

9. Anischenko, V.S., Astakhov, V.V., Vadivasova, T.E., Neyman, A. B., Strelkova, G.I. and Shimanskiy-Gayer, L. (2003), *Nelineynye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* [Nonlinear effects in chaotic and stochastic systems], Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk.
10. Lainscsek, C., Letellier, C. and Schurrer, F. (2001), “Ansatz library for global modeling with a structure selection”, *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 016206.
11. Gorodetskyi, V. and Osadchuk, M. (2013), “Analytic reconstruction of some dynamical systems”, *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 703-713.
12. Bezruchko, B.P. and Smirnov, D.A. (2001), “Constructing nonautonomous differential equations from a time series”, *Phys. Rev. E*, vol. 63, pp. 016207.
13. Voevodin, V.V. and Kuznetsov, V.V. (1984), *Matritsy i vychisleniya* [Matrix and calculations], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ

¹Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, ¹Єфімова Т. Л., к. ф.-м. н.,
²Коротких Ю. А., асистент

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 01057, Україна*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базі уточненої теорії Тимошенка-Міндліна досліджуються вільні коливання нетонких циліндричних оболонок з неперервно неоднорідних матеріалів з несиметричною будовою відносно серединної поверхні. Вивчається вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних вільних коливаннях.

Ключові слова: уточнена теорія Тимошенка-Міндіна, осесиметричні вільні коливання, неперервно неоднорідні матеріали.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

¹Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, ¹Ефимова Т. Л., к. ф.-м. н.,
²Коротких Ю. А., ассистент

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 01057, Украина*

²*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базе уточненной теории Тимошенко-Миндлина исследуются осесимметричные свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов с несимметричным строением относительно срединной поверхности. Изучается влияние различных законов изменения механических свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при осесимметричных свободных колебаниях.

Ключевые слова: уточненная теория Тимошенко-Миндлина, осесимметричные свободные колебания, непрерывно неоднородный материал.

AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL MEDIUM - THICKNESS SHELLS MADE OF A CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS MATERIAL WITH ASYMMETRICAL STRUCTURE

¹Grigorenko A. Ya., D. Sc., Professor, ¹Efimova T. L., Ph.D.,
²Korotkih Yu.A., Post graduate student

¹*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterov str., 3, Kyiv, 01057, Ukraine*

²*Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitroflotskiy avenue, 31, m. Kuib, 03680, Ukraine*

ayagrigenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

Modern technologies in the science of materials made it possible to produce new materials with predictable properties among which functionally gradient materials occupy important place [4]. The distinctive feature of these materials is smooth change of mechanical properties in certain direction. In this case, the model of an isotropic inhomogeneous material in the direction with varying elastic properties is chosen as mechanical one. The gradient materials may be used in mechanical engineering, radio engineering, instrument-making industry, medicine, etc.

The general elastic problems for bodies made of hypothetical gradient materials have been considered in [1, 2]. However, due to strong inhomogeneity of the materials, the employment of the three-dimensional elasticity theory for solving dynamical problems of bodies made of the functionally gradient materials is problematical. In [3, 5-10], the natural vibrations of cylindrical bodies were studied using different shell theories.

The present paper studies whether the refined Timoshenko-Mindlin shell theory can be applied to solving problems on natural axisymmetric vibrations of cylindrical shells, whose mechanical parameters vary smoothly over the thickness, as well as in estimating of how different rules of variations of these parameters influence the dynamical characteristics of the shells under radial-longitudinal axisymmetric vibrations. The elastic equations for circular cylindrical shells of the functionally gradient materials are derived taking into account the symmetry of elastic properties with respect to the mid-surface.

It is shown that the above shell theory can be used for determining vibration frequencies of cylindrical shells made of the functionally gradient materials with power-behaved elastic properties. In this case, the elastic properties of the functionally gradient material of the metal-metal type may be determined, as a rule, by the concentration of components. The shells manufactured from the functionally gradient materials based on the aluminum-SiC and stainless steel-nickel compositions are considered also. In the last case, the change in the elastic properties of the material at the relevant temperature regime is taken into account. The axisymmetric vibrations of circular cylindrical shells of functionally gradient materials under different boundary conditions are studied.

Key words: Timoshenko–Mindlin theory, free axisymmetric vibrations, the material with continuously varying properties

ВСТУП

Поява нових технологій у матеріалознавстві дозволила створити нові матеріали з прогнозованими властивостями, серед яких важливе місце займають функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) [4], які мають механічні властивості, що плавно змінюються в деякому напрямку. При цьому механічною моделлю таких матеріалів обирається модель ізотропного неоднорідного в напрямку зміни пружних властивостей матеріалу. Градієнтні матеріали можна використовувати в машинобудуванні, радіопромисловості, приладобудуванні, медицині тощо.

Загальні задачі теорії пружності тіл з гіпотетичних градієнтних матеріалів розглянуто в роботах [1, 2]. Однак у зв'язку з суттєвою неоднорідністю матеріалу застосування тривимірної теорії пружності для задач динаміки тіл з ФГМ є проблематичним. У роботах [3, 5-10] досліджувались вільні коливання тіл циліндричної форми на базі різних теорій оболонок.

У цьому повідомленні досліджуються питання можливості застосування уточненої теорії оболонок Тимошенка-Міндліна до задач про вільні коливання циліндричних оболонок з механічними параметрами, що плавно змінюються вздовж товщини, а також вплив різних законів зміни властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при радіально-повздовжніх осесиметричних коливаннях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про вільні коливання кругових циліндричних оболонок з функціонально градієнтного матеріалу з градієнтом зміни пружних властивостей у напрямку, перпендикулярному до серединної поверхні оболонки. Застосуємо уточнену модель Тимошенка-Міндіна, яка базується на гіпотезі прямої лінії. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що прямолінійний елемент нормалі вихідної координатної поверхні при малих деформаціях зберігає свою довжину та прямолінійність, але не залишається перпендикулярним до координатної поверхні. Згідно з прийнятою гіпотезою в системі координат γ, θ, z , пов'язаній з серединною поверхнею оболонки (γ – координата в напрямку нормалі серединної поверхні, $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$), малі переміщення точок можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u_\gamma(\gamma, \theta, z, t) &= w(\theta, z, t), \quad u_\theta(\gamma, \theta, z, t) = v(\theta, z, t) + \gamma \psi_\theta(\theta, z, t), \\ u_z(\gamma, \theta, z, t) &= u(\theta, z, t) + \gamma \psi_z(\theta, z, t). \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(\theta, z, t)$, $v(\theta, z, t)$, $w(\theta, z, t)$ – переміщення координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, z, t)$, $\psi_z(\theta, z, t)$ – функції, що характеризують незалежний повний поворот нормалі.

Відповідно до (1) вирази для деформацій набувають вигляду:

$$\begin{aligned} e_\theta(\gamma, \theta, z, t) &= \varepsilon_\theta(\theta, z, t) + \gamma \kappa_\theta(\theta, z, t), \\ e_z(\gamma, \theta, z, t) &= \varepsilon_z(\theta, z, t) + \gamma \kappa_z(\theta, z, t), \\ e_{\theta z}(r, \theta, z, t) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z, t) + 2\gamma \kappa_{\theta z}(\theta, z, t), \\ e_{\gamma\theta}(r, \theta, z, t) &= \gamma_\theta(\theta, z, t), \\ e_{\gamma z}(r, \theta, z, t) &= \gamma_z(\theta, z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенціальні деформації координатної поверхні, $\kappa_\theta, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – компоненти згинальної деформації, γ_θ, γ_z – кути повороту нормалі, зумовлені поперечними зсувами. Зв'язок деформацій та переміщень серединної поверхні оболонки задається формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_\theta &= \psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння руху мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta &= I_0 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta &= I_1 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

причому $N_{z\theta} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$. Тут $N_z, N_\theta, N_{\theta z}, N_{z\theta}$ – тангенціальні зусилля, Q_θ, Q_z – перерізувальне зусилля, $M_\theta, M_z, M_{\theta z}, M_{z\theta}$ – згинальні та обертальний моменти, $\rho(\gamma)$ – густина матеріалу оболонки. Інерційні члени I_0, I_1, I_2 , що входять в рівняння (4), обчислюються з урахуванням наявності градієнта пружних властивостей:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \rho(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma. \quad (5)$$

Співвідношення пружності для циліндричних оболонок з функціонально градієнтного матеріалу з урахуванням відсутності симетрії пружних властивостей відносно серединної поверхні запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta, \\ N_\theta &= C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_z + K_{22}\kappa_\theta, \\ N_{z\theta} &= C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \kappa_{\theta z}, \\ M_z &= K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta + D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta, \\ M_\theta &= K_{12}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta + D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, \\ M_{\theta z} &= M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \\ Q_\theta &= K_2\gamma_\theta, \quad Q_z = K_1\gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (6)$$

де жорсткісні характеристики оболонки, приведені до координатної поверхні, обчислюються за формулами:

$$\begin{pmatrix} C_{ij} \\ K_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} B_{ij}(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma, \quad (i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_{11}(\gamma) &= B_{22}(\gamma) = E(\gamma)/(1-\nu^2(\gamma)), \\ B_{12}(\gamma) &= \nu(\gamma)E(\gamma)/(1-\nu^2(\gamma)), \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned}$$

E, G, ν – модулі пружності, зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно, які для градієнтного матеріалу з напрямком градієнта вздовж товщинної координати є функціями координати γ .

Необхідно зазначити, що для симетричної відносно серединної поверхні будови матеріалу у співвідношеннях пружності (6) коефіцієнти $K_{ij}(\gamma)$ для $(i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}$, а в рівняннях руху (4) інерційний коефіцієнт I_1 дорівнюють нулю, і система рівнянь (3), (4), (6) значно спрощується.

На торцях $z = 0$ и $z = L$ будемо розглядати такі граничні умови:

- 1) контур шарнірно обпертий та вільний у напрямку твірної $-\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_\theta = 0$;
- 2) вільний контур $-N_z = 0, M_z = 0, Q_z = 0$.

При розгляді осесиметричних вільних коливань (усі функції, що входять до рівнянь (3), (4), (6), не залежать від θ , а їх похідні по θ дорівнюють нулю: $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$) система рівнянь руху (4) розпадається на дві незалежні системи, одна з яких відповідає радіально-повздожнім, а друга – крутильним коливанням. При цьому рівняння руху радіально-повздожніх коливань запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} &= I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{1}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} - Q_z &= I_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Спрощуються рівняння зв'язку з переміщеннями серединної поверхні тангенціальних та згинальних деформацій серединної поверхні, а також кута повороту нормалі, зумовленого поперечними зсувами:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R^2} w, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9)$$

Необхідні співвідношення пружності з урахуванням розгляду радіально-повздожніх коливань запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta, \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_z + K_{22} \kappa_\theta, \\ M_z &= K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta, \quad M_\theta = K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta, \\ Q_z &= K_1 \gamma_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Вважаємо, що всі точки циліндричної оболонки гармонійно коливаються з круговою частотою ω , тобто

$$\{u(z, t), w(z, t), \psi_z(z, t)\} = \{\tilde{u}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\psi}_z(z)\} e^{i\omega t} \quad (11)$$

(надалі знак \sim опускається).

Запишемо систему рівнянь (8), (9), (10) з урахуванням (11) у переміщеннях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + K_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} &= -I_0 \omega^2 u - C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + K_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} - I_1 \omega^2 \psi_z, \\ K_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + D_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} &= -I_1 \omega^2 u - K_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} + K_1 \frac{dw}{dz} + K_1 \psi_z - I_1 \omega^2 \psi_z, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\psi_z}{dz^2} = \frac{C_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} + \frac{C_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w - \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz}, \quad (12)$$

яка після перетворень набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{-D_{11}I_0 + K_{11}I_1}{\Delta} \omega^2 u + \frac{-D_{11}I_1\omega^2 + K_{11}I_2\omega^2 - K_{11}K_1}{\Delta} \psi_z + \\ &+ \frac{D_{11}K_{12} - D_{12}K_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{K_{11}K_{12} - D_{11}C_{12}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} - \frac{K_{11}K_1}{\Delta} \frac{dw}{dz}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\psi_z^2}{dz} = -\frac{C_{11}I_0\omega^2}{\Delta} u - \frac{C_{11}I_2\omega^2}{\Delta} \psi_z + \frac{K_1C_{11}}{\Delta R^2} \psi_z + \frac{-C_{11}K_{12}}{\Delta} \frac{dw}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{C_{11}K_1}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{C_{22}}{K_{11}} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{C_{12}}{K_{11}} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} - \frac{d\psi_z}{dz} - \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz}.$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) разом з відповідними умовами при $z = 0$ і $z = L$ – це задача на власні значення.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Увівши позначення $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\bar{\psi}_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}$, $\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial z}$, $\bar{Y} = \{u, \bar{u}, \psi_z, \bar{\psi}_z, w, \bar{w}\}^T$, систему (13) з відповідними граничними умовами можна представити у вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dz} = A(z, \omega)\bar{Y}, \quad (0 \leq z \leq L), \quad (14)$$

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2\bar{Y}(L) = \bar{0}, \quad (15)$$

де $A(z, \omega)$ – квадратна матриця порядку 6×6 , B_1 та B_2 – прямокутні матриці порядку 3×6 . Задачу (14) з відповідними граничними умовами (15) можна розв'язати із застосуванням методів дискретної ортогоналізації та покрокового пошуку.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо циліндричну оболонку з функціонально градієнтного двокомпонентного матеріалу, для якого зміна пружних властивостей відбувається вздовж товщинної координати. Для градієнтного матеріалу типу «метал-метал» пружні властивості вдається визначити за концентрацією вхідних матеріалів. Відповідний зв'язок між модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν та густиною ρ функціонально градієнтного матеріалу з відповідними параметрами матеріалів, що входять до композиції, визначимо формулами

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1, \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1, \quad \rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1, \quad (16)$$

де E_1, ν_1, ρ_1 и E_2, ν_2, ρ_2 – механічні параметри відповідно першого та другого матеріалів, V – концентрація другого з матеріалів композиції залежно від координати γ . Вважаємо, що ці залежності відповідають степеневому закону зміни пружних властивостей ФГМ вздовж координати γ : $V = \left(\frac{2\gamma + h}{2h}\right)^m$.

Передусім розглядався ФГМ на основі композиції «алюміній – SiC». Пружні параметри матеріалів композиції наведено в табл. 1.

Таблиця 1

	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³
Алюміній	70	0,3	2707
SiC	427	0,17	3100

У табл. 2 наведено перші п'ять частот $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної оболонки з ФГМ, які обчислено за тривимірною теорією пружності [1] та теорією Тимошенко-Міндліна для $m=0,5$. Тут $\rho_0 = 1$ кг/м³, $G_0 = 1$ ГПа. Торці оболонки шарнірно обперті. Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 10l_0$, $h = 2l_0$.

Таблиця 2 – Порівняння частот вільних коливань циліндричної оболонки за різними теоріями

$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
Теорія Тимошенка-Міндліна	3,1605	3,5005	4,6404	5,2606	6,5207
Тривимірна теорія	3,3005	3,6605	4,8407	5,5506	6,8507

Аналізуючи результати, наведені у таблиці, можна зробити висновок про малу відмінність частот вільних коливань циліндричної оболонки з ФГМ за вказаними теоріями, а, отже, і про можливість застосування методики до розрахунків частот вільних осесиметричних коливань циліндричної оболонки з несиметричною будовою відносно координатної поверхні.

У табл. 3 наведено перші три частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}}$ вільних коливань вказаної вище вільної по торцях циліндричної оболонки з ФГМ, що обчислені за теорією Тимошенка-Міндліна, для різних значень параметра m .

Таблиця 3

m	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03160	0,02862	0,02481	0,02081	0,01860
$\bar{\omega}_2$	0,03181	0,02881	0,02543	0,02123	0,01901
$\bar{\omega}_3$	0,03262	0,02950	0,02588	0,02182	0,01983

Необхідно зазначити, що при зростанні параметра m жорсткість матеріалу зростає, що приводить до зменшення частот.

Розглядалися коливання циліндричних оболонок з ФГМ, який є композицією нержавіючої сталі та нікелю. Властивості матеріалів залежно від температури визначаються за формулою [10]:

$$P = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3), \quad (17)$$

де коефіцієнти P_i для визначення властивостей матеріалів наведено у табл.4.

Таблиця 4 – Коефіцієнти для визначення властивостей матеріалів [10]

P_i	Нержавіюча сталь			Нікель		
	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$
P_0	$201,04 \times 10^9$	0,3262	8166	$223,95 \times 10^9$	0,31	8900
P_{-1}	0	0	0	0	0	0
P_1	$3,079 \times 10^{-4}$	$-2,002 \times 10^{-4}$	0	$-2,794 \times 10^{-4}$	0	0
P_2	$-6,534 \times 10^{-7}$	$3,797 \times 10^{-7}$	0	$-3,998 \times 10^{-9}$	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0

У табл. 5 представлено механічні параметри матеріалів для різних значень температур.

Таблиця 5 – Властивості матеріалів при різних температурах

T	Нержавіюча сталь			Нікель		
	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$
300^0K	$2,07788 \times 10^{11}$	0,317756	8166	$2,05098 \times 10^{11}$	0,31	8900
400^0K	$2,04783 \times 10^{11}$	0,319895	8166	$1,98778 \times 10^{11}$	0,31	8900
500^0K	$1,99150 \times 10^{11}$	0,324512	8166	$1,92440 \times 10^{11}$	0,31	8900

У табл. 6 наведено перші чотири частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної

оболонки з ФГМ (композиція «нержавіюча сталь-нікель») за температури $T = 300^0\text{K}$, які обчислено за теорією Тимошенка-Міндліна ($\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$, $G_0 = 1 \text{ ГПа}$). Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 4l_0$, $h = 2l_0$. Закон зміни властивостей вздовж товщинної координати є степеневим з $m = 0,5$.

Таблиця 6 – Частоти вільних коливань циліндра з ФГМ за різних граничних умов

Граничні умови	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
Шарнірне обпирання	0,02150	0,03524	0,03914	0,04164
Жорстке закріплення	0,02242	0,03776	0,04048	0,04276

ВИСНОВКИ

У роботі з використанням уточненої теорії Тимошенка-Міндліна досліджено вільні осесиметричні коливання циліндричних оболонок середньої товщини з неперервно неоднорідного матеріалу з будовою, що є несиметричною відносно до координатної поверхні. Обґрунтовано можливість застосування теорії для розрахунку частот коливань циліндричних оболонок з функціонально градієнтних матеріалів зі степеневим законом зміни пружних властивостей. При цьому розглянуто оболонки з ФГМ «Алюміній-*SiC*» та «нержавіюча сталь-нікель». В останньому випадку враховано зміни пружних властивостей за відповідного температурного режиму. Розглянуто коливання оболонок за різних граничних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Рушицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46, №2. – С. 3-14.
2. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости при зависимости упругих постоянных от радиальной координаты / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Рушицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46, №4. – С. 3-13.
3. Alinaghizadenand M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects clamped-clamped boundary conditions / M. R. Alinaghizadenand, M. R. Isvandzihaei // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2011. – 73. – P. 825-831.
4. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – 60. – P. 195-215.
5. Isvandzibaei M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions / M. R. Isvandzibaei, A. Jahani // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2010. – 45. – P. 152-157.
6. Kumar J. S. Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates / J. S. Kumar, B. S. Reddy, S. E. Reddy, K. V. Kumar Reddy // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2011. – 6, №10. – P. 105-111.
7. Loy C. T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 1999. – 41. – P. 309-324.
8. Najafizadeh M. M. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support / M. M. Najafizadeh, M. R. Isvandzihaei // Acta Mechanica. – 2007. – 191. – P. 75-91.
9. Pradhan S. C. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions / S. C. Pradhan, C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy // Appl. Acoustics. – 2000. – 61. – P. 111-129.
10. Loy C. T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C. T. Loy, K. Y. Lam, S. N. Reddy // International Journal of Mechanical Sciences. – 1999. – 41. – P. 309-324.

REFERENCES

1. Kashtalyan, M.Yu. and Ruschitsky, J.J. (2010), “Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of elasticity”, *Prikladnaya mekhanika*, 46, no. 2, pp. 121-129.
2. Kashtalyan, M.Yu. and Ruschitsky, J.J. (2010), “General Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of radius-dependent elasticity”, *Prikladnaya mekhanika*, 46, no. 4, pp. 367-376.
3. Alinaghizadenand, M.R. and Isvandzihaei, M.R. (2011), “Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects clamped-clamped boundary conditions”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 73, pp. 825-831.
4. Birman, V. and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *Applied Mechanics Reviews*, 60, pp. 195-215.
5. Isvandzibaei, M.R. and Jahani, A. (2010), “Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 45, pp. 152-157.
6. Kumar, J.S., Reddy, B.S., Reddy, S.E. and Kumar Reddy, K.V. (2011), “Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates”, *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 6, no. 10, pp. 105-111.
7. Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, J.N. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 41, pp. 309-324.
8. Najafizadeh, M.M. and Isvandzihaei, M.R. (2007), “Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support”, *Acta Mechanica*, 191, pp. 75-91.
9. Pradhan, S.C., Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, J.N. (2000), “Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions”, *Appl. Acoustics*, 61, pp. 111-129.
10. Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, S.N. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41, pp. 309-324.