$$

$$f(v_{2k+1}) = n - k, \;\text{ где }\; k = 0,1,2,\dots,\tfrac{n-3}{2};$$

$$f(v_{2k}) = k, \;\text{ где }\; k = 1,2,\dots,\tfrac{n-5}{4};$$

$$f(v_{2k}) = k + 1, \;\text{ где }\; k = \tfrac{n-1}{4}, \tfrac{n-1}{4} + 1, \dots, \tfrac{n-3}{2}.$$

Функция f будет инъективной, а индуцированная ею функция f^* на множестве ребер, в соответствии с определением 1.1, представляет собой биекцию. Таким образом, f порождает грациозную разметку в $G = C_n + v_{n-1}v_1$.

Для $n \equiv 2,3,0(mod\ 4)$ аналогичные результаты получены в работе [15] (рис. 13а).

Идея порождения грациозной разметки, описанная выше, была распространена на циклы с k хордами. Частным случаем является цикл с двойной хордой (рис. 13б). Для него грациозная разметка построена В. Канерием и др. в 2014 году [16].

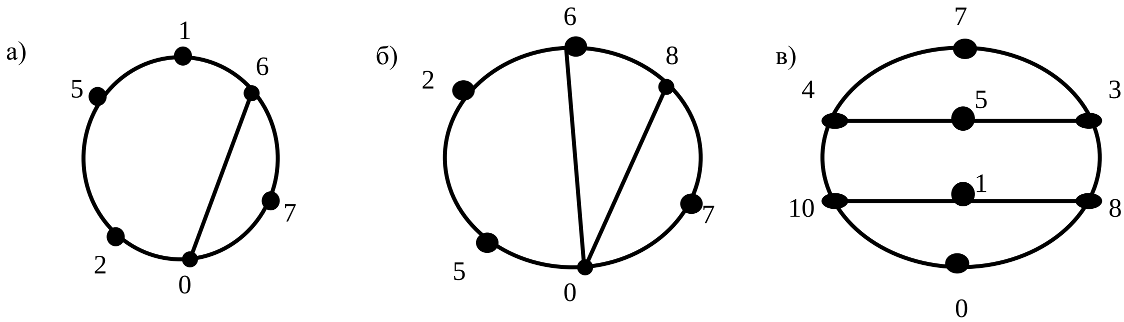

Рис. 13. Грациозная разметка цикла C_6: а) с хордой; б) с двойной хордой; в) с параллельными P_3-цепями

В 2005 году Г. Сесурамен и А. Елумалай представили рекурсивный метод построения грациозной разметки для циклов C_n $(n \geq 6)$ с параллельными P_k-цепями, где $k = 3,4,6,8,10$. Рассмотрим его для цикла C_n с P_3-цепями. Обозначим $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ и соединим пары вершин v_i, v_{n-i} цикла, где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ с концевыми вершинами P_3-цепей. Получим граф G, который имеет гамильтонову цепь с началом в вершине цикла v_0 и концом – v_α, где $\alpha = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, если n – нечетное и $\alpha = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, если n – четное. Выполним разметку вершин, согласно теоремы 1 [17]. Пример грациозной разметки цикла C_6 с параллельными P_3-цепями представлен на рисунке 13в.

4.2 Дублирование вершины (ребра) в цикле. Разработкой методов построения грациозной разметки графов, порожденных дублированием вершины (ребра) в циклах, занимались С. Вайдя, Л. Буюкумар, К. Секар. В 2002 году К. Секар представил метод дублирования вершины для цикла C_n, где $n \equiv 1$ или $2(mod4)$ [18]. С. Вайдя и Л. Буюкумар в 2011 году в работе [19] обобщили данный метод и доказали, что дублирование вершины (определение 1.2) можно применять для цикла любого порядка. Кроме этого они изучали графы, полученные дублированием ребра в циклах, и доказали, что они имеют грациозную разметку только для циклов четных порядков. Рассмотрим этот метод на примере. Обозначим $V(C_6) = \{v_0, v_1, \dots, v_5\}$ вершины цикла C_6 (рис. 14а). Выполним дублирование ребра v_0v_1, используя определение 1.3. Получим граф G (рис. 14б). Разметку вершин осуществим, согласно теоремы 2.3 [18].

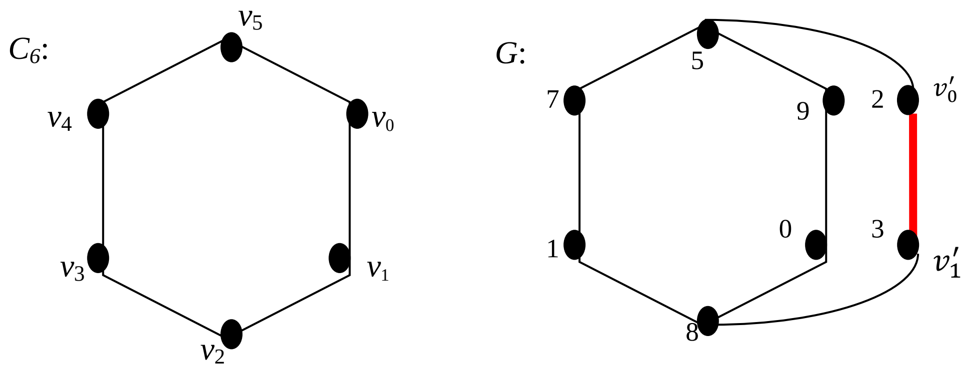

Рис. 14: а) разметка цикла C_6; б) грациозная разметка графа G

ВЫВОДЫ

В результате проведенного анализа выделены частные и универсальные методы построения грациозной разметки графов, которые нашли применение во многих областях, таких как теория чисел, теория кодирования, радиолокация, радиоастрономия, схемотехника. Выполненная систематизация, отображенная на схеме (рис. 15), позволяет свободно ориентироваться в разнообразии методов порождения грациозной разметки.

Рис. 15. Схема графов и методов построения грациозной разметки

ЛИТЕРАТУРА

1. Ringel G. Problem 25 / G. Ringel // In Theory of Graphs and Its Applications. Proceeding of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Publishing House of the Czech. Acad. of Science. Prague. – 1964. – P. 162.
2. Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph / A. Rosa // Theory of Graphs. International Symposium, Rome, July. – 1966. – Gordon and Breach, New York and Dunod Paris. – 1967. – P. 349-355.
3. Bermond J. Graceful graphs, radio antennae and French windmills / J. Bermond // Graph Theory and Combinatorics. – 1979. – P. 18-37.
4. Hrnciar P. All trees of diameter five are graceful / P. Hrnciar, A. Haviar // Discrete Mathematics. – 2001. – № 233 – P. 133-150.
5. Hrnciar P. A new family of graceful trees / P. Hrnciar, G. Monoszova // preprint. Combinatorica o.p.s. Department of Applied Mathematics. VfB – Technical University Ostrava, 2007.
6. Cahit I. Are all complete binary trees graceful? / I. Cahit // American Mathematical Monthly. – 1976. – Vol. 83. – P. 35-37.
7. Stanton R. Labeling of balanced trees / R. Stanton, C. Zarnke // Proc. 4th Southeast Conf. Combin. Graph Theory, Computing. – 1973. – P. 479-495.

8. Koh K. M. On graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // Nanta Mathematics. – 1977. – Vol. 10, № 2. – P. 207-211.

9. Koh K. M. Two theorems on graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // Discrete Mathematics. – 1979. – Vol. 25. – P. 141-148.

10. Koh K. M. Products of graceful trees / K. M. Koh, D. G. Rogers, T. Tan // Discrete Mathematic. – 1980. – Vol. 31. – P. 279-292.

11. Burzio M. The Subdivision Graph of a Graceful Tree is a Graceful Tree / M. Burzio, G. Ferrarese // Discrete Mathematics. – 1998. – Vol. 181, № 1-3. – P. 275-281.

12. Redl T. A. Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results / T. A. Redl // Tech. Report TR03-01, CAAM Department, Rice University. – Texas, 2003.

13. Eshghi K. Applications of mathematical programming in graceful labeling of graphs / K. Eshghi, P. Azimi // Journal of Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 1. – P. 1-8.

14. Eshghi K. An algorithm for finding a feasible solution of graph labeling problems / K. Eshghi, P. Azimi // Utilitas Mathematica. – 2007. – Vol. 72. – P. 163-174.

15. Ma K. J. About the Bodendiek's conjecture of graceful graph / K. J. Ma, C. J. Feng // Journal. Mathematical Research and Exposition. – 1984. – Vol. 4. – P. 15-18.

16. Kaneria V. J. Some graceful graphs / V. J. Kaneria, H. M. Makadia, M. Meghapara // International Journal of Mathematics and Soft Computing. – 2014. – Vol. 4, № 2. – P. 165-172.

17. Sethuraman G. Gracefulness of a cycle with parallel P_k-chords / G. Sethuraman, A. Elumalai // Australasian Journal of Combinatorics. – 2005. – Vol. 32. – P. 2005-2011.

18. Sekar C. Studies in Graph Theory / C. Sekar // Ph.D. Thesis. Madurai Kamaraj University. – 2002.

19. Vaidya S. K. Some new graceful graphs / S. K. Vaidya, L. Bijukumar // International Journal of Mathematics and Soft Computing. – 2011. – Vol. 1, № 1. – P. 37-45.

REFERENCES

1. Ringel, G. (1964), "Problem 25", *In Theory of Graphs and Its Applications. Proc. Symp. Smolenice 1963, Czech. Acad. Sci.*, p. 162.

2. Rosa, A. (1967), "On certain valuations of the vertices of a graph", *Theory of Graphs. International Symposium*, Rome, July – 1966, Gordon and Breach, New York and Dunod Paris. pp. 349-355.

3. Bermond, J. (1979), "Graceful graphs, radio antennae and French windmills", *Graph Theory and Combinatorics*, pp. 18-37.

4. Hrnciar, P. and Haviar, A. (2001), "All trees of diameter five are graceful", *Discrete Mathematics*, no. 233, pp. 133-150.

5. Hrnciar, P. and Monoszova, G. (2007), "A new family of graceful trees, preprint", *Combinatorica o.p.s.*, Department of Applied Mathematics. VfB – Technical University Ostrava.

6. Cahit, I. (1976), "Are all complete binary trees graceful?", *American Mathematical Monthly*, vol. 83, pp. 35-37.

7. Stanton, R. and Zarnke, C. (1973), "Labeling of balanced trees", *Proc. 4th Southeast Conf. Combin. Graph Theory, Computing*. pp. 479-495.

8. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1977), "On graceful trees", *Nanta Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 207-211.

9. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1979), "Two theorems on graceful trees", *Discrete Mathematics*, vol. 25, pp. 41-148.

10. Koh, K.M., Rogers, D.G. and Tan, T. (1980), "Products of graceful trees", *Discrete Mathematics*, vol. 31, pp. 279-292.

11. Burzio, M. and Ferrarese, G. (1998), “The Subdivision Graph of a Graceful Tree is a Graceful Tree”, *Discrete Mathematics*, vol. 181, no. 1-3, pp. 275-281.

12. Redl, T.A. (2003), “Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results”, *Tech. Report TR03-01*, CAAM Department, Rice University, Texas.

13. Eshghi, K. and Azimi, P. (2004), “Applications of mathematical programming in graceful labeling of graphs”, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 1, pp. 1-8.

14. Eshghi, K. and Azimi, P. (2007), “An algorithm for finding a feasible solution of graph labeling problems”, *Utilitas Mathematica*, vol. 72, pp.163-174.

15. Ma, K.J. and Feng, C.J. (1984), “About the Bodendiek’s conjecture of graceful graph”, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, vol. 4, pp. 15-18.

16. Kaneria, V.J. Makadia, H.M. and Meghapara, M. (2014), “Some graceful graphs”, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, vol. 4, no. 2, pp. 165-172.

17. Sethuraman, G., Sethuraman, G. and Elumalai, A. (2005), “Gracefulness of a cycle with parallel P_k-chords”, *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 32, pp. 2005-2011.

18. Sekar, C. (2002), “Studies in Graph Theory”, *Ph.D. Thesis*, Madurai Kamaraj University.

19. Vaidya, S.K. and Bijukumar, L. (2011). “Some new graceful graphs. International Journal of Mathematics and Soft Computing”, vol. 1, no. 1, pp. 37-45.