

УДК 517.925

## РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО СКАЛЯРНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Городецкий В. Г., к. ф.-м. н., доцент

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»,  
просп. Перемоги, 37, г. Київ, 03056, Україна*

v.gorodetskyi@ukr.net

В статье рассматривается частный случай обратной задачи – реконструкция нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с внешним возбуждением по единственной наблюдаемой переменной, представленной скалярным временным рядом. Доказаны теоремы для систем с периодическим внешним возбуждением, которые могут быть положены в основу алгоритма для решения данной задачи. Возможность практического применения теорем проиллюстрирована численным методом. Выявлены возможные трудности, которые могут возникнуть при реализации алгоритма.

*Ключевые слова: реконструкция, система дифференциальных уравнений, внешнее возбуждение, периодическая функция, скалярный временной ряд, алгебраическая система, число обусловленности.*

## РЕКОНСТРУКЦІЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ ПО СКАЛЯРНОМУ ТИМЧАСОВОМУ РЯДУ

Городецкий В. Г., к. ф.-м. н., доцент

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»,  
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна*

v.gorodetskyi@ukr.net

У статті розглядається окремий випадок оберненої задачі – реконструкція нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь із зовнішнім збудженням за єдиною спостережуваною змінною, яку представлено скалярним часовим рядом. Доведені теореми для систем з періодичним зовнішнім збудженням, які можуть бути покладені в основу алгоритму для вирішення даного завдання. Можливість практичного застосування теорем проілюстрована чисельним методом. Виявлені труднощі, які можливі при реалізації алгоритму.

*Ключові слова: реконструкція, система диференціальних рівнянь, зовнішнє збудження, періодична функція, скалярний часовий ряд, алгебраїчна система, число обумовленості.*

## RECONSTRUCTION OF SOME NONLINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEMS BY USE OF SCALAR TIME SERIES

Gorodetskyi V.G.

*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,  
37, Prosp. Peremogy, Kyiv, Ukraine, 03056*

The problem of obtaining mathematical models for systems with external excitation is of interest both from a theoretical and practical point of view. Such systems are widely used in physics, engineering, biology and other applications. The article deals with the special case of the inverse problem - reconstruction of nonlinear system of ordinary differential equations with external excitation by use of a single observed variable represented by a scalar time series. We try to establish a strict mathematical conditions for identification of the systems with unknown periodic excitation. Such problem may arise especially in the case when the system is acting in the regime of deterministic chaos. This study proposes the formulation and proof of the theorems, which establish the necessary and sufficient conditions for periodicity of the unknown outer excitation. They also allow to find unknown period of the outer excitation. The identification of other unknown parameters of the system thus becomes less complicated. The possibility of practical application of proposed theory is illustrated by a numerical examples. The possible difficulties that may arise in the implementation of the algorithm are identified. One of them is the bad condition number, that may appear while forming the matrix to solve inverse

problem. This is clearly demonstrated by numerical examples and graphs. To create algebraic system for solving the inverse problem one must use numerical differentiation. This operation also may be the reason of increasing errors because of numerical noise. That is why the researcher must use special type of numerical differentiation, filtering, smoothing, etc. The proved theorems can be useful for building an algorithm identifying some systems with external excitation on the basis of data on a single observable variable.

*Key words: reconstruction, the system of differential equations, the external excitation, periodic function, a scalar time series, algebraic system, the condition number.*

## ВВЕДЕНИЕ

Задача получения математической модели систем с внешним возбуждением представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения [1, с. 72]. Такие системы получили широкое распространение в физике [2; 3, с. 93], технике [4; 5, с. 33], биологии [6, 7] и других приложениях.

Преобладающим подходом при математическом моделировании устройств и процессов с внешним возбуждением является решение так называемой прямой задачи. В этом случае на основании знания физических процессов, происходящих в моделируемом объекте, выводятся уравнения, описывающие эти процессы. Например, это могут быть системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – вектор фазовых переменных  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $t$  – время. Решив систему (1), можно оценить адекватность модели, сравнив полученные функции  $x_i(t)$  с реальными.

Если информации для получения модели (1) недостаточно, можно попытаться решить обратную задачу [8], то есть, получить модель, зная  $x_i(t)$ . Важным частным случаем такой задачи является реконструкция математической модели по скалярному временному ряду [9, с. 295], а именно, по единственной известной наблюдаемой переменной, например  $x_1(t)$ . Известен ряд подходов, достаточно эффективных при реконструкции некоторых автономных систем [10, 11]. В то же время, случай неавтономных систем менее изучен и, следовательно, требует дальнейших исследований в этом направлении [12]. В данном исследовании предлагается формулировка и доказательство теорем, которые могут быть полезны при построении алгоритма реконструкции некоторых систем с внешним возбуждением на основе данных о единственной наблюдаемой переменной.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим частный случай системы (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = C_0(t) + \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) переменное внешнее воздействие задано функцией времени  $C_0(t)$ , которую считаем известной наряду с постоянными коэффициентами  $\tilde{n}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) и  $f_j$  – непрерывными функциями переменных  $x_1, \dots, x_n$ . В общем случае  $n \neq m$ .

Сформулируем обратную задачу для системы (2). Будем считать известными функцию  $x_1(t)$  – решение системы (2) и вид функций  $f_j(x_1, \dots, x_n)$ . Из уравнений этой системы легко определяются  $x_2(t), \dots, x_n(t)$ . В свою очередь неизвестными станут внешнее воздействие  $C_0(t)$  и постоянные коэффициенты  $\tilde{n}_j$ . Если  $C_0(t) = c_0 = const$ , то для нахождения коэффициентов  $c_0, \dots, c_m$  достаточно решить алгебраическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t_0) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \\ \dot{x}_n(t_1) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) + c_2 f_2(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \dots, c_m f_m(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t_m) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)) + c_2 f_2(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \dots, c_m f_m(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \end{cases} \quad (3)$$

где  $t_0, \dots, t_m$  – произвольные моменты времени. Если главный определитель системы (3)  $\Delta \neq 0$ , то решение системы (3) существует.

Рассмотрим случай  $C_0(t) \neq const$ . Сформируем алгебраическую систему (4) аналогично системе (3):

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t_0) = C_0^4(t_0) + c_1^4 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2^4 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \\ \dot{x}_n(t_1) = C_0^4(t_1) + c_1^4 f_1(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) + c_2^4 f_2(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t_m) = C_0^4(t_m) + c_1^4 f_1(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)) + c_2^4 f_2(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь верхний индекс 4 при коэффициентах  $\tilde{n}_j$  указывает на принадлежность этих коэффициентов к системе (4). В этой системе неизвестными являются  $C_0^4(t_0), \dots, C_0^4(t_m)$ ,  $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$ . Отсюда число неизвестных равно  $2m+1$ , что больше  $m+1$  – числа уравнений в системе (4). Следовательно, система (4) неразрешима методом, аналогичным решению системы (3).

### СИСТЕМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Пусть в (2)

$$C_0(t) = p_T(t), \quad (5)$$

где  $p_T(t)$  – периодическая функция времени периода  $T$ . В этом случае справедливо следующее утверждение.

*Лемма 1.* Если для системы (2) выполняется условие (5) и при формировании системы (4) моменты времени  $t_0, \dots, t_m$  выбраны таким образом, что

$$\begin{cases} t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m, \\ t_1 = t_0 + k_1 \tau, t_2 = t_0 + k_2 \tau, \dots, t_m = t_0 + k_m \tau, k_j \in N, j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (6)$$

и при этом  $\tau = T$ , то при решении системы (4) аналогично решению системы (3) получим  $\tilde{n}_1^4 = \tilde{n}_1, \tilde{n}_2^4 = \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_m^4 = \tilde{n}_m$ .

*Доказательство.* Так как  $p_T(t)$  – периодическая функция периода  $T$ , то  $p_T(t_0) = p_T(t_0 + k_1 T) = p_T(t_0 + k_2 T) = \dots = p_T(t_0 + k_m T)$ . Следовательно, в системе (4) при

выборе моментов времени согласно (6) получим  $C_0^4(t_0) = C_0^4(t_1) = \dots = C_0^4(t_m)$ , то есть для этих моментов времени  $C_0^4 = const$ . Отсюда решение системы (4) может быть получено аналогично системе (3). Конец доказательства.

Для решения системы (4) в данном случае необходимо знать величину  $T$ , которая может быть неизвестной. Это возможно, например, когда при определенных наборах параметров, система (2), являясь детерминированной, демонстрирует хаотическое поведение. При этом определение периода  $T$  при реконструкции модели становится серьезной проблемой [12].

Очевидно, что при изменении величины  $\tau$ , решая обратную задачу для системы (4), можно получить разные значения коэффициентов  $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$ . Также очевидно, что при произвольных  $\tau$  коэффициенты  $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$  могут зависеть и от момента времени  $t_0$ , с которого начинается формирование системы (4). Поэтому эти коэффициенты являются функциями от  $t_0$  и  $\tau$ , то есть  $\tilde{n}_j^4 = \tilde{n}_j^4(t_0, \tau)$ . Введем обозначение  $\mathbf{c}(t_0, \tau) = \{\tilde{n}_1(t_0, \tau), \tilde{n}_2(t_0, \tau), \dots, \tilde{n}_m(t_0, \tau)\}$ , где  $\mathbf{c}(t_0, \tau)$  – вектор искомых постоянных коэффициентов. Сформируем две системы типа (4) согласно (6) для двух разных моментов времени:  $t_0 = t_{01}$  и  $t_0 = t_{02}$ .

*Теорема 1.* Если выполняется соотношение (5), то для того, чтобы  $\tau = T$ , необходимо, чтобы существовала хотя бы одна пара значений  $t_{01}$  и  $t_{02}$ , для которых выполняется равенство

$$\mathbf{c}(t_{01}, \tau) = \mathbf{c}(t_{02}, \tau). \tag{7}$$

*Доказательство.* Справедливость теоремы следует из леммы 1.

*Теорема 2.* Если выполняется соотношение (5), то для того, чтобы  $\tau = T$ , достаточно, чтобы при формировании системы (4) в соответствии с (6) для двух любых начальных моментов времени  $t_{01}$  и  $t_{02}$  выполнялось соотношение (7).

*Доказательство.* Пусть  $\tau = T$ , и при этом равенство (7) для некоторых  $t_{01}$  и  $t_{02}$  не выполняется, то есть  $\mathbf{c}(t_{01}, T) \neq \mathbf{c}(t_{02}, T)$ . Это означает, что при решении обратной задачи для систем вида (4), сформированных для разных  $t_0$ , наборы полученных коэффициентов  $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$  отличаются друг от друга. Но это противоречит лемме 1, согласно которой для  $\tau = T$  при решении системы (4) получим  $\tilde{n}_1^4 = \tilde{n}_1, \tilde{n}_2^4 = \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_m^4 = \tilde{n}_m$  независимо от  $t_0$ . Конец доказательства.

После определения  $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$  несложно получить значения  $C_0(t) = p_T(t)$  в любой момент времени. Для этого достаточно любое из уравнений системы (4) решить относительно  $C_0(t)$ , например:

$$C_0(t_0) = c_1^4 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2^4 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) - \dot{x}_n(t_0). \tag{8}$$

Все величины в правой части (8) в любой момент времени известны, что позволяет найти  $C_0(t_0)$ .

Рассмотрим частный случай. Пусть

$$C_0(t) = p_T(t) = a + c_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{9}$$

где  $a$  – постоянная, а  $c_0, \omega, \varphi$  – амплитуда, круговая частота и угол сдвига синусоиды, соответственно. Очевидно, что зная значение  $p_T(t)$  в любой момент времени, можно

определить амплитуду синусоиды  $c_0$ , величину смещения  $a$ , частоту  $\omega = 2\pi/T$  и фазовый сдвиг  $\varphi$ .

### ЧИСЛЕННАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим в качестве примера осциллятор Уэды [2], динамика которого описывается системой Дуффинга [3, с.93]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = c_0 \cos(t) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1^3 \end{cases} \quad (10)$$

с параметрами  $\tilde{n}_0 = 10$ ,  $\tilde{n}_1 = 1$ ,  $\tilde{n}_2 = -0,1$ ,  $\tilde{n}_3 = -1$ . Система была решена методом Рунге-Кутты на интервале  $100c$  с шагом  $\Delta t = 10^{-3}c$ . Решение представлено в виде временного ряда, содержащего  $10^5$  точек. Зависимости  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  для системы (10) представлены на рис. 1, а ее фазовый портрет – на рис. 2.

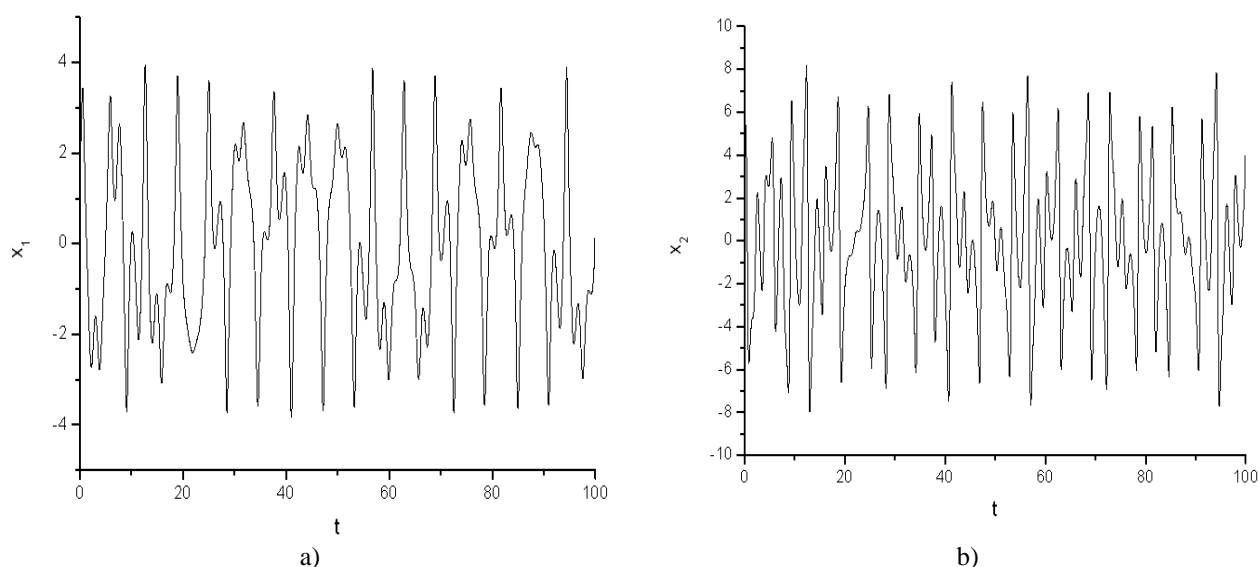


Рис. 1. Временные зависимости для системы (10): а –  $x_1(t)$ , б –  $x_2(t)$

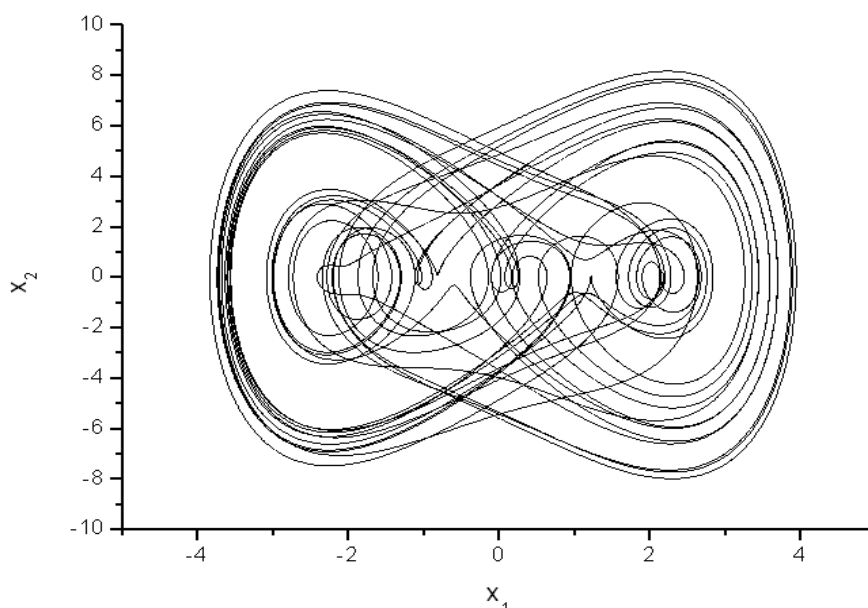


Рис. 2. Фазовый портрет системы (10)

Алгебраическая система для решения обратной задачи в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t_0) = c_0 \cos(t_0) + c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + c_3 x_1^3(t_0), \\ \dot{x}_2(t_1) = c_0 \cos(t_1) + c_1 x_1(t_1) + c_2 x_2(t_1) + c_3 x_1^3(t_1), \\ \dot{x}_2(t_2) = c_0 \cos(t_2) + c_1 x_1(t_2) + c_2 x_2(t_2) + c_3 x_1^3(t_2), \\ \dot{x}_2(t_3) = c_0 \cos(t_3) + c_1 x_1(t_3) + c_2 x_2(t_3) + c_3 x_1^3(t_3), \end{cases} \quad (11)$$

где  $t_1 = t_0 + T$ ,  $t_2 = t_0 + 2T$ ,  $t_3 = t_0 + 3T$ ,  $T = 2\pi/\omega$ . С учетом обозначений, принятых в выражении (9), в системе (10) получим  $a = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\omega = 1$ , откуда  $T = 2\pi$ .

Преобразуем (11) к виду:

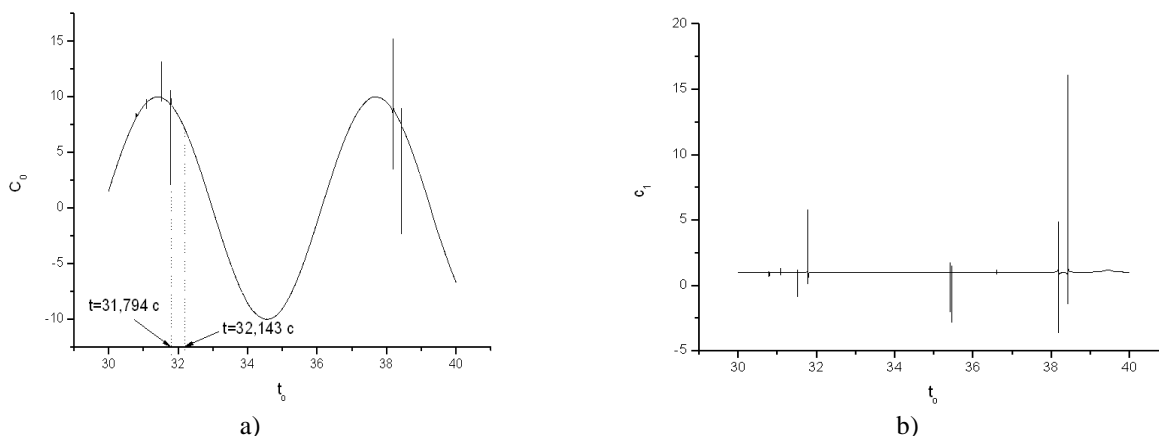
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1(t_0) & x_2(t_0) & x_1^3(t_0) \\ 1 & x_1(t_0+T) & x_2(t_0+T) & x_1^3(t_0+T) \\ 1 & x_1(t_0+2T) & x_2(t_0+2T) & x_1^3(t_0+2T) \\ 1 & x_1(t_0+3T) & x_2(t_0+3T) & x_1^3(t_0+3T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0+T) \\ \dot{x}_2(t_0+2T) \\ \dot{x}_2(t_0+3T) \end{pmatrix},$$

$$C_0 = c_0 \cos(t_0) = c_0 \cos(t_0 + T) = c_0 \cos(t_0 + 2T) = c_0 \cos(t_0 + 3T).$$

Система (12) была решена для всех моментов времени из диапазона  $t_0 = 0, \dots, 70c$ . На рис. 3 представлены временные зависимости коэффициентов  $C_0(t_0)$ ,  $c_1(t_0)$ ,  $c_2(t_0)$ ,  $c_3(t_0)$  для интервала  $t_0 = 30, \dots, 40c$ . Как и ожидалось, зависимость  $C_0(t_0)$  имеет синусоидальный характер, а зависимости  $c_1(t_0)$ ,  $c_2(t_0)$ ,  $c_3(t_0)$  близки к постоянным. Скачки величин в некоторых точках на графиках объясняются плохой обусловленностью [13, с. 110] матрицы  $\mathbf{A}$ , сформированной для некоторых  $t_0$ . Например, при  $t_0 = 31,794c$  имеет место значительное отклонение  $C_0$  на графике 3,а. При этом величина числа обусловленности с евклидовой метрикой  $cond(\mathbf{A}) = 7,016 \cdot 10^5$  в этой точке указывает на плохую обусловленность матрицы. Кроме того, ее определитель в этой точке принимает близкое к нулю значение  $|\mathbf{A}| = 5,005 \cdot 10^{-3}$ . Для сравнения, на соседних участках графика ситуация противоположна. Например, в произвольно выбранной точке  $t_0 = 32,143c$  получим приемлемые значения  $cond(\mathbf{A}) = 109,336$  и  $|\mathbf{A}| = -5,63$ .



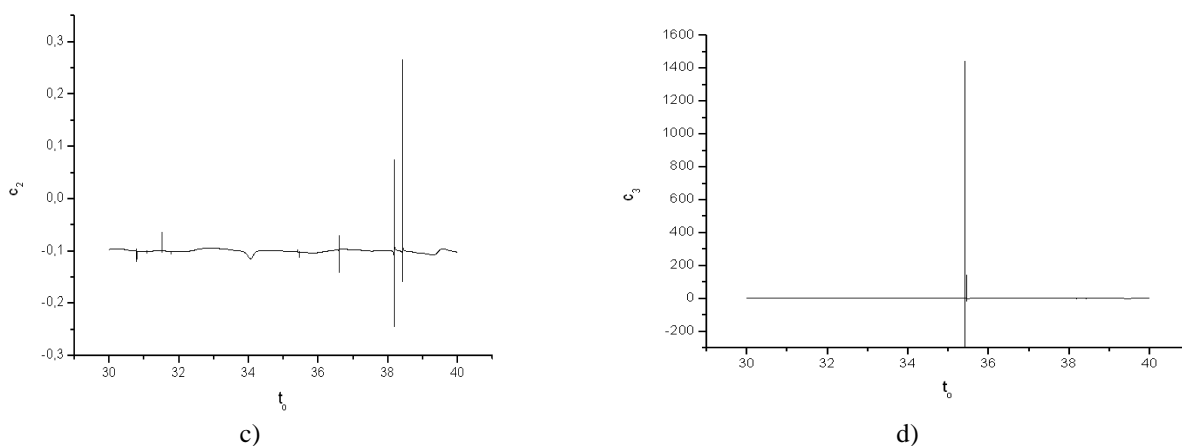


Рис. 3. Временные зависимости коэффициентов системы (10): а –  $C_0(t_0)$ , б –  $c_1(t_0)$ , в –  $c_2(t_0)$ , д –  $c_3(t_0)$

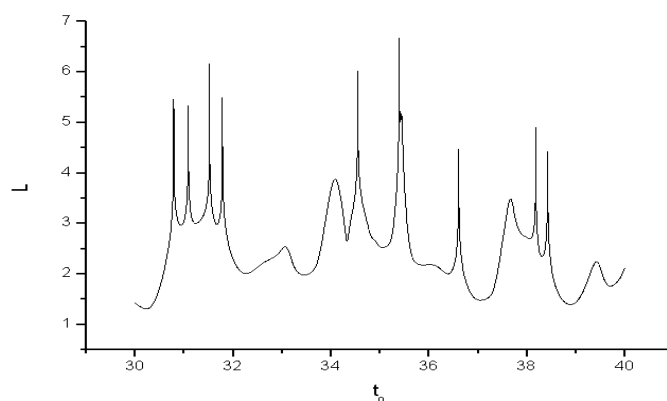


Рис. 4. График зависимости  $L(t_0)$ ,  $L = \log_{10}(\text{cond}(\mathbf{A}))$

Более наглядное представление о количестве возможных сингулярностей дает график зависимости  $L(t_0)$ , где  $L = \log_{10}(\text{cond}(\mathbf{A}))$ , представленный на рис. 4. Из графика видно, что при построении алгоритма следует решить проблемы, вызванные плохой обусловленностью матрицы, сформированной для некоторых наборов исходных данных при решении обратной задачи. Также источником погрешности может быть дискретный характер исходного временного ряда  $x_1(t)$ . Это обстоятельство влияет на результат численного дифференцирования при нахождении значений  $x_2, \dots, x_n$  в системе (2). Особенно эта проблема актуальна для временных рядов с шумом, полученных при реальных измерениях.

## ВЫВОДЫ

Исследование посвящено решению важного частного случая обратной задачи – реконструкции нелинейных неавтономных динамических систем по единственной наблюдаемой переменной. Предложенные в работе теоремы могут служить основой для построения алгоритма реконструкции систем вида (2). Сформулированные в статье необходимые и достаточные условия позволяют строго определить период внешнего возбуждающего воздействия, что существенно облегчает поиск остальных параметров системы. Источником погрешности при реализации данных теорем в вычислительном алгоритме может быть плохая обусловленность матрицы, сформированной для решения алгебраической системы вида (12). Это наглядно продемонстрировано на численных примерах и графически на рис. 4.

С повышением порядка производных возрастает погрешность численного дифференцирования. Для решения этой проблемы необходимо применять специальные методы дифференцирования, сглаживания и другие приемы. Особенно эта проблема актуальна для реальных зашумленных временных рядов.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. – 208 с.
2. Ueda Y. Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation / Y. Ueda // *J. Stat. Phys.* – 1979 – Vol. 20. – P. 181-196.
3. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
4. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series Analysis / [R. Hegger, H. Kantz, F. Schmuser, M. Diestelhorst, R.-P. Kapsch and H. Beige] // *Chaos.* – 1998. – Vol. 8, № 3. – P. 727-754.
5. Потужна дисипація енергії коливань гірничих машин гетерогенними ліофобними системами / [Єрошенко В. А., Сліденко В. М., Шевчук С. П., Студенець В. П.]. – К. : НТУУ «КПІ», 2016. – 184 с.
6. Gong P.-L. Global dynamics and stochastic resonance of the forced FitzHugh-Nagumo neuron model / P.-L. Gong, J.-X. Xu // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 031906.
7. Феоктистов А. В. Динамика системы Фитцхью-Нагумо под внешним периодическим воздействием / А. В. Феоктистов, В. С. Анищенко // *Изв. Вузov : Прикладная нелинейная динамика.* – Т. 19, № 5. – 2011. – С. 35-44.
8. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation / A. Tarantola. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. – 344 p.
9. Анищенко В. С. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / [В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др.]. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 544 с.
10. Lainscsek C. Ansatz library for global modeling with a structure selection / C. Lainscsek, C. Letellier, F. Schurrer // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 016206.
11. Gorodetskyi V. Analytic reconstruction of some dynamical systems / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // *Physics Letters A.* – 2013. – Vol. 377. – P. 703-713.
12. Bezruchko V. P. Constructing nonautonomous differential equations from a time series / V. P. Bezruchko, D. A. Smirnov // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 016207.
13. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, В. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

## REFERENCES

1. Krasnopolskaya, T.S. and Shvets, A.Yu. (2008), *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika sistem s ogranichenym vozbuzhdeniem* [Regular and chaotic dynamics of the systems with limited excitation], Institute of computer science, Moscow-Izhevsk.
2. Ueda, Y. (1979), “Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation”, *J. Stat. Phys.*, vol. 20, pp. 181-196.
3. Moon, F. (1987), *Khaoticheskie kolebaniya* [Chaotic vibrations], Wiley&Sons, New York.
4. Hegger, R., Kantz, H., Schmuser, F., Diestelhorst, M., Kapsch, R.-P. and Beige, H. (1998), “Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series Analysis”, *Chaos*, vol. 8, no. 3, pp. 727-754.
5. Eroshenko, V.A., Slidenko, V.M., Shevchuk, S.P. and Studenets, V.P. (2016), *Potuzhna dysypatsiya enerhiyi kolyvan' hirnychykh mashyn heterohennymy liofobnymy systemamy* [Powerful vibrational energy dissipation of mining machines by use of lyophobic heterogeneous systems], NTUU “KPI”, Kyiv.
6. Gong, P.-L. and Xu, J.-X. (2001), “Global dynamics and stochastic resonance of the forced Fitz-Hugh-Nagumo neuron model”, *Phys. Rev. E.*, vol. 63, pp. 031906.
7. Feoktistov, A.V. and Anischenko, V.S. (2011), “Dynamics of the FitzHugh–Nagumo system under outer periodic action”, *Izvestiya VUZov: Applied nonlinear dynamics*, vol. 19, no. 5, pp. 35-44.
8. Tarantola, A. (2005), “Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.



9. Anischenko, V.S., Astakhov, V.V., Vadivasova, T.E., Neyman, A. B., Strelkova, G.I. and Shimanskiy-Gayer, L. (2003), *Nelineynye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* [Nonlinear effects in chaotic and stochastic systems], Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk.
10. Lainscsek, C., Letellier, C. and Schurrer, F. (2001), “Ansatz library for global modeling with a structure selection”, *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 016206.
11. Gorodetskyi, V. and Osadchuk, M. (2013), “Analytic reconstruction of some dynamical systems”, *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 703-713.
12. Bezruchko, B.P. and Smirnov, D.A. (2001), “Constructing nonautonomous differential equations from a time series”, *Phys. Rev. E*, vol. 63, pp. 016207.
13. Voevodin, V.V. and Kuznetsov, V.V. (1984), *Matritsy i vychisleniya* [Matrix and calculations], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

## **ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ**

<sup>1</sup>Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, <sup>1</sup>Єфімова Т. Л., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Коротких Ю. А., асистент

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 01057, Україна*

<sup>2</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базі уточненої теорії Тимошенка-Міндліна досліджуються вільні коливання нетонких циліндричних оболонок з неперервно неоднорідних матеріалів з несиметричною будовою відносно серединної поверхні. Вивчається вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних вільних коливаннях.

*Ключові слова: уточнена теорія Тимошенка-Міндіна, осесиметричні вільні коливання, неперервно неоднорідні матеріали.*

## **ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ**

<sup>1</sup>Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, <sup>1</sup>Ефимова Т. Л., к. ф.-м. н.,  
<sup>2</sup>Коротких Ю. А., ассистент

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 01057, Украина*

<sup>2</sup>*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,  
просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базе уточненной теории Тимошенко-Миндлина исследуются осесимметричные свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов с несимметричным строением относительно срединной поверхности. Изучается влияние различных законов изменения механических свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при осесимметричных свободных колебаниях.

*Ключевые слова: уточненная теория Тимошенко-Миндлина, осесимметричные свободные колебания, непрерывно неоднородный материал.*